大波高時の波浪の統計的性質について

——方向分散性の影響——

正員 吉 元 博 文*

On Statistical Properties of Wave Amplitudes in Stormy Sea

——Effect of Short-crestedness——

by Hirofumi Yoshimoto, *Member*

Summary

A method to estimate the statistical properties of non-linear short-crested irregular waves without any limitation regarding the directional spreading or the spectral band width is presented which is based on the secondary interaction theory of surface waves. It is shown that the statistical problem can be reduced to that of finding the eigenvalues and the eigenvectors of two real symmetric matrices and the probability density functions of surface elevation can be obtained using the so-called Saddle Points Method. Numerical investigations regarding the effect of shortcrestedness on the statistics of wave amplitudes are performed. And the method is also used to analyze full-scale data measured in stormy sea states and is shown to be a powerful tool for the estimation of the statistical properties of the directional sea.

1. 緒 言

実際の海域で船舶あるいは海洋構造物が遭遇する海洋波は、極めて不規則な変動をするために、その統計的性質の予測に対しては確率論的な手法が必要となる。海洋波の確率論的予測法に関する先駆的な研究は、Longuet-Higgins¹⁾によって行われた。Longuet-Higginsは、電気の雑音について考察したRiceの結果²⁾を海洋波に援用して、振幅に関する各種統計量を求め、さらに、Cartwright and Longuet-Higgins³⁾は、振幅の極値分布の確率密度関数の一般表示式を示した。その後、彼らの成果について多くの調査・研究等^{4),5)}がなされ、現在では、個々の成分波の力学的性質が線形理論で記述される限りにおいては、一般に認められるところとなっている。

しかし、Longuet-Higginsらの方法は、海洋波の非線形性が無視できない場合には適用することができない。例えば、大波高の波が発生するような厳しい海象状態では、海

洋波の水位変動は正規分布からのずれを示し、振幅は平均水面に対して対称ではなくなることが知られている。これは、海洋波の非線形性により生じると考えられるものであり、結果として振幅の極大値と極小値の発生確率は等しくなくなる。Longuet-Higginsらの方法では、海洋波の水位変動が正規確率過程であるとするために、極大値と極小値の発生確率は等しくなり、非線形影響を定量的にもあるいは定性的にも説明することができない。こうした問題点に対し、著者は、海洋波を長波頂不規則波 (Long-crested Irregular Waves) としてモデル化し、海洋波の2次の非線形性を厳密に取り入れた予測法を示した⁶⁾。そして、これを実海域で計測された波浪データに適用し、大波高時の波浪の統計的性質をほぼ説明し得ることを示したが、海洋波のモデルに関する問題点が残った。即ち、予測に用いた海洋波のモデルと実際の海域で観測される海洋波との相違である。周知のように実際の海域で観測される海洋波は、長波頂波 (Long-crested Waves) ではなく波峰線が短く切れた“短波頂波 (Short-crested Waves)”であり、これはさまざまな方向からの成分波が重なり合うこと (海洋波の方向分散性) によって生じるものと解釈されている。従って、実際の海洋波の統計的性質を議論するうえにおいて、方向分散性が海洋波の統計的性質にどのような影響を与えるか

* 運輸省船舶技術研究所海洋開発工学部

を明らかにすることは避けて通ることのできない問題である。

過去の研究において、海洋波の方向分散性を考慮した非線形性に関する研究^{7),8),9),10)}はいくつか見受けられるが、方向分散性が海洋波の統計的性質にどのような影響を与えるかについて具体的に言及された例は、著者の知る範囲ではないように思われる。そこで、本論では、海洋波の方向分散性が海洋波の統計的性質にどのような影響を与えるのかを理論的に明らかにすることを主眼とし、海洋波の方向分散性を取り入れた確率論的予測法について考察する。それには、方向分散性の影響を取り入れた海洋波の水位変動の確率密度関数が必要であり、本論では、まず、海洋波を短波頂不規則波 (Short-crested Irregular Waves) としてモデル化することにより、方向分散性を含んだ2次の非線形影響を厳密にとり入れた水位変動の確率密度関数の計算法を示す。次に、水位変動の確率密度関数をもとに、振幅の統計量を求め、数値シミュレーションにより海洋波の方向分散性が振幅の統計量に与える影響を具体的に明らかにする。最後に、当所で行った実海域実験で観測された大波高時の波浪データを取り上げ、理論計算結果との比較を行い、本手法の妥当性を評価する。

