板の圧壊挙動を表す簡易解析モデルの開発とその応用

正員 矢尾 哲也* 正員 藤久保 昌彦*
 学生員 聂 春** 学生員 上山 誠司**

Development and Application of Simple Plate Model
 to Simulate Collapse Behaviour under Thrust

by Tetsuya Yao, *Member* Masahiko Fujikubo, *Member*
 Chun Nie, *Student Member*, Seiji Kamiyama, *Student Member*

Summary

This paper deals with development and application of a simple dynamical model which accurately simulate the buckling/plastic collapse behaviour of a plate subjected to cyclic inplane load accompanied by complex unloading and reloading. This model is based on the results of elastic large deflection analysis and rigid plastic mechanism analysis in analytical forms assuming a simple deflection mode.

The proposed model is implemented into a beam-column element as one of the fibre to analyse buckling/plastic collapse behaviour of a continuous stiffened plating subjected to thrust. The beam-column element is composed of a stiffener and attached plating. The fibre representing the plating is assumed to behave according to the proposed simple dynamical model.

Applicabilities of the new plate model and the new beam-column element are demonstrated through comparison of the calculated results with those by the ordinary elastoplastic large deflection FEM analysis.

1. はじめに

近年、有限要素法による船体構造の座屈・塑性崩壊挙動の解析手法は長足の進歩を遂げており、飛躍的に向上した計算機環境と相まって、原理的には全船を対象とした崩壊解析も可能となっている。しかしながら、船体の構造設計の現状では、基本的には弾性座屈強度が設計基準となっており、実際の設計に座屈・塑性崩壊解析を導入する試みは極めて少ない^{1),2)}。その原因は、ひとつには設計思想の問題にもあるが、主として座屈・塑性崩壊解析の実施に際しての煩雑さ、および飛躍的に向上したとは言え未だ不十分な計算機的能力にある。

そのために、座屈および降伏の影響を精度良く考慮出来る、簡易計算法の開発が進められている。このような簡易計算法のひとつに、上田により提案された理想化構造要素法 (Idealized Structural Unit Method; ISUM)³⁾がある。この方法では、通常の有限要素法解析に比べてより大きな構造単位をひとつの要素とし、計算時間の短縮を計っている。現在、船体構造の座屈・塑性崩壊解析に適用可能な各種理想化構造要素の開発が精力的に進められており^{4)~6)}、実際の船体構造に対する解析結果も報告されている^{7),8)}。

ところで、船体構造の重要な強度のひとつに、縦曲げ強度がある。縦曲げ強度は、船体構造の梁としての強度であり、縦曲げモーメントはパネルと防撓材により構成される船体梁（防撓箱桁構造）で受け持たれる。船体横断面の縦曲げ荷重下における逐次崩壊挙動の簡易解析法として、理想化構造要素法の他に Smith の方法^{9),10)}がある。この方法では、まず、船体横断面を防撓材およびパネルより成る防撓板要素に分割して各要素の軸力のもとでの平均応力～平均ひずみ関係を、座屈および降伏の影響を考慮して予め求

* 広島大学工学部エンジニアリングシステム教室

** 広島大学大学院工学研究科構造工学専攻

める。つぎに、縦曲げ荷重のもとで船体横断面が平面を保って回転し、各要素は予め求めた平均応力～平均ひずみ関係を従って挙動するとの仮定のもとで、与えた曲率増分に対応する曲げモーメント増分を順次求めて、断面の逐次崩壊挙動を追跡する。

この方法による計算結果の精度は、各要素の平均応力～平均ひずみ関係の精度に依存する。Smith は有限要素法による弾塑性大たわみ解析を実施して、防撓材要素の平均応力～平均ひずみ関係を導いている。もし、防撓板要素の座屈・塑性崩壊の過程で、パネル部分に除荷が発生しなければ、この平均応力～平均ひずみ関係を用いた逐次崩壊解析は妥当な結果を与え得る。しかしながら、防撓板要素全体を板要素で分割した有限要素法解析の結果によると、パネルのかなりの部分で除荷が発生する場合も多い¹¹⁾。Smith の論文では、このような除荷が発生した場合の取り扱いが明確ではない。

一方、著者らの研究グループでは、面内の繰返し荷重を受ける矩形板の座屈・塑性崩壊挙動に関する研究を行っており^{12), 13)}、繰返し荷重のもとでの座屈・塑性崩壊挙動を追跡する簡易力学モデルを提案している¹⁴⁾。

本論文では、まずこの力学モデルを改良し、Smith 方式の防撓板要素のパネル部分に組み込むことを試みる。力学

モデルの具体的な改良点は、防撓材の剛性がパネルの座屈強度上昇に及ぼす影響を導入することにある。つぎに、本モデルを組み込んだ防撓板要素の平均応力～平均ひずみ関係を求め、通常の板要素を用いた有限要素法解析の結果と比較し、本力学モデルの妥当性を検証する。

2. 板の圧壊挙動を表す簡易力学モデル

2.1 繰返し面内荷重を受ける板の座屈・塑性崩壊挙動

1 方向に面内の繰返し荷重を受ける矩形板の 1 半波部分を取り出して有限要素法による弾塑性大たわみ解析を実施した結果を、Fig. 1 に破線で示す。同図(a)は平均応力と板中央のたわみの関係を、(b)は平均応力と平均ひずみの関係を表す。繰返し荷重のもとでは、以下のような座屈・塑性崩壊挙動が観察される¹²⁾。

- (1) 座屈強度を越えた後のたわみ 1 半波の波形は、最終強度近傍までは $\sin \times \sin$ でほぼ近似出来る。
- (2) 最終強度を越えた後のたわみ波形は、いわゆる屋根型モードへと次第に変化して行く。
- (3) 圧縮域で除荷中の板の挙動は、基本的には弾性挙動である。
- (4) 圧縮域で除荷した後、板には複雑な分布の残留応力および塑性ひずみが発生している。
- (5) 除荷後は、不均一な塑性ひずみのために、板には

