ソースを用いた新しい有限要素の開発

(第2報：板曲げ要素)

正員 根 木 勲* 正員 多 田 剛**

Development of New Finite Element by Source Method
(2nd Report : Plate Bending Element)

by Isao Neki, *Member* Tsuyoshi Tada, *Member*

Summary

In the previous paper, we had shown the methodology of FES, Finite Element by Source method, developed by the authors and its advantages by some examples for static elastic structural problem using 2 D plane stress FES and 3 D solid FES.

This paper describes a fundamental formulation and some examples about new finite element by source method for plate bending problems. As well as the FES for static elastic problems written in the previous paper, we can perform numerical analysis with further less mesh and we can obtain more accurate results than the traditional Finite Element Method. Especially, in plate bending problems, semi-theoretical method FES has advantages because the number of derivative is large with regard to its differential equation.

1. 結 言

前報¹⁾で、著者らはソースを用いた新しい有限要素の基礎原理と、本手法により非常に少ない節点数および要素数でモデル化でき、既存のFEMをしのぐ計算精度が得られることを、静弾性問題における2次元平面応力要素および3次元ソリッド要素への適用例をもって示した。

今回は、薄板の曲げ問題を取り上げる。現在までに板曲げ問題に対する有限要素としてさまざまな種類のものが開発され実際の解析に適用されているが、その精度がそれほど良くないのは広く知られている事実である。

一方、板曲げ問題に対する有限要素法以外のアプローチとして、境界要素法の適用例である仮想境界法²⁾や、仮想電荷法(CSM)³⁾などが考案され、既存の有限要素法よりも比較的少ないデータ数で高精度の計算結果が得られることが示されている。板曲げ問題では支配方程式の微分の階数が大きいいため、特に半解析的な手法であるCSMは、内挿関数

を使用する既存のFEMよりも有利であると考えられる。しかしながら、両手法ともに解くべき方程式の係数行列のすべての要素が非零であるという欠点がある。このことにより、船舶などの大規模問題に対しての適用は、膨大なメモリーや計算時間が必要となり、事実上不可能である。

本報では、上記に述べた欠点を補う一手段として、筆者らによって開発された板曲げ問題に対する新しい有限要素を示す。本要素の定式化は仮想境界法やCSMでの定式化を参考にしたが、両手法にて欠落していた板のねじりに関するソースを考慮に入れたことは筆者ら独自のものであり、このソースの追加によって有限要素としてまとめることができた。本有限要素を用いれば、少ない節点数および要素数で既存の有限要素をはるかにしのぐ非常に良好な計算精度が得られる。以下では、本手法の定式化といくつかの適用例をもって、筆者らが開発した新しい有限要素の有用性を示す。

2. 板曲げ問題に対する新しい有限要素の定式化

板面に垂直に分布荷重 $p(x, y)$ が作用している板厚 t の点 $P(x, y)$ における平板のたわみ w は、以下の2次元重調和方程式を満たす。

* IHI 技術本部

** IHI 船舶海洋事業本部

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (1)$$

ここで、 D は板の剛性であり、板材のヤング率を E 、ポアソン比を ν とした場合、以下になる。

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

点 $Q(\xi, \eta)$ における板面に垂直な集中荷重、 x 軸回りの集中モーメント、 y 軸回りの集中モーメントに対する式(1)の基本解^{3,4)} は、次式で与えられる。

$$G_2 = \frac{1}{8\pi} r^2 (\log r - 1) \quad (2)$$

$$G_{mx} = -\frac{1}{8\pi} r (2 \log r - 1) \sin \beta \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \bar{y} (2 \log r - 1) \quad (4)$$

$$G_{my} = \frac{1}{8\pi} r (2 \log r - 1) \cos \beta \quad (5)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \bar{x} (2 \log r - 1) \quad (6)$$

ただし、

$$r = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2}, \quad \bar{x} = (x - \xi_i), \quad \bar{y} = (y - \eta_i)$$