2. 2次の非線形影響を考慮した短波頂不規則波のモデル

ここでは、2次の非線形影響を考慮した短波頂不規則波のモデルを導く。

2.1 基礎式

Fig. 1 に示すような座標系を考える。流体は非圧縮、非粘性、非回転であるとする。速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ が存在し、 ϕ の満たすべき条件は次のようになる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

$$\partial \phi / \partial z = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (2)$$

$$\frac{\partial^L \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial t} + \vec{u} \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u}^2 \right) = 0 \quad \text{at } z = \zeta(x, y, t) \quad (3)$$

ここに、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, g は重力加速度, h は水深, $\vec{u} = \nabla \phi$, ζ は水位変動であり、次式で与えられる。

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 = 0 \quad (4)$$

さらに、速度ポテンシャル ϕ 及び水位変動 ζ を次式のように

Fig. 1 Coordinate system

に漸近展開する。

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots, \quad \zeta = \varepsilon \zeta^{(1)} + \varepsilon^2 \zeta^{(2)} + \dots \quad (5)$$

ここに、 ε は漸近展開を行うために設けたパラメータ、 $\phi^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$ と $\phi^{(2)}$, $\zeta^{(2)}$ は、それぞれ1次と2次のオーダーの速度ポテンシャル並びに水位変動を表す。次に、(3)式を $z=0$ でテーラー展開し、(5)式を代入して各オーダー毎に整理する。同様に、(4)式に(5)式を代入し、各オーダー毎に整理すれば、次式を得る。

$$\varepsilon: \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$$\varepsilon: \zeta^{(1)} = -\frac{1}{g} \phi_t^{(1)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= - \left[\frac{\partial}{\partial t} \left| \nabla \phi^{(1)} \right|^2 + \zeta^{(1)} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} + g \zeta^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right] \\ &= -2 \left[\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right] \\ &\quad + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} \left[\frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\varepsilon^2: \zeta^{(2)} = -\frac{1}{g} \left[\phi_t^{(2)} - \frac{1}{g} \phi_t^{(1)} \phi_{tt}^{(1)} + \frac{1}{2} \left| \nabla \phi^{(1)} \right|^2 \right] \quad (7)$$

2.2 短波頂不規則波による表現

(1) 1次のオーダーの水位変動

(1), (2), (6)の各条件式を満足する1次のオーダーの速度ポテンシャルは、Fourier-Stieltjes 積分表示により次のように表記することができる¹¹⁾。

$$\phi^{(1)} = \int_{\vec{k}, \omega} \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \frac{\cosh|\vec{k}|(h+z)}{\cosh|\vec{k}|h} dZ^{(1)}(\vec{k}, \omega) \quad (8)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$, $\vec{k}$ は波数ベクトル, $\vec{r}$ は位置ベクトル, ω は角周波数, $dZ^{(1)}(\vec{k}, \omega)$ は複素振幅であり、次の性質を満足する。

$$dZ^{(1)}(-\vec{k}, -\omega) = dZ^{(1)*}(\vec{k}, \omega) \quad (9)$$

ここに、 $*$ は複素共役を表す。波数と角周波数の間には、次の分散関係式が成立する。

$$\omega = g|\vec{k}| \tanh|\vec{k}|h, \quad \vec{k}(-\omega) = -\vec{k}(\omega) \quad (10)$$

(6)式より、1次のオーダーの水位変動は次のようになる。

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} &= \int_{\vec{k}, \omega} \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} dA(\vec{k}, \omega), \\ dA(\vec{k}, \omega) &= \frac{i\omega}{g} Z^{(1)}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \quad (11)$$

(2) 2次のオーダーの水位変動

$\phi^{(1)}$ 並びに(1), (2), (7)式より $\phi^{(2)}$ は次式で表記できる。

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} &= \frac{i}{2} \int_{\vec{k}, \omega} \int_{\vec{k}', \omega'} D(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}') \\ &\quad \times \exp\{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)\} \frac{\cosh|\vec{k}_2|(h+z)}{\cosh|\vec{k}_2|h} dZ^{(1)}(\vec{k}', \omega') dZ^{(1)}(\vec{k}, \omega) \end{aligned}$$