(a) Average stress-deflection relationship

(b) Average stress-average strain relationship

Fig. 1 Behaviour prediction of thin plate under cyclic loading

残留たわみが発生する。

(6) 圧縮域で除荷する場合、除荷経路あるいは引き続いている引張側での負荷経路の途中で再降伏が生じる。

(7) 引張側での負荷経路では、たわみは急速に小さくなって行く。

(8) 引張域での除荷開始点におけるたわみの大きさは、繰り返し負荷中に受けた圧縮ひずみ量および引張ひずみ量に依存する。

(9) 引張域での除荷過程は弾性挙動である。

(10) 引張域での除荷中に、たわみは増加する。

(11) 引張域で降伏後に除荷した時も、残留応力が発生するが、その大きさは圧縮域で最終強度後に除荷した時の残留応力に比べると小さい。

2.2 簡易力学モデル

上記の知見をもとに、単純な力学モデルを開発した。まず、項目(1)を考慮して、解析的に弾性大たわみ解析を実施する。初期たわみおよび面内荷重のもとでの全たわみを、次式で仮定する。

$$w_0 = A_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (1)$$

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

この場合、平均応力 σ とたわみの係数 A の関係は、次式で与えられる¹⁴⁾。

$$\frac{\pi^2 E}{16b^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2 \right) (A^2 - A_0^2) + \sigma_{cr} \left(1 - \frac{A_0}{A} \right) + \sigma = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\alpha = a/mb$ は 1 半波のアスペクト比を表す。また、 σ_{cr} は弾性座屈応力を表し、防撓材がパネルの縁に沿って回転変形を拘束せず、たわみ波形が式(2)で十分に近似出来る場合には、次式で与えられる。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha \right)^2 \quad (4)$$

実際は、防撓材による拘束がある。これを考慮した座屈応力に関しては、次節で説明する。

一方、平均応力 σ と平均ひずみ ε の間には、次式の関係が成立する¹⁴⁾。

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{\pi^2 m^2}{8a^2} (A^2 - A_0^2) \quad (5)$$

つぎに、項目(2)を考慮すると、最終強度後の平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係は、剛塑性機構解析を実施して求められる。一般に、崩壊 1 半波部分のアスペクト比は 1.0 よりも小さくなることが知られているが、この場合の平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係は次式で与えられる¹⁵⁾。

$$m_{45} + \frac{1}{\alpha} \frac{m_{90}}{2} + \left(\frac{2}{\alpha} - 1 \right) \bar{\sigma}^* \bar{A} = 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{a^2} (A^2 - A_0^2) \quad (7)$$

ここに $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_Y$ 、 $\bar{A} = A/t$ 、また、

$$m_{90} = 1 - \bar{\sigma}^2 \quad (8)$$

$$m_{45} = 4m_{90}/\sqrt{1+15m_{90}} \quad (9)$$

剛塑性機構解析の正解では、 $\kappa=1.0$ となる。しかしながら、有限要素法解析の結果とは、 $\kappa=2.0$ とした方が良い一致を示す。

式(3)の弾性大たわみ解析による平均応力～たわみ関係を、Fig. 1(a)に点線で示す。一方、式(6)の剛塑性機構解析による平均応力～たわみ関係を、同図に鎖線で示す。一点鎖線は $\kappa=1.0$ の結果、2点鎖線は $\kappa=2.0$ の結果を表す。

一般に、弾性大たわみ解析解と剛塑性機構解析解の交点が最終強度に対応すると言われている。しかしながら、有限要素法解析の結果と比較すると、 $\kappa=1.0$ との交点は低めの、また、 $\kappa=2.0$ との交点は高めの最終強度を与えている。そこで、両交点の応力値の平均を最終強度とする。一方、最終強度時 (Fig. 1(a) の点 B) のたわみは、 $\bar{cB} = \bar{cd}/3$ となるように決める。

ここで、Fig. 1(a) の点 A は、弾性大たわみ解析で求められる初期降伏点を表している。初期降伏 (点 A) から最終強度 (点 B) に到る過程およびその後の過程では、降伏領域が複雑に発達し、これを単純な力学モデルで表すことは不可能である。そこで、 $\bar{AB}$ 間の平均応力～たわみ関係は、次式で近似する。

$$w = w_e + \bar{cB} \{1 - \sqrt{1 - (\sigma - \sigma_A)^2 / (\sigma_B - \sigma_A)^2}\} \quad (10)$$

上式の w_e は、式(3)で計算される応力レベル σ での弾性たわみを表す。同様の手順で、 $\bar{BC}$ 間の平均応力～たわみ関係は、次式で近似する。

$$w = w_p - \bar{Bd} \{1 - \sqrt{1 - (\sigma - \sigma_A)^2 / (\sigma_B - \sigma_A)^2}\} \quad (11)$$

上式の w_p は、式(6)で計算される応力レベル σ での塑性たわみを表す。点 C 以降は、平均応力～たわみ関係は $\kappa=2.0$ とした式(6)に従うものとする。

ところで、防撓パネルの中の板要素では、防撓材に曲げ変形が生じて板が曲げの引張側に来る場合、あるいは、防撓材に塑性関節が形成されて弾性たわみが減少する場合などに、除荷が発生することがある。いま、点 D で除荷が発生したとする。項目(3)に従うと、少なくとも除荷発生後しばらくの間は、板は弾性挙動する。ここで、圧縮側での除荷過程で、平均応力がゼロ (点 E) になるまで挙動は弾性であり、たわみ波形が式(2)で表せると仮定すると、 $\bar{DE}$ 間の平均応力～たわみ関係は式(3)で表されることになる。式(3)の平均応力 σ とたわみの係数 A に点 D の値 σ_D と A_D を代入すると、初期たわみとしての点 E のたわみが、つぎのように求められる。

$$A_E = (-a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4a_1a_3}) / (2a_1) \quad (12)$$