であり、 β は直線 PQ と x 軸とのなす角である。

Fig. 1 に示すように、領域の境界上に節点、領域外にそれと同数のソースを配置する。ソース $Q_k(\xi_i, \eta_i)$ における z 方向の集中荷重、 x 軸まわりの集中モーメント、 y 軸まわりの集中モーメントをそれぞれ V_{nk}^* , T_{xk}^* , T_{yk}^* とし、ソース全体による節点 $P_j(x, y)$ におけるたわみを、次式のような線形重ね合わせによる近似式として与える。

$$\begin{aligned} w_{jk}(x, y) = & S_{2j}(x, y) + \sum_{k=1}^N V_{nk}^* \cdot G_{2jk}(x, y, \xi_i, \eta_i) \\ & + \sum_{k=1}^N T_{xk}^* \cdot G_{mxjk}(x, y, \xi_i, \eta_i) \\ & + \sum_{k=1}^N T_{yk}^* \cdot G_{myjk}(x, y, \xi_i, \eta_i) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 S_{2j} は式(1)の特解で、 p が一定の場合は次式となる³⁾。

$$S_{2j} = \frac{p}{64D} (x^2 + y^2)^2 \quad (8)$$

また、 x 軸方向、 y 軸方向に沿った線形荷重の時は、それぞれ次式となる³⁾。

$$S_{2Lx} = \frac{p_{0x}}{120D} x^5, \quad S_{2Ly} = \frac{p_{0y}}{120D} y^5 \quad (9)$$

P_j 点における x 軸、 y 軸まわりの回転は

$$\theta_{xjk} = \frac{\partial w_{jk}}{\partial y}, \quad \theta_{yjk} = -\frac{\partial w_{jk}}{\partial x} \quad (10)$$

で与えられるから、式(7)および式(10)は、 z 軸方向のたわみ、および x 軸、 y 軸まわりの回転を成分に持つ小ベクトルおよび小マトリックスの集合として、次式のようにまとめることができる。

$$H \cdot Q = \delta - S_2 \quad (11)$$

ここで、

$$Q^T = [q_1^T \quad q_2^T \quad \cdots \quad q_N^T] \quad (12)$$

$$\delta^T = [d_1^T \quad d_2^T \quad \cdots \quad d_N^T] \quad (13)$$

$$S_2^T = [s_{21}^T \quad s_{22}^T \quad \cdots \quad s_{2N}^T] \quad (14)$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \quad (15)$$

であり、各成分は以下の通りである。

$$q_k^T = [V_{nk}^* \quad M_{xk}^* \quad M_{yk}^*] \quad (16)$$

$$d_j^T = [w_{jk} \quad \theta_{xjk} \quad \theta_{yjk}] \quad (17)$$

$$s_{2j}^T = \left[s_{2j} \quad \frac{\partial s_{2j}}{\partial y} \quad -\frac{\partial s_{2j}}{\partial x} \right] \quad (18)$$

$$h_{jk} = \begin{bmatrix} G_{2jk} & G_{mxjk} & G_{myjk} \\ \frac{\partial G_{2jk}}{\partial y} & \frac{\partial G_{mxjk}}{\partial y} & \frac{\partial G_{myjk}}{\partial y} \\ -\frac{\partial G_{2jk}}{\partial x} & -\frac{\partial G_{mxjk}}{\partial x} & -\frac{\partial G_{myjk}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

一方、節点 $P_j(x, y)$ におけるソース $Q_k(\xi, \eta)$ による垂直力、 x 軸まわりの曲げモーメント、および y 軸まわりの曲げモーメントは、たわみ w を使って次式のように書ける。

$$V_{nj} = \int Q_{nj} d\Gamma_j \quad (20)$$

$$T_{xj} = \int t_{xj} d\Gamma_j \quad (21)$$

$$T_{yj} = \int t_{yj} d\Gamma_j \quad (22)$$

ただし、 α は選点 P_j における境界 Γ の外向きの法線と x 軸とのなす角であり、

$$Q_{nj} = Q_{xjk} \cos \alpha + Q_{yjk} \sin \alpha$$

$$t_{xjk} = -M_{nj} \sin \alpha + M_{ntjk} \cos \alpha$$

$$t_{yjk} = M_{nj} \cos \alpha + M_{ntjk} \sin \alpha$$

$$M_{nj} = M_{xjk} \cos^2 \alpha + M_{yjk} \sin^2 \alpha$$

$$-2M_{xyjk} \sin \alpha \cos \alpha$$

Fig. 1 Distribution of nodes and sources

$$M_{ntjk} = M_{xyjk}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ + (M_{xjk} - M_{yjk}) \sin \alpha \cos \alpha$$