ここで、

$$D(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}') =$$

$$\frac{2(\omega+\omega')(\vec{k} \cdot \vec{k}' - R R') + \omega'(|\vec{k}|^2 - R^2) + \omega(|\vec{k}'|^2 - R'^2)}{\omega_2^2 - g|\vec{k}_2|\tanh|\vec{k}_2|h}$$

$$R = \frac{\omega^2}{g}, \quad \vec{k}_2 = \vec{k} + \vec{k}', \quad \omega_2 = \omega + \omega' \quad (12)$$

(12)式を用いれば、2次のオーダーの水位変動は次のように表せる。

$$\zeta^{(2)} = \int_{\vec{k}, \omega} \int_{\vec{k}', \omega'} G(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}') \times \exp\{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)\} dA(\omega', \vec{k}') dA(\omega, \vec{k})$$

ここで、

$$G(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}') = \frac{g}{2} \left[\frac{\omega_2}{\omega \omega'} D(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}') + \frac{1}{g} (R + R') + \frac{R R' - \vec{k} \cdot \vec{k}'}{\omega \omega'} \right] \quad (13)$$

ここに、 $G(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}')$ は方向分散性を考慮した2次の非線形周波数応答関数 (bi-directional quadratic transfer function) である。2次のオーダーの非線形性を考慮した水位変動は、(11)、(13)式をもとに次のように表すことができる。

$$\zeta = \int_{\vec{k}, \omega} \exp\{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} dA(\omega, \vec{k}) + \int_{\vec{k}, \omega} \int_{\vec{k}', \omega'} G(\omega, \omega', \vec{k}, \vec{k}') \exp\{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)\} dA(\omega', \vec{k}') dA(\omega, \vec{k}) \quad (14)$$

さらに、

$$\begin{aligned} \vec{k} &= (k_x \cos \theta_l, k_x \sin \theta_l) \\ k_x &= |\vec{k}|, \quad \vec{r} = (x, y) \\ dA(\vec{k}, \omega) &= A_{kl} \exp(i \varepsilon_{kl}) \end{aligned} \quad (15)$$

と表記して(14)式を離散化し、次のような表記に改める。ここに、 θ_l は1次の成分波の進行角である。

$$\begin{aligned} \zeta &= \text{Re} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M 2A_{kl} \exp(i\psi_{kl}) \\ &+ \text{Re} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M 2A_{kl} A_{mn} [G_{klmn}^{(+)} \exp\{i(\psi_{kl} + \psi_{mn})\} \\ &+ G_{klmn}^{(-)} \exp\{i(\psi_{kl} - \psi_{mn})\}] \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} G_{klmn}^{(\pm)} &= \frac{g}{2} \left[\pm \frac{\omega_k \pm \omega_m}{\omega_k \omega_m} D_{klmn}^{(\pm)} \right. \\ &\left. + \frac{1}{g} (R_k + R_m) \pm \frac{R_k R_m \mp k_k k_m \cos(\theta_l - \theta_n)}{\omega_k \omega_m} \right] \\ D_{klmn}^{(\pm)} &= \frac{2(\omega_k \pm \omega_m) \{ \pm k_k k_m \cos(\theta_l - \theta_n) - R_k R_m \} \pm \omega_m (k_k^2 - R_k^2) + \omega_k (k_m^2 - R_m^2)}{(\omega_k \pm \omega_m)^2 - g \sqrt{k_k^2 + k_m^2 \pm 2k_k k_m \cos(\theta_l - \theta_n)} \tanh \sqrt{k_k^2 + k_m^2 \pm 2k_k k_m \cos(\theta_l - \theta_n)} h} \\ \psi_{kl} &= k_k x \cos \theta_l + k_k y \sin \theta_l - \omega_k t + \varepsilon_{kl}, \quad k_k = |\vec{k}| \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、Re は複素数の実部、 $\pm$ は複合同順であり、 N, M は、それぞれ1次の成分波の周波数及び進行角の離散化個数、 $G_{klmn}^{(+)}, G_{klmn}^{(-)}$ は、それぞれ2次の非線形周波数応答関数の周波数の和の成分及び差の成分を表す。 $\theta_l = \theta_n$ の場合は長波頂不規則波の2次の非線形周波数応答関数に一致する。(16)式が、本論で用いる2次の非線形影響を考慮した