ここに、

$$a_1 = (\pi^2 E / 16b^2) \cdot (1/\alpha^2 + \alpha^2) \quad (13)$$

$$a_2 = \sigma_{cr} / A_D \quad (14)$$

$$a_3 = a_1 A_D^2 + \sigma_{cr} + \sigma_D - \sigma_R \quad (15)$$

有限要素法解析の結果によると、点 E でのたわみ波形

は、残留塑性ひずみの影響でもはや式(2)で表されるような単純な波形ではない。しかしながら、たわみ波形を式(2)で近似することにする。

つぎに、引き続き引張側で負荷する場合を考える。この場合、挙動が弾性であると仮定すると、式(12)で得られた点Eのたわみを初期たわみとして式(3)に従い、 $\overline{Ef}$ の弾性曲線が得られる。実際の挙動は項目(6)でも述べたように、圧縮側での除荷の途中あるいは引張側での負荷の途中に再降伏が始まる。この過程では複雑な分布の塑性ひずみが発生しており、応力分布およびたわみ波形も複雑である。したがって、この間の挙動を精度良く追跡出来る単純な力学モデルを構築することは不可能と言える。そこで、理論的根拠は無いが、この点E以降の引張側での挙動を、つぎのようにモデル化する。

まず、 $\kappa=1.0$ の剛塑性機構解析解の引張側の曲線上で、たわみが点Eのたわみの1/10となる点Fを求める。この点の応力値 σ_F は、式(6)に点Fのたわみ $A_F=A_E/10$ を代入すれば求められる。そして、板が弾性挙動すると仮定して、点Fの平均応力とたわみをを用い、点Dの平均応力とたわみから点Eのたわみを求めたのと同様の手法で、点eのたわみ A_e を求める。

ここで、同じ応力レベルで求められる弾性曲線 $\overline{Ef}$ 上でのたわみを w_2 、弾性曲線 $\overline{eF}$ 上でのたわみを w_1 とし、点Eおよび点Fの間のたわみ w を次式で補間して近似する。

$$w = w_2 - (w_2 - w_1)\{1 - \cos(\pi\sigma/\sigma_F)\}/2 \quad (16)$$

以上で、圧縮側で最終強度に達した後除荷し、引き続き引張側で負荷した場合の平均応力～たわみ関係を近似的に表す方法について説明した。つぎに、この間の平均応力～平均ひずみ関係の求め方について説明する。まず、 $\overline{OB}$ 間および $\overline{DE}$ 間の平均ひずみは、式(5)に従って計算する。また、 $\overline{BD}$ 間および $\overline{EF}$ 間の平均ひずみは、式(7)に従って計算する。

一方、引張側での点F以降の挙動であるが、有限要素法解析の結果によると、大きな面内塑性ひずみが発生し、平均応力は平均ひずみの増加に伴って次第に降伏応力に近づいて行く。そこで、この領域では平均応力と平均ひずみの関係を次式で近似する。

$$\sigma = \sigma_Y - (\sigma_Y - \sigma_F)/e^{2(\epsilon - \epsilon_F)/\epsilon_Y} \quad (17)$$

この領域でのたわみは、式(6)に上式の応力値を代入して求める。

つぎに、引張側の点Gで除荷が発生したとする。項目(9)に従うと、この間の挙動は弾性である。そこで、式(3)に従って平均応力～たわみ関係を求める。具体的には、点Eあるいは点eのたわみを求めたのと同様の考え方で、点Hのたわみを求め、これを初期たわみとして $\overline{GH}$ 間の平均応力～たわみ関係を計算する。平均ひずみは、このたわみを用いて式(5)により計算する。

点Hから、引き続き圧縮側に負荷される場合は、点Hのたわみを初期たわみとして、新たに圧縮領域での平均応力～平均ひずみの関係を求めればよい。

このような方法で求められる平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係を、実線でFig.1(a)および(b)に示す。一方、図の破線は、除荷時点の平均ひずみを一致させた有限要素法解析の結果を表す。これより、本力学モデルにより、除荷を含む板の座屈・塑性崩壊挙動が精度良く追跡出来ていることが分かる。

2.3 防撓材がパネルの局部座屈に及ぼす影響

文献(11)で実施された有限要素法による弾塑性大たわみ解析の結果によると、防撓材の影響で防撓材間パネルの局部座屈強度は上昇する。これは、パネルと防撓材の接合線に沿って、パネルは防撓材から座屈たわみ発生を防止するような曲げモーメントを受けることを意味する。ここでは、座屈解析に問題を絞る、このような曲げモーメントを考慮出来るようなパネルおよび防撓材ウェブのたわみ波形を、次式のように仮定する。

$$w = W_1 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + W_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \frac{4y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (18)$$

$$v = V_1 \frac{z}{h} \sin \frac{m\pi x}{a} + V_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2h}\right) \quad (19)$$

防撓材ウェブはパネルの座屈たわみに引っ張られて変形するので、ウェブのたわみもパネルと同様荷重方向にm半波としている。

また、防撓材のフランジは梁と考える。ウェブとの接合線位置におけるフランジの水平方向のたわみおよび捩れ角は式(19)に $z=h$ を代入すると求められる。

ここで、パネルと防撓材は接合線に沿って回転角が連続でなければならない。この条件より、次式が導かれる。

$$\frac{1}{h} V_1 = \frac{\pi}{b} W_1 + \frac{4}{b} W_2 \quad (20)$$

また、接合線でのモーメントの釣合条件より、次式が得られる。

$$V_2 = \frac{64h^2}{\pi^2 b^2} \left(\frac{t}{t_w}\right)^3 W_2 \quad (21)$$

一方向に面内圧縮荷重を受けている防撓パネルの座屈発生時の全ポテンシャルエネルギー Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_w + \Pi_f \quad (22)$$

ここに、 Π_p および Π_w は板としてのパネルおよび防撓材ウェブの、また、 Π_f は防撓材フランジの梁としての全ポテンシャルエネルギーを表しており、フランジ部分については捩りの影響も考慮する。式(20)および式(21)を用いて V_1 および V_2 を消去し、最小ポテンシャルエネルギーの原理を適用すると、次式が得られる。

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial W_1} \delta W_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial W_2} \delta W_2 = 0 \quad (23)$$

これより、

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1\sigma + \gamma_2 & -\gamma_3\sigma + \gamma_4 \\ -\gamma_3\sigma + \gamma_4 & -\gamma_5\sigma + \gamma_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