また,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

は, Fig. 2 で示されるように定義するものとする。

節点 P_j における節点外力ベクトル $\mathbf{P}_b$, すなわち z 軸方向の荷重 V_{nj} , x 軸まわりの集中曲げモーメント荷重 T_{xjk} , y 軸まわりの集中曲げモーメント荷重 T_{yjk} は, 力のつりあいから, 以下のように式(1)の特解である S_2 の成分を含む項と含まない項の和として表される。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P}_s = \mathbf{P}_b \quad (23)$$

ただし,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_s^T = [p_{s1} \quad p_{s2} \quad \cdots \quad p_{sN}] \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_b^T = [p_{b1} \quad p_{b2} \quad \cdots \quad p_{bN}] \quad (26)$$

であり, 各成分は以下に示す通りである。

$$g_{jk}^T = [V_{ngjk} \quad T_{xgjk} \quad T_{ygjk}] \quad (27)$$

$$p_{sj}^T = [V_{nsj} \quad T_{xsj} \quad T_{ysj}] \quad (28)$$

$$p_{bj}^T = [V_{nj} \quad T_{xj} \quad T_{yj}] \quad (29)$$

従って, 式(11)および式(23)より次式を得る。

$$\mathbf{GH}^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}_b + \mathbf{GH}^{-1} \mathbf{S}_2 - \mathbf{P}_s \quad (30)$$

さらに上式の $\mathbf{GH}^{-1}$ を $\mathbf{K}$, 右辺を $\mathbf{P}$ とおくと,

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{P} \quad (31)$$

を得る。ここで, $\mathbf{K}$ は板曲げ問題に対する新しい有限要素の剛性マトリックスであり, $\mathbf{P}$ は等価節点荷重である。既

Fig. 2 Definition of Bending, Twisting Moments and Shearing Forces

存の有限要素法と同様, 本要素の剛性マトリックスを重ね合わせて, 解析対象領域全体の平衡方程式を解けば, 各要素境界上の節点変位を得ることができる。

得られた節点変位 $\boldsymbol{\delta}$ を式(11)に代入すればソースの強さ $\mathbf{Q}$ がわかるので, これを用いて先に述べた基本解を重ね合わせることで, 要素内の任意の点での変位および応力を求めることができる。

なお, 仮想境界法²⁾および仮想電荷法 (CSM) の板曲げ問題への適用例³⁾では, 式(7)に対応するたわみを与える近似式として, 境界の節点上での法線方向のモーメントに対するソースのみを考慮し, 境界の節点上でのねじり方向のモーメントに対するソースを考慮していないため, 板のねじれを表す項 $\frac{\partial w^2}{\partial x \partial y}$ を正しく表現することができない。

この板のねじれに対する自由度の欠落は, これら旧手法の定式化に基づいて板曲げ問題に対する有限要素を作成しようとしても, 剛性マトリックス作成のための必要条件を満たさないことを意味する。

筆者らは, この欠点を補うため, 境界の節点上での法線方向のモーメントを, x 軸および y 軸回りのモーメントに分解した形の定式化を行なった。この定式化により, 板のねじれを表す項が正しく表現され, 有限要素の剛性マトリックスを作成するのに必要なすべての自由度が得られる。また, 板のねじれを表す項が正しく表現されたことにより, 後の適用例で示されるように, より少ない節点数で非常に高精度の計算結果が得られることがわかる。