短波頂不規則波のモデルであり、One-side 定義の方向波スペクトル密度関数を $S(\omega, \theta)$ とすれば

$$2A_{kl} = \sqrt{2S(\omega_k, \theta_l)} \Delta\omega_k \Delta\theta_l \quad (17)$$

と表記することができる。

2.3 短波頂不規則波の2次の成分波

短波頂不規則波のモデルは、成分波の波数がベクトル量となる。そのため、波数がスカラー量である長波頂不規則波のモデルと比べて複雑な振る舞いをするようになる。

Fig. 2 は、短波頂不規則波のモデルについて、1次の成分波の波数ベクトルとその干渉によって生じる2次の成分波の波数ベクトルとの関係を、模式的に示したものである。図は2つのケースについて示しており、case-1 は1次の成分波の進行角がほぼ同じである場合、case-2 は進行角が大きく異なる場合である。図からわかるように、短波頂不規則波の場合、2次の成分波の進行角は、1次の成分波の進行角と異なる。さらに、case-2 に示すように、1次の成分波の進行方向によっては、差の成分の波数が1次の成分波の波数より小さくなる場合があることがわかる。

case-1 と case-2 の差異を、具体的にシミュレーションで示す。シミュレーションは(16)式により、簡単のため、軸に沿って同一方向 (case-1) 及び逆向き方向 (case-2) に進む1次の成分波が存在する場合について検討する。シミュレーション条件を Table 1 に示す。

Fig. 3 は、case-1 と case-2 のシミュレーション結果であり、時間並びに空間的な変動について示した。図中の鎖線は周波数の差の成分、実線は和の成分 (倍調波成分を含んだ形で示している)、破線は1次のオーダーと2次のオーダーの水位変動の和を示している。

Fig. 2 Relation of wave number vector between 2nd order wave components and 1st order wave components

図から、成分波が同一方向に進む case-1 では、差の成分は変動は極めて小さいが、良く知られているように、波群のピーク付近で谷、波群の両端で山、和の成分は、1 次のオーダーの水位変動のほぼ 1/2 の周期及び波長で変化している。

これに対し、case-2 では、時間的な変動は、差の成分は波群のピーク付近で山、波群の両端で谷となり、case-1 と逆の傾向を示す。さらに、和の成分の変動は case-1 に比べて小さくはなるが、相対的に、差の成分の変動が大きくなり、全体としては、同一方向の場合とさほど変化はない。空間的な変動についてみれば、差の成分は 1 次のオーダーの水位変動のほぼ 1/2 波長で変動しており、case-1 と比べかなり異なった振る舞いを示す。Fig. 2 で述べたように、成分波が反対方向に進む場合には、差の成分は逆向きの 2 つの波数ベクトルの差となり、差の成分の波数は 1 次の成分

波の波数より大きくなる。そのため、時間的な変動は 1 次の成分波の周波数の差であるのに対し、空間的には 2 つの波数ベクトルの絶対値の和の変動となる。

さらに、Fig. 4 は、2 次の成分波の変動特性を調べるために、(16)式で与えられる 2 次の非線形周波数応答関数の値を示したものである。計算は、Fig. 3 で用いた成分波の周波数について行っており、図の横軸に 1 次の成分波の進行角の差 $\Delta\theta = \theta_i - \theta_n$ (以下、交差角と称す。 $\Delta\theta = 0^\circ$ が case-1, $\Delta\theta = 180^\circ$ が case-2 に相当する) をとっている。図からわかるように、応答関数の値は交差角に対して大きく変化し、 $\Delta\theta = 0^\circ$ と $\Delta\theta = 180^\circ$ の場合では全く逆の応答特性を示す。これより、case-1 と case-2 の 2 次の成分波の変動特性の相違は、応答関数の交差角に対する応答特性の変化により生じていることがわかる。