上式の係数 $\gamma_1 \sim \gamma_6$ は、付録に与えられている。座屈応力は、式 (24) で W_1 および W_2 の係数マトリックスの行列式がゼロとなる条件を考え、下式で計算出来る。

$$\sigma_{cr} = (q - \sqrt{q^2 - 4pr}) / 2p \quad (25)$$

ここに

$$p = \gamma_1\gamma_5 - \gamma_3^2$$

$$q = \gamma_1\gamma_6 + \gamma_2\gamma_5 - 2\gamma_3\gamma_4$$

$$r = \gamma_2\gamma_6 - \gamma_4^2$$

上式で得られる σ_{cr} を式 (3) で用いることになる。本来は、弾性たわみ解析も式 (18) のたわみを用いて行うべきである。しかしながら、式が複雑となることが予想され、また、後出の解析結果によると、座屈後の挙動は式 (2) のたわみ波形および式 (25) の座屈応力を用いた解析で精度良く追跡出来ている。そこで、本論文ではこの取り扱いに従うこととした。

3. 板の簡易力学モデルを組み込んだ梁柱要素

3.1 要素特性

連続防撓パネルが面内圧縮荷重を受ける場合、Fig. 2 に示すような座屈変形が生じることになる。通常は、変形モードの対称性を考慮して Fig. 2 の網掛け部を取り出し、ひとつの防撓板要素とする。この要素を、Fig. 3(a) に示すようにいくつかの梁柱有限要素に分割する。本章では、この梁柱要素について説明する。

個々の有限要素は、防撓材とその両側にあるパネルよりなる。防撓材部分については、Fig. 3(b) に示すように軸力、2 方向の曲げモーメントと剪断力、および剪断中心軸回りの振りモーメントのそれぞれに対応する、1 節点当たり合計 6 つの自由度を有するアイソパラメトリック梁柱要素を用いる。剛性マトリックスの導出に当たっては薄肉断面を仮定し、材料非線形性および幾何学的非線形性の両非線形性を考慮する。応力判定および数値積分のために、Fig. 4 に示すように断面を板厚方向に 5 層、幅方向にも適宜分割する。また、大変形を対象とするので、応力増分の Jaumann 変換¹⁶⁾を行う。

一方、本要素は連続パネルの一部であるので、板部分については y 方向の変位と板面内の回転はないと考える。したがって、板部分は要素の中のひとつの繊維として、軸剛性および y 軸回りの曲げ剛性と z 方向の剪断剛性にのみ寄与することになる。この部分は、2 章で導かれた簡易力学モデルで求められる平均応力～平均ひずみ関係に従って挙動するものとする。

さらに、板部分は防撓材の捩れ変形に対して抵抗する。この影響は、圧縮荷重のもとで防撓材が捩れ変形する場合にパネルが Fig. 2 に示すように変形すると仮定し、次式の

Fig. 2 Continuous stiffened plating

(a) Stiffened plate element

(b) Forces and moments acting on stiffener cross section

Fig. 3 Characteristics of stiffened plate element

Fig. 4 Fibres in beam-column element

剛性を持つ回転バネを防撓材とパネルの接合線位置の節点に導入する。

$$k_p = \frac{Et^3}{3b} \cdot \frac{l}{2} \quad (26)$$

上式の l は有限要素の長さを表す。

防撓材と板を併せた梁柱要素の節点は、両者の接合線上（パネルの板厚中心位置）に置く。

3.2 力学モデルの梁柱要素への組み込み

つぎに、2章で導いた板の簡易力学モデルの梁柱要素への組み込みについて説明する。梁柱要素は、Fig. 4 に示すような断面を有する。節点は、防撓材と板の接合線上に設けられている。

板部分は、前述のように y 軸まわりの曲げ剛性、 z 方向の剪断剛性および軸剛性にのみ寄与するものとする。これは、板部分は y 方向に連続なパネルの一部であり、 y 方向の変位が拘束されているためである。

この板の部分については、次式の応力～ひずみ関係を仮定する。すなわち、

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xz} \end{Bmatrix} = E' \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa(1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_x \\ \Delta\epsilon_y \\ \Delta\epsilon_z \\ \Delta\epsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

ここに、 $E' = E/(1+\nu)(1-2\nu)$ 、また、 κ は有効せん断係数であり、等方材料に対しては $5/6$ の値を仮定する。

通常の弾塑性解析であれば、応力増分とひずみ増分を関係付ける式 (27) のマトリックスが、塑性状態になると変化することになる。しかしながら、本モデルでは、降伏や座屈の影響でヤング率に相当する E' が変化するとし、応力～ひずみ関係はあくまでも式 (27) で与えられるとする。 E' は、2.2 節で述べた方法で導かれる平均応力～平均ひずみ線図の傾きとして求められ、座屈および降伏の影響は E' の項で考慮されることになる。

結局、板部分については常に式 (27) の応力～ひずみ関係を用いることになるが、これ以外に関しては、Kirchhoff 応力増分から Jaumann 応力増分への変換も含めて、防撓材部分と同様の取り扱いとなる。すなわち、板部分は梁柱有限要素の 1 繊維であり、2.2 節で示した方法に従って求められる応力～ひずみ線図の傾きで E' が与えられる弾性繊維であるとする。

3.3 梁柱要素を用いる解析の手順

解析に当たっては、まず、除荷を考慮しない形で板部分の平均応力～平均ひずみ関係を求め、板部分については材料の応力～ひずみ関係がこの平均応力～平均ひずみ関係で表される 1 軸応力状態であるとする。

つぎに、計算の過程で板部分に除荷が発生した場合には、その時点で除荷経路を計算し、新しい平均応力～平均ひずみ関係を作成し直す。以後、板はこの新しい関係に従って挙動するものとする。

4. 解析例および考察

4.1 板の簡易力学モデルの検証

ここで、繰返し荷重を受ける板の座屈・塑性崩壊挙動を、2.2 節で導いた板の力学モデルを適用して再現する。

Fig. 5 の点線 $BAF0GD$ が、初期状態から荷重した時の板の平均応力～平均ひずみ関係を表す。 $F0G$ 間は弾性であるので、この間で除荷が発生する場合には応力～ひずみ関係を作成し直す必要はない。