3. 解析例

3.1 分布荷重を受ける矩形板

3.1.1 四辺を固定された矩形板の場合

1) 一様分布荷重の場合

Fig. 3 Uniformly Loaded Rectangular Plate with Built-in Edges

Fig. 3 に示すような辺の長さ $a=1200$ mm, 板厚 $t=10.0$ mm, ヤング率 21000 kgf/mm², ポアソン比 0.3 の一様分布荷重 $p=0.01$ kgf/mm² を受ける四辺を固定された矩形板について, $b/a=1.0$ および $b/a=1.5$ の場合の解析例を示す。

計算は x 軸及び y 軸上で対称な境界条件とした $1/4$ モデルで行なった。新しい有限要素 (以後 FES と略記する) での選点は $a/2, b/2$ の各々を n 等分した位置に設けた。ソースは全て一律に選点から垂直外向きに選点間の長さの 3.5 倍の位置に配置した。後に示す例題も全て同じく 3.5 倍とした。前報¹⁾ での 2 次元平面問題や 3 次元ソリッドの問題の場合のように角点のソースを遠くはなさなくても十分な精度が得られることがわかった。

解析結果の撓みおよび曲げモーメントを Table 1 に示す。この Table の上段に FES による計算結果を, 中段に文献⁴⁾ の級数解 (Table 中では以後 TIM と略記する) との比を, 下段に FEM の板曲げ要素のなかでも最も精度の良いもののひとつである Assumed Stress Hybrid 要素⁵⁾ による解析結果と文献⁴⁾ との比を併記した。FEM の場合 n は $1/4$ モデルを $n \times n$ の四辺形要素に分割したことを意味する。

Fig. 4 に $b/a=1.5, n=3$ の場合の撓み, 及び辺に垂直な曲げモーメント M_n の分布を示す。

これらの分布図は選点の値を直線で結んで示したものであるが, 解析時に求められたソースの値を用いてソースの

間の点を計算すれば, さらになめらかな分布図を得ることができる。なお, 後に示す例題も同様に, 選点間を直線で結んだ分布図で示している。

Table 1 から分かるように FES の結果と文献⁴⁾ とは良く一致しており $n=2$ でも両者の違いは 1% 程度であり, 実用上十分な精度であるといえる。

FEM の結果からは, この程度の分割数では十分な精度が得られないことが分かる。特に $b/a=1.5$ で $x=a/2, y=0$ での M_x の精度が悪く, この誤差を 1% 以内にするには 13×13 分割以上にする必要があった。FES に要する節点数はわずか 8 であるから FEM では 24.5 倍の節点数を必要とすることになる。このことから FES の優れていることが良く分かる。

Fig. 5 に要素数が 4 で $n=3$ の場合の撓みを示す。当然であるが $1/4$ モデルの一要素の場合と精度は撓み曲げモーメント共に同じであった。

2) 線形荷重の場合

scale 30.00000 mm

Fig. 5 Deflection in Uniformly Loaded Rectangular Plate (FES 4 Element Full Model)

Table 1 Deflection and Bending Moments in Uniformly Loaded Rectangular Plate with Built-in Edges

b/a	n		$(w)_{x=0,y=0}$	$(M_x)_{x=0,y=0}$	$(M_y)_{x=0,y=0}$	$(M_x)_{x=a,y=0}$	$(M_y)_{x=a,y=0}$
1.0	2	FES	13.76	-737.0	-737.0	330.2	330.2
		FES/TIM	1.013	0.998	0.998	0.993	0.993
		FEM/TIM	0.987	0.873	0.873	1.174	1.174
	3	FES	13.64	-737.8	-737.8	329.2	329.2
		FES/TIM	1.004	0.999	0.999	0.990	0.990
		FEM/TIM	1.006	0.921	0.921	1.029	1.029
1.5	2	FES	23.77	-825.2	-1099.8	524.8	282.0
		FES/TIM	1.003	1.005	1.008	0.990	0.965
		FEM/TIM	0.982	0.740	0.956	1.195	1.136
	3	FES	23.67	-823.8	-1081.5	529.5	291.3
		FES/TIM	0.999	1.004	0.992	0.999	0.996
		FEM/TIM	1.004	0.863	0.938	1.021	1.046