3. 方向分散性を考慮した水位変動の確率密度関数

ここでは、第 2 章で求めた短波頂不規則波のモデルをもとに、水位変動の確率密度関数を求める。

3.1 確率密度関数

(16)式を、次のような表記に改める。

$$\begin{aligned} \zeta = & \operatorname{Re} \sum_{l=1}^L s_l (q_l + i r_l) \\ & + \operatorname{Re} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L s_l s_j \{ H_{lj}^{(+)}(q_l + i r_l)(q_j + i r_j) + H_{lj}^{(-)}(q_l + i r_l)(q_j - i r_j) \} \end{aligned}$$

ここで

Table 1 Simulation condition of surface elevation

	case-1		case-2	
	wave-1	wave-2	wave-1	wave-2
h (m)	300	300	300	300
ω_k (rad./sec)	0.6823	0.7235	0.6823	0.7235
ε_{kl}	0	0	0	0
θ_i (deg.)	0	0	180	0
$2A_{kl}$ (m)	5.0	5.0	5.0	5.0

(a) time domain

(b) space domain

Fig. 3 Simulation of surface elevations with 2nd order effect. — sum frequency component. ---- difference frequency component. results with total 2nd order effect

Fig. 4 Behavior of bi-directional quadratic transfer function having, $\omega_1=0.6823(\text{rad/sec})$, $\omega_2=0.7235(\text{rad/sec})$ and $h=300\text{m}$. $G^{(+)}$: sum frequency component. $G^{(-)}$: difference frequency component

$$\begin{aligned} s_1 &= A_{11}, s_2 = A_{12}, \dots, s_L = A_{MN} \quad (L=M \times N) \\ q_1 &= \cos(\psi_{11}), q_2 = \cos(\psi_{12}), \dots, q_L = \cos(\psi_{MN}) \\ r_1 &= \sin(\psi_{11}), r_2 = \sin(\psi_{12}), \dots, r_L = \sin(\psi_{MN}) \\ H_{11}^{(+)} &= \frac{G_{1111}^{(+)}}{2}, H_{12}^{(+)} = \frac{G_{1112}^{(+)}}{2}, \dots, H_{LL}^{(+)} = \frac{G_{MNMN}^{(+)}}{2} \quad (18) \end{aligned}$$

ここに、1 次のオーダーの水位変動 $\zeta^{(1)}$ が正規分布に従うならば、 q_i, r_i は正規確率変数となり、次の性質を満足する。

$$\begin{aligned} E[q_i] &= E[r_i] = 0 \\ E[q_i q_j] &= E[r_i r_j] = \frac{1}{2} \\ E[q_i r_j] &= 0, E[r_i q_j] = 0, E[r_i r_j] = 0 \quad (i \neq j) \quad (19) \end{aligned}$$

Langley¹²⁾ にならい、(18)式の実部をとり次のようなマトリックス表示にする。

$$\zeta = \mathbf{s}^t \mathbf{q} + \mathbf{q}^t [\mathbf{H}^{(-)} + \mathbf{H}^{(+)}] \mathbf{q} + \mathbf{r}^t [\mathbf{H}^{(-)} - \mathbf{H}^{(+)}] \mathbf{r} \quad (20)$$

ここに、 $\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ は n 番目の成分として s_n, q_n, r_n をもつ列ベクトル ($\mathbf{s}^t$ は行ベクトル)、 $\mathbf{H}^{(\pm)}$ は、 nm 番目の成分として $H_{mn}^{(\pm)}$ をもつ実対称行列である。