一方、圧縮側から荷重が始まり、図中の点 A のところで除荷が生じたとする。この場合、除荷発生後に引き続き引張側に荷重されると、2.2 節で示した方法に従って、図の実線 $AECD$ の関係が得られる。

一方、平均応力がゼロになる前に再び圧縮側に荷重されると、平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係は再び点 A まで戻り、以後は経路 AB を辿ることになる。

従って、点 A で除荷が発生した後の平均応力～平均ひずみ関係は、Fig. 5 の経路 $BAECD$ で表されることになる。この場合、 AE 間は弾性挙動であるので、この間で除荷が発生しても新しく平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係を作成し直す必要はない。

引張荷重から始まって引張域で除荷が発生する場合にも、本力学モデルに従い同様の手順で、新しい平均応力～平均ひずみ関係を作成出来る。

このように平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係を作成し直しながら、繰返し荷重下での挙動を追跡した結果を、Fig. 6 (a) および (b) に実線で示す。

Fig. 5 Reproduction of average stress-average strain relationship of plate after unloading

の例でも、まず圧縮側での負荷から始まり、点1で除荷する。この段階で新しく平均応力～たわみ関係と平均応力～平均ひずみ関係を作成し直している。除荷を点2で止め、再び圧縮側に負荷する。この場合、点2は弾性域であるので、新しい関係は作らない。したがって、点1での除荷発生時に作成した関係に従って点1まで戻り、点3に進む。

点3で再び除荷すると、新しい関係が作成される。これに従い、引張域の点4まで進む。点4で除荷、点5で再び引張負荷、点6で除荷している。この間、点4および点6で新しく平均応力～たわみ関係および平均応力～平均ひずみ関係が作成されている。点6で作成された関係に従い点7まで、引張域での除荷後圧縮域で負荷している。

一方、図中の破線は、有限要素法解析の結果を表す。有限要素法解析では除荷および再負荷開始時の平均ひずみを簡易モデルを用いた解析と合わせているので、たわみの方に少しずれが見られる。しかしながら、両解析結果は繰り返し負荷の全経路に渡って良い相関を示しており、本モデルを適用すると、負荷と除荷が複雑に繰り返される場合の板の挙動も、精度良く追跡出来ることが分かる。

4.2 パネルの座屈強度に対する防撓材の影響の検証

前章で提案した防撓材間のパネルの座屈強度の算定法の妥当性を確認するために、商用コード FINAS を用い、固有値解析を実施した。解析に当たっては、Fig. 2 に示すように連続防撓パネルの一部を取り出し、パネル部分を 30×10 要素に分割した。防撓材部分についても板要素を用い、flat-bar および angle-bar と tee-bar のウェブでは 30×5 要素、angle-bar のフランジは 30×6 要素、tee-bar のフラン

ジは 30×6 要素の分割とした。防撓材間のパネルは $a \times b \times t = 2,400 \times 800 \times 10$ mm の寸法を有するとし、防撓材寸法は市販の型钢を基準として変化させた。

固有値解析の結果をまとめて、Table 1 に示す。表中の σ_1/σ_0 は防撓材の効果によるパネルの局部座屈強度変化率を表しており、ここで想定した angle-bar および tee-bar 防撓材の場合、座屈強度は約 40 %～60 % 上昇することが分かる。また、flat-bar 防撓材の場合も、高さが高く板厚が薄いと座屈強度が低下するが、板厚が厚いと座屈強度は上昇し、パネル板厚の 2 倍程度の板厚で angle-bar や tee-bar と同程度に座屈強度が上昇する。

一方、表の σ_2/σ_1 は、2.3 節で提案した方法で簡易計算された座屈強度と有限要素法解析の結果の比を表している。いずれのケースも、簡易計算の結果は非常に精度が高く、有限要素法解析の結果を基準とした誤差は、angle-bar の場合最大 4.39 %、tee-bar の場合最大 3.55 % である。100×10 の flat-bar で誤差が 8.56 % となっているが、これは、簡易計算では想定されていない柱としての Euler 座屈が発生したためで、このケースを除く flat-bar の座屈強度の誤差は最大 1.3 % である。

以上の結果より、2.3 節で提案した方法によって防撓材の影響を考慮したパネルの局部座屈強度が精度良く計算出来ることがわかる。

なお、上記 flat-bar の一例を除いていずれの場合も、防撓材のウェブに板としてのたわみが生じる座屈モードとなっている。本論文で提案している梁柱要素では、このような挙動は考慮されていない。したがって、このことが本要

(a) Average stress-deflection relationship

(b) Average stress-average strain relationship

Fig. 6 Comparison of predicted behaviour of plate by simple model and FEM

Table 1 Comparison of buckling strength by approximate method and FEM

Type	h	t_w	b_f	t_w	σ_1/σ_0	σ_2/σ_1	Type	h	t_w	b_f	t_f	σ_1/σ_0	σ_2/σ_1
flat	100.0	10.0	0.0	0.0	0.9850	1.0856	tee	250.0	12.0	90.0	16.0	1.5388	1.0104
flat	100.0	15.0	0.0	0.0	1.1479	0.9893	angle	250.0	12.0	120.0	16.0	1.5537	1.0148
flat	100.0	20.0	0.0	0.0	1.4345	0.9908	angle	250.0	12.0	150.0	16.0	1.5597	1.0214
flat	195.0	10.0	0.0	0.0	1.0900	0.9880	angle	400.0	12.0	90.0	16.0	1.4461	1.0214
flat	195.0	15.0	0.0	0.0	1.3183	0.9886	angle	400.0	12.0	150.0	16.0	1.4580	1.0403
flat	195.0	20.0	0.0	0.0	1.5835	0.9870	tee	150.0	12.0	90.0	12.0	1.5912	0.9848
flat	310.0	10.0	0.0	0.0	0.9965	0.9920	tee	150.0	12.0	150.0	12.0	1.5904	1.0167
flat	310.0	15.0	0.0	0.0	1.3066	0.9922	tee	250.0	12.0	90.0	16.0	1.5118	0.9965
flat	310.0	20.0	0.0	0.0	1.6300	0.9926	tee	250.0	12.0	150.0	16.0	1.5578	1.0129
flat	400.0	10.0	0.0	0.0	0.8297	1.0071	tee	400.0	12.0	90.0	12.0	1.4229	1.0015
flat	400.0	20.0	0.0	0.0	1.6194	1.0006	tee	400.0	12.0	120.0	12.0	1.4387	1.0068
angle	150.0	12.0	90.0	12.0	1.5763	1.0197	tee	400.0	12.0	90.0	16.0	1.4506	1.0247
angle	150.0	12.0	150.0	12.0	1.5906	1.0439	tee	400.0	12.0	150.0	16.0	1.4581	1.0355
angle	250.0	12.0	90.0	16.0	1.5388	1.0104	tee	400.0	12.0	150.0	12.0	1.4458	1.0111