(a) Deflection (b) Bending Moments M_n

Fig. 4 Uniform Loaded Rectangular Plate with Built-in Edges

Fig. 6 Hydrostatic Loaded Rectangular Plate with Built-in Edges

上記の問題で荷重を Fig. 6 に示すような線形荷重 $p_0 = 0.01 \text{ kgf/mm}^2$ を受ける問題の解析例を示す。x 軸上で対称な境界条件とし、1/2 モデルで解析した。解析結果を Table 2 に示す。この Table の上段に FES による計算結果を、下段に文献 4) の級数解との比を示す。

この例題でも良好な結果がえられている。

3.1.2 四辺を支持された矩形板の場合

前項と同じ矩形板で四辺が支持された一様荷重及び線形荷重を受ける場合を解析する。Table 3 にその解析結果を示す。 $n=2$ の全てのケースで良好な結果が得られている。

3.1.3 三辺を固定され一辺を支持された矩形板の場合

3.1.1 と同じ矩形板で $x = -a/2$ で支持され他の三辺を固定された矩形板の $b/a=1.0$ と $b/a=2.0$ の場合の一様荷重と線形荷重について FES で計算した。文献 4) では $b/a=1.5$ の場合の計算がたまたまなされていないので、このケースのみ $b/a=2.0$ としている。

Table 2 Deflection and Bending Moments in Hydrostatic Loaded Rectangular Plate with Built-in Edges

b/a	n		$x=0, y=0$			$x=\frac{a}{2}, y=0$	$x=-\frac{a}{2}, y=0$	$x=0, y=\pm\frac{b}{2}$
			w	M_x	M_y	M_x	M_x	M_y
1.0	2	FES	6.853	165.5	164.5	-484.6	-262.6	-372.6
		FES/TIM	1.009	0.999	0.999	1.007	1.019	1.007
	3	FES	6.820	164.9	164.9	-480.6	-256.9	-369.2
		FES/TIM	1.004	0.996	0.996	0.999	0.997	0.998
	1.5	FES	11.89	265.4	146.8	-663.0	-410.6	-412.3
		FES/TIM	1.063	1.002	0.999	0.997	1.037	1.005
1.5	3	FES	11.84	264.8	145.7	-660.3	-419.8	-410.3
		FES/TIM	0.998	0.999	0.992	0.995	0.988	0.999

Table 3 Deflection and Bending Moments of Simply Supported Rectangular Plate under Hydrostatic Load

	b/a	n		$x=0, y=0$		
				w	M_x	M_y
Uniform Load	1.0	2	FES	43.78	689.8	689.8
			FES/TIM	0.998	0.999	0.999
	1.5	2	FES	83.40	710.5	1169.3
			FES/TIM	1.002	0.991	1.001
Hydrostatic Load	1.0	2	FES	21.92	345.2	344.8
			FES/TIM	1.001	1.003	1.002
	1.5	2	FES	41.67	584.4	358.6
			FES/TIM	1.001	1.000	1.001

Table 4 Deflection and Bending Moments in Rectangular Plates with One Edge Simply Supported and Three Edges Built-in

	b/a	m	n		$(w)_{x=0, y=0}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=\frac{b}{2}}$
Uniform Load	1.0	2		FES	16.93	-799.8	-867.1
				FES/TIM	1.003	1.008	1.002
	2.0	2		FES	48.41	-1658.0	-1129.7
				FES/TIM	1.000	1.003	0.998
	1.0	4	2	FES	7.93	-502.1	-412.7
				FES/TIM	0.994	1.005	0.999
Hydrostatic Load	2.0	4	2	FES	21.80	-878.9	-528.6
				FES/TIM	1.001	0.980	0.998

一様荷重の場合は 1/4 モデルとし、 $n=2$ とした。線形荷重の場合は x 軸上で対称な境界条件として、1/2 モデルで a 辺の分割数 $m=4$ 、 b 辺の分割数は $b/2$ を $n=2$ として解析した。

Table 4 に示すようにきわめて良好な結果となっている。

3.2 分布荷重を受ける三角形板

3.2.1 三辺を固定された一様荷重を受ける三角形板

Fig. 7 に示すような高さ $a=1000 \text{ mm}$ 、板厚 $t=10.0 \text{ mm}$ 、ヤング率 21000 kgf/mm^2 、ポアソン比 0.3 の一様分布荷重 $p=0.01 \text{ kgf/mm}^2$ を受ける三辺を固定された正三角形板についての解析例を示す。