σ_0 : local buckling strength of panel

σ_1 : buckling strength by FEM

σ_2 : buckling strength by proposed method

panel: $a \times b \times t = 2,400 \times 800 \times 10 \text{ mm}$

h, t_w, b_f, t_f : in mm

素を用いた計算の精度に影響を及ぼすことも考えられるが、これについては次節で考察を加える。

4.3 防撓板要素の座屈・塑性崩壊挙動解析の検証

最後に、板モデルを組み込んだ梁柱要素を用いた解析を実施して、防撓板要素の平均応力～平均ひずみ関係を求めた。解析に当たっては、Fig. 2 に示す網掛け部を 10 個の梁柱要素に分割した。解析対象の寸法を Table 2 に示す。これらの防撓板に対しては、前述の固有値解析と同様の要素分割を行い、文献 11) で計算コード ULSAS を用いて有限要素法による弾塑性大たわみ解析が実施されている。ここでは、両解析により得られた結果を比較し、梁柱要素の妥当性について考察を加える。

flat-bar および angle-bar 付き防撓板の平均圧縮応力～平均圧縮ひずみ関係を、Fig. 7 および Fig. 8 に示す。図中の実線は本論文で提案した梁柱要素を用いた解析、破線は文献 11) の有限要素法解析の結果を表す。

初めに、Fig. 7 に示す flat-bar 防撓材の場合について考察する。まず、平均応力～平均ひずみ線図上のナックル点は、パネルに局部座屈が発生した時点を表す。いずれの防撓材寸法の場合も、局部座屈の発生点は梁柱要素を用いた解析で精度良く得られている。しかしながら、その後の軸剛性は有限要素法解析の結果と比較して高くなっている。これは flat-bar の場合、パネルの局部座屈に引張られて防

撓材にも板としてのたわみ変形が生じるためである。この影響による剛性の低下は、防撓材の深さ/板厚比が最も大きい F2 で最も顕著に現れている。局部座屈発生による防撓材の軸剛性低下の影響は、梁柱要素で現時点では考慮されていない。

Fig. 7 に F1 の結果は示されていないが、崩壊挙動は F2 と同じ傾向である。ただし、両解析による最終強度の差はより小さい。一方、Fig. 7(a) および (b) に示す F2 と F3 ではかなり最終強度に差が見られる。この原因のひとつは、板モデルにある。すなわち、板の座屈強度に対する防撓材の影響は十分に考慮されているが、現在のモデルでは初期降伏強度および最終強度にこの影響は考慮されていない。これを考慮するためには板の端部に沿って作用する拘束曲げモーメントの影響を、弾性大たわみ解析および剛塑性機構解析で考慮する必要がある。これについては、今後検討する。

いまひとつの原因は、パネルに発生した 2 次座屈にある。すなわち、座屈モードである荷重方向 3 半波のたわみが成長し続け、その状態でパネルが本来の最終強度に達する前に 2 次座屈が発生し、パネルの耐力が最大値を示して防撓板としての最終強度に達している。ここで対象としているパネルのアスペクト比は $a/b=3.0$ であり、座屈は荷重方向 3 半波モードとなる。この場合、2 次座屈の発生により荷

Table 2 Dimension of stiffeners for analysis

No.	type	h (mm)	t_w (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)
F1	flat	195.0	10.0	0.0	0.0
F2	flat	322.0	10.0	0.0	0.0
F3	flat	395.0	20.0	0.0	0.0
F4	flat	156.0	19.5	0.0	0.0
A1	angle	150.0	12.0	90.0	12.0
A2	angle	250.0	12.0	90.0	16.0
A3	angle	400.0	11.5	100.0	16.0
T1	tee	150.0	12.0	90.0	12.0
T2	tee	250.0	12.0	90.0	16.0
T3	tee	400.0	11.5	100.0	16.0

panel: $2,400 \times 800 \times 10$ mm

重方向 5 半波のたわみ成分が急速に成長する¹⁷⁾。2 次座屈の影響も、現時点での簡易力学モデルでは考慮されていない。

Fig. 7(c) に示す F4 では、両解析結果はパネルの局部座屈発生から崩壊の全過程に渡って、非常に良い一致を示している。これは、F4 では防撓材の深さ/板厚比が小さくて防撓材に生じる板としてのたわみ変形が小さく、また、このケースではパネルに 2 次座屈が発生しないためである。

つぎに、Fig. 8 に示す angle-bar 防撓材では、パネルの座屈強度、座屈後の軸剛性とも、梁柱要素を用いた解析で精度良く計算されている。これは、flat-bar の場合自由辺であったところに angle-bar ではフランジが取り付けられているので、ウェブの板としての変形が拘束され、防撓材全

体としては軸剛性の低下がほとんど無いためである。しかしながら、いずれのケースでも有限要素法による最終強度が低くなっている。これは、F1～F3 の場合と同様にパネルの 2 次座屈およびパネルと防撓材の間の発生するモーメントの影響を梁柱要素を用いた解析では無視したことによる。

最後に、解析結果は示さないが tee-bar 防撓材付き防撓パネルの場合も、パネルの局部座屈発生点およびその後の軸剛性は angle-bar の場合と同様に、非常に精度良く計算出来ている。T1 の場合には、パネルがほぼ最終強度に達した時点で 2 次座屈が発生したために、両解析による最終強度の差は比較的小さかった。一方、T2 と T3 では、パネル本来の最終強度に達する前に 2 次座屈が発生し、防撓板全体の最終強度に達した。そのために、2 次座屈の影響を考慮していない梁柱要素を用いた解析では、最終強度が高めとなった。

結局、本論文で提案した板の簡易力学モデルおよび梁柱要素は、基本的には妥当な結果を与ええると言える。しかしながら、今後以下の項目について改良を加える必要がある。

- (1) 板の簡易力学モデルに 2 次座屈の影響を導入する。
- (2) パネルに局部座屈が発生した後に、防撓材からパネルに作用する曲げモーメントの影響を、板モデルで考慮する。
- (3) 逆にパネルから防撓材に作用する曲げモーメントを算定し、その影響を防撓材部で考慮する。
- (4) パネルの座屈後に発生する flat-bar 防撓材の軸剛性の低下を梁柱要素に導入する。

Fig. 7 Comparison of average stress-average strain relationships of stiffened plate calculated by beam-column and plate FEM analyses (flat-bar)

Fig. 8 Comparison of average stress-average strain relationships of stiffened plate calculated by beam-column and plate FEM analyses (angle-bar)

5. ま と め

本研究では、連続防撓パネルの座屈・塑性崩壊挙動の簡易解析に用いる板モデルの開発を試みた。本モデルは、以下の特徴を有する。

(1) 弾性域での挙動は、単純なたわみ波形を仮定した弾性大たわみ解析解に従って追跡する。

(2) 降伏領域が十分に広がった後の挙動は、塑性関節線を仮定した剛塑性機構解析解に基づいて追跡する。

(3) 圧縮域および引張域での除荷過程の挙動の追跡には、弾性大たわみ解析を実施する。

(4) 圧縮域での初期降伏から最終強度を越えて少し変形が進んだ領域までは、弾性大たわみ解析解および剛塑性機構解析解を基に、たわみを近似的に求める。

(5) 圧縮域で除荷した後の引張域での負荷過程では、弾性大たわみ解析解に基づいてたわみを近似的に求める。

(6) パネルの弾性座屈強度の算定に当たっては、パネルの両側に取り付けられている防撓材の影響が精度良く導入されている。

本モデルを適用すると、除荷および負荷を繰り返す複雑な荷重履歴のもとでのパネルの平均応力～平均ひずみ関係を、精度良く求めることが出来る。

さらに、本力学モデルを組み込んだ梁柱要素を開発した。本要素は、以下の特徴を有する。

(1) 本要素は防撓材および防撓材間のパネルより成る。

(2) 防撓材部分には、軸力、2方向の剪断力と曲げモーメントおよび軸回りの振りモーメントを受け持つアイソ

パラメトリック梁柱要素を用いる。

(3) パネル部分もこの梁柱要素の1繊維と見なすが、この部分は上記の簡易力学モデルに従って挙動するものとする。

(4) パネル部分は、本要素が連続防撓パネルの一部であることを考慮し、軸力および板面に垂直方向の剪断力とこれに対応する曲げモーメントのみを受け持つとする。

新しく提案された板の簡易力学モデルおよび梁柱要素を用いた一連の解析を行い、解析結果を通常の有限要素法を適用した弾塑性大たわみ解析の結果と比較し、モデルおよび要素の妥当性について考察を加えた。その結果、新しい簡易力学モデルおよび梁柱要素は基本的には妥当なものであることが確認されたが、今後改良すべき点も明らかになった。(4.3節参照) これらについては、引き続き検討を進めたい。

なお、本研究の一部は川端康二君と久間康充君（現：広島大学大学院）の卒業研究¹⁸⁾として行われたもので、両君の労に感謝します。また、川端君には本論文の図面作成でお世話になった。さらに、有限要素法による固有値解析では、水谷圭介君（現：広島大学大学院）の援助を受けており、その労にも感謝します。

参 考 文 献

- 1) 鴨井紀之, 谷口友一, 海野誠, 浜崎正人, 吉川孝男, 梅本勝弥: “新型スロットを有するフロア構造の弾塑性大変形挙動に関する研究 (圧縮応力場の挙動評価)”, 日本造船学会論文集, 第175号 (1994), pp. 375-383.
- 2) 鴨井紀之, 谷口友一, 海野誠, 本井達哉, 浜崎正人,