解析モデルは Fig. 8(a) に示す y 軸上で対称な境界条件とした 1 要素からなる 1/2 モデルと Fig. 8(b) に示す 3 要素から成る全モデルの 2 通りを解析した。

1/2 モデルでは正三角形の辺の 1/2 の長さの底辺を n 分割、その他の辺を m 分割した点を選点とし、全モデルでは各辺を m 分割した点と各頂角を 2 等分角した線上で n 分割した点に選点を設けた。分割数は $m=6$ 、 $n=3$ と $m=12$ 、 $n=6$ の 2 ケースについて解析した。

文献 4) にこの問題を差分法で解いた結果があるが、あまり精度が良くないので、ここでは FEM の解析結果と比較する。FEM のモデルには前述の文献 5) の四辺形要素を用いて一辺を $m=60$ 分割した節点数 2791、要素数 2700 のモデルで計算した。FES の解析結果は分割数が $m=6$ 、 $n=3$ の場合と分割数が 2 倍の $m=12$ 、 $n=6$ の場合とは殆ど変わらないが FEM モデルでは分割数の少ない場合から徐々に変化して分割数が $m=60$ 位で解が収束した。

Fig. 8 に、 $m=12$ 、 $n=6$ の場合の FES の 1/2 モデル、 $m=12$ 、 $n=6$ の場合の FES の全モデル、FEM のモデルの撓みを示す。

Fig. 7 Uniformly Loaded Equilateral Triangular Plate with Built-in Edges

Fig. 8 Deflection in Uniformly Loaded Equilateral Triangular plate with Built-in Edges

Table 5 Deflection and Bending Moments in Uniformly Loaded Equilateral Triangular Plate with Built-in Edges

	m	n	w	M_{1x}	M_{1y}	M_{2n}
FES half Model	12	6	1.55	109.0	109.0	-263.6
	6	3	1.000	1.000	1.000	1.000
FES full Model	12	6	1.000	1.000	1.000	1.000
	6	3	0.999	1.001	1.001	0.999
FEM Model	60		1.001	1.001	1.001	1.000

Table 5 に正三角形の重心 1 に於ける撓み及び x, y 方向の曲げモーメント, 辺の midpoint 2 に於ける辺に垂直方向の曲げモーメントについて FES 及び FEM の解析結果を示す。Table 5 の上段に FES の 1/2 モデルの $m=12, n=6$ の場合の結果を, その下にその他のモデルの結果と FES の 1/2 モデルの $m=12, n=6$ の場合の結果との比を示す。

この問題でも FES は FEM に比べて, はるかに少ない節点および要素数で (FES 全体モデルで $m=6, n=3$ の場合, FEM の 1/100 の節点数) 非常に良好な精度が得られることを示している。

3.2.2 二辺を固定され一辺を支持された一様荷重を受ける三角形板

前項と同じ正三角形板で底辺が支持され他の二辺が固定された一様荷重を受ける場合の例題を解析する。Fig. 9 に, FES の 1/2 モデルの $m=12, n=6$ の場合, および FES の全モデルの $m=12, n=6$ の場合の曲げモーメント M_n の分布図を示す。また Table 6 に FES と FEM の解析結果を示す。FEM モデルは前項と同じく一辺を 60 分割した四辺形要素による結果である。Table 6 からわかるように FES モデルでは $m=6, n=3$ の場合と $m=12, n=6$ の場合とは

Fig. 9 Bending Moments in Uniformly Loaded Equilateral Triangular Plate with One Edge Simply Supported and Two Edges Built-in Edges

Table 6 Deflection and Bending Moments in Uniformly Loaded Equilateral Triangular Plate with One Edge Simply Supported and Two Edges Built-in

	m	n	w	M_{1x}	M_{1y}	M_{2n}
FES half Model	12	6	2.18	141.8	120.6	-317.1
	6	3	1.000	1.000	1.000	1.000
FES full Model	12	6	1.000	1.000	1.000	1.000
	6	3	1.000	0.995	0.998	1.000
FEM Model	60		1.000	1.002	1.000	1.000