- 吉川孝男, 梅本勝弥: “複合荷重場における新型スロットを有するフロア構造の弾塑性大変形挙動評価”, 関西造船協会誌, 第 222 号 (1994), pp. 173-181.
- 3) Ueda, Y. and Rashed, S. M. H.: “The Idealized Structural Unit Method and Its Application to Deep Girder Structures”, Computers and Structures, Vol. 18 (1984), pp. 227-293.
- 4) Ueda, Y., Rashed, S. M. H. and Abdel-Nasser, Y.: “An Improved ISUM Rectangular Plate Element-Taking account of Post-Ultimate Strength Behavior-”, J. Soc. Naval Arch. of Japan, Vol. 171 (1992), pp. 329-341.
- 5) 上田幸雄, 正岡孝治: “固有関数を用いた薄板構造物の弾塑性解析法第 1 報圧縮と剪断を受ける矩形板要素”, 日本造船学会論文集, 第 174 号 (1993), pp. 439-445.
- 6) Bai, Y., Bendiksen, E. and Terndrup Pedersen, P.: “Collapse Analysis of Ship Hulls”, Marine Structures, Vol. 6, (1993), pp. 485-507.
- 7) Ueda, Y. and Rashed, S. M. H.: “Advances in the Application of ISUM to Marine Structures”, Proc. Int. Conf. on Advances in Marine Structures-2, ARE, Dunfirmline, U. K. (1991), pp. 628-649.
- 8) Paik, J. K., Kim, D. H., Bong, H. S., Kim, M. S. and Han, S. K.: “Deterministic and Probabilistic Safety Evaluation for a New Double-Hull Tanker with Transverseless System”, Trans. SNAME, Vol. 100 (1992), pp. 173-198.
- 9) Smith, C. S.: “Influence of Local Compressive Failure on Ultimate Longitudinal Strength of a Ship's Hull”, Proc. PRADS, Tokyo, Japan (1977), pp. 73-79.
- 10) Smith, C. S.: “Structural Redundancy and Damage Tolerance in Relation to Ultimate Ship Hull Strength”, Presented at Int. Symp. on The Role of design, Inspection and Redundancy in Marine Structural Reliability, Williamsburg, U. S. A. (1983).
- 11) 矢尾哲也, 藤久保昌彦, 柳原大輔, 大野禎久: “防撓パネルの圧壊挙動に関する研究 (第 1 報)”, 日本造船学会論文集, 第 178 号 (1995), (投稿中)。
- 12) Yao, T. and Nikolov, P. I.: “Buckling/Plastic Collapse of Plates under Cyclic Loading”, 日本造船学会論文集, 第 168 号 (1990), pp. 449-462.
- 13) Yao, T. and Nikolov, P. I.: “Numerical Experiments on Buckling/Plastic Collapse Behaviour of Plates under Cyclic Loading”, Stability and Ductility of Steel Structures, Fukumoto, Y. & Lee, G. (Eds.), Boca Raton, CRC (1992), pp. 203-214.
- 14) Yao, T., Fujikubo, M. and Nie, C.: “Buckling/Plastic Behaviour of Plates under Inplane Cyclic Loading”, Structural Dynamics-EURODYN '93, Moan, T. et. al. (Eds.), Balkema, Rotterdam (1993), pp. 787-794.
- 15) 岡田博雄, 大嶋耕一, 福本佳夫: “水圧を受ける細

長平板の圧縮強度”, 日本造船学会論文集, 第 146 号 (1979), pp. 101-114.

- 16) 都井裕, 弓削康平, 川井忠彦: “構造要素の衝突圧壊強度に関する研究 (第 1 報) -有限要素法による超大変形解析-”, 日本造船学会論文集, 第 159 号 (1986), pp. 248-257.
- 17) 矢尾哲也, 藤久保昌彦, 高在用, 山本元道: “2 次座屈が板の座屈・塑性崩壊挙動に及ぼす影響に関する研究”, 日本造船学会論文集, 第 177 号 (1995), pp. 347-355.
- 18) 川端康二, 久間康充: 縦曲げ荷重下の船体横断面の逐次崩壊挙動解析に関する研究, 広島大学工学部卒業論文 (1995)。

付録：座屈応力計算式の係数

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \beta_1 + K_1^2 \beta_4 \\
 \gamma_2 &= \alpha_1 + K_1^2 \alpha_4 \\
 \gamma_3 &= (\beta_2 + 2K_1 K_2 \beta_4 + K_1 K_3 \beta_5) / 2 \\
 \gamma_4 &= (\alpha_2 + 2K_1 K_2 \alpha_4 + K_1 K_3 \alpha_5) / 2 \\
 \gamma_5 &= \beta_3 + K_2^2 \beta_4 + K_2 K_3 \beta_5 + K_3^2 \beta_6 \\
 \gamma_6 &= \alpha_3 + K_2^2 \alpha_4 + K_2 K_3 \alpha_5 + K_3^2 \alpha_6 \\
 \alpha_1 &= \frac{\pi^4 E b t^3}{96(1-\nu^2)} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \\
 \alpha_2 &= \frac{2\pi E b t^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \\
 \alpha_3 &= \frac{E b t^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{m^4 \pi^4}{30 a^4} + \frac{2m^2 \pi^2}{3 a^2 b^2} + \frac{4}{b^4} \right) \\
 \alpha_4 &= \frac{E h t_w^3}{48(1-\nu^2)} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{3 a^2} + \frac{2(1-\nu)}{h^2} \right) \\
 &\quad + \frac{m^4 \pi^4 E I_f}{4 a^4} + \frac{m^2 \pi^2 G J_f}{4 a^2 h^2} \\
 \alpha_5 &= \frac{E h t_w^3}{48(1-\nu^2)} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \left\{ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(1 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4 - \nu(\pi + 2)}{h^2} \right\} + \frac{m^4 \pi^4 E I_f}{2 a^4} + \frac{m^2 \pi^3 G J_f}{a^2 h^2} \\
 \alpha_6 &= \frac{E h t_w^3}{96(1-\nu^2)} \left\{ \left(3 - \frac{8}{\pi} \right) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \left(\frac{\pi}{2} - 2\nu \right) \frac{m^2 \pi^3}{a^2 h^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\pi^4}{16 h^4} \right\} + \frac{m^4 \pi^4 E I_f}{4 a^4} + \frac{m^2 \pi^4 G J_f}{16 a^2 h^2} \\
 \beta_1 &= \frac{m^2 \pi^2 b t}{8 a^2}, \beta_2 = \frac{8 m^2 b t}{\pi a^2}, \beta_3 = \frac{2 m^2 \pi^2 b t}{15 a^2} \\
 \beta_4 &= \frac{m^2 \pi^2}{4 a^2} \left(\frac{h t_w}{3} + b_f t_f \right) \\
 \beta_5 &= \frac{m^2 \pi^2}{4 a^2} \left\{ h t_w \left(1 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi^2} \right) + 2 b_f t_f \right\} \\
 \beta_6 &= \frac{m^2 \pi^2}{4 a^2} \left\{ h t_w \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + b_f t_f \right\} \\
 K_1 &= \frac{\pi h}{b}, K_2 = \frac{4 h}{b}, K_3 = \frac{64}{\pi^2} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \left(\frac{t}{t_w} \right)^3 \\
 \text{flat-bar} &: I_f = J_f = 0 \\
 \text{angle-bar} &: I_f = b_f^3 t_f / 3, J_f = b_f t_f^3 / 3 \\
 \text{tee-bar} &: I_f = b_f^3 t_f / 12, J_f = b_f t_f^3 / 3
 \end{aligned}$$