Fig. 10 Half Circular Plate with Clamped along the Circular Boundary and Simply Supported along Straight Edge

殆ど変わらない。FEM の結果は前項の三辺固定の場合と同じく m が小さい場合は FES の結果と差があったが $m=60$ となって FES に近い値となった。この例題でも FES が非常に精度が良いことを示している。

3.3 円周を固定され弦を支持された一様荷重を受ける半円板

最後に円周を固定され弦を支持された半径 $a=1000$ mm, 板厚 $t=10$ mm ヤング率 21000 kgf/mm², ポアソン比 0.3 の一様荷重 $p=0.01$ kgf/mm² を受ける半円板の例題を解析する。Fig. 10 に示すように y 軸上で対称条件とした 1 要素の 1/2 モデルで 1/4 円弧を $m=6$ 分割, 半径を $n=4$ 分割として解析した。

(a) Deflection (b) Bending Moments M_t

Fig. 11 Deflection and Bending Moments in Uniformly Loaded Circular Plate with Clamped along Circular Boundary and Simply Supported along Straight Edge

Fig. 11 に FES 解析による結果の撓みおよび境界に沿った方向の曲げモーメントを示す。Table 7 には y 軸上の選点における撓み及び曲げモーメントを示し Table の上段に FES による結果を下段に文献 4) との比を示した。Table 7 から分かるように両者は極めて良く一致している。

4. 結 言

前報¹⁾で 2 次元平面問題と 3 次元ソリッド問題でソースを用いた新しい有限要素 FES を開発する手法を報告したが、本報告では全く同じ手法を用いて板曲げ要素を開発し、その基礎原理を述べた。本手法によれば、境界上にのみ節点を設けるだけで任意の形状の有限要素を作成することができ、少ない節点数及び要素数で極めて良好な計算精度が得られることを、矩形板、三角形板、半円板の解析例によって示した。特に板曲げ問題では支配方程式の微分の階数が大きいため、半解析的な手法である本手法は少ない節点でも非常に精度の良い結果が得られたと考えられる。また文献 2) の仮想境界法や文献 3) の仮想電荷法 (CSM) では曲げモーメントのソースとして境界に垂直な曲げモーメント

Table 7 Deflection and Bending Moments in Uniformly Loaded Half Circular Plate with Clamped along Circular Boundary and Simply Supported along Straight Edge

m	n	$x=0, y=a/4$		$x=0, y=a/2$		$x=0, y=3/4a$		$x=0, y=a$	
		w	M_y	w	M_y	w	M_y	w	M_y
6	4	15.26	473.0	17.52	446.0	7.93	16.0	0.0	756.0
		1.001	1.000	1.000	1.000	0.996	1.000	1.000	1.000

のみを仮定するだけであり、境界に対する捻りモーメントのソースが考慮されていないために、多くの選点を設けているにもかかわらず、あまり精度が良くない。筆者らが開発した新しい有限要素のための定式化によれば、ソースとして曲げと捻りの両者を仮定しているため、文献 2, 3) に比べても非常に精度は向上している。さらに、本定式化によって、有限要素を作成するのに必要な曲げと捻りの両者の自由度が得られたことを付記しておく。

次報では、この板曲げの FES 要素と前報の 2 次元平面の FES 要素を組み合わせる実際の船体構造を解析し、その有用性を確認する予定である。

参 考 文 献

- 1) 根本勲, 多田剛: ソースを用いた新しい有限要素の開発, 日本造船学会論文集, 第 178 号 (1995).
- 2) 鷺津久一郎, 田中正隆, 田中喜久昭: 境界要素法—基礎と応用, 丸善株式会社 P. 132-134, (1982).
- 3) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版 (1985).
- 4) S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: The theory of plate and shells, 2nd edition, McGRAW-HILL (1959).
- 5) R. J. Allwood & G. M. Cornes: A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach, I. J. N. M. E. Vol. 1 P. 135-149, (1969).