(20)式の右辺第2項と3項において、1次変換 $\mathbf{q}' = \mathbf{P}_1 \mathbf{q}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{P}_2 \mathbf{p}$ を行う。 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ として、 $\mathbf{H}^{(-)} + \mathbf{H}^{(+)}$, $\mathbf{H}^{(-)} - \mathbf{H}^{(+)}$ の固有ベクトルを列ベクトルとする直交行列を選べば、 $\mathbf{H}^{(-)} + \mathbf{H}^{(+)}$, $\mathbf{H}^{(-)} - \mathbf{H}^{(+)}$ の固有値 λ_i を対角成分とする対角行列 Λ_1, Λ_2 に対角化することができる¹³⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'^t [\mathbf{H}^{(-)} + \mathbf{H}^{(+)}] \mathbf{q} &= (\mathbf{P}_1^t \mathbf{q}')^t \Lambda_1 (\mathbf{P}_1^t \mathbf{q}') \\ \mathbf{r}'^t [\mathbf{H}^{(-)} - \mathbf{H}^{(+)}] \mathbf{r} &= (\mathbf{P}_2^t \mathbf{q}')^t \Lambda_2 (\mathbf{P}_2^t \mathbf{q}') \quad (21) \end{aligned}$$

$\mathbf{P}_1^t \mathbf{q}$ の j 成分を $(\mathbf{P}_1^t \mathbf{q})_j$ と表わし

$$\begin{aligned} X_j &= (\mathbf{P}_1^t \mathbf{q})_j \quad (j=1, \dots, L) \\ X_j &= (\mathbf{P}_2^t \mathbf{r})_{j-L} \quad (j=L+1, \dots, 2L) \end{aligned}$$

とし、(19)式の関係を利用すれば、結局(21)式は X_j の2次形式で表せる。

$$\zeta = \sum_{j=1}^{2L} \zeta_j = \sum_{j=1}^{2L} \beta_j X_j + \lambda_j X_j^2$$

ここで

$$\begin{aligned} \beta_j &= (\mathbf{P}_1^t \mathbf{s})_j, \lambda_j = (\Lambda_1)_j, j=1, \dots, L \\ \beta_j &= 0, \lambda_j = (\Lambda_2)_j, j=L+1, \dots, 2L \quad (22) \end{aligned}$$

ここに、 $(\Lambda_1)_j$ は行列 Λ_1 の j 番目の対角要素を表わす。Kac and Siebert¹⁴⁾ によれば(22)式で表された ζ の特性関数 $M(\vartheta)$ は、

$$M(\vartheta) = \prod_{j=1}^{2L} \frac{1}{\sqrt{1 - i\lambda_j \vartheta}} e^{-\frac{\beta_j^2 \vartheta^2}{4(1 - i\lambda_j \vartheta)}} \quad (23)$$

となる。(23)式の Fourier 変換を行うことにより、 ζ の確率密度関数 $p(\zeta)$ は求めることができる。

$$p(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vartheta \zeta} M(\vartheta) d\vartheta \quad (24)$$

3.2 鞍点法

原理的には、水位変動の確率密度関数は(24)式の特性関数の Fourier 変換から求めることができるが、実際には、(24)式は解析的に求めることは非常に難しく¹⁴⁾、数値的あるいは近似的方法に頼らざるを得ないのが実情である。これまでのところ、精度の高い解法としては、Kato and Kinoshita¹⁵⁾ によるガンマ分布を用いた解法、Naess and Jhonsen¹⁶⁾ による鞍点法を用いた解法などが提案されているに過ぎない。ここでは、鞍点法による近似解法を用いる。

鞍点法は、定積分で定義されている関数の漸近的なふるまいを知るのに、鞍点と呼ばれる特定の点の近傍における被積分関数のふるまいを利用する方法である。(24)式を $i\theta \rightarrow z$ で変数変換すれば

$$\begin{aligned} p(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(\zeta, z)} dz \\ f(\zeta, z) &= -\zeta z + \sum_{j=1}^{2N} \left\{ -\frac{1}{2} \log(1 - \lambda_j z) + \frac{\beta_j^2 z^2}{4(1 - \lambda_j z)} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

与えられる。 $z = u + iv$ として、 $f(\zeta, z) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$ とおく。いま、積分路 L に沿って $\psi(u, v) = \text{一定}$ となるようにすると、 L の接線方向を τ とすれば $(\partial\psi/\partial\tau)_L = 0$ である。また、 L に沿って、 φ が z_s で極値になっていたとすると $(\partial\varphi/\partial\tau)_{z_s} = 0$ である。よって、 $[\partial(\varphi + i\psi)/\partial\tau]_{z_s} = [\partial f(\zeta, z)/\partial\tau]_{z_s} = 0$ となる。この z_s が鞍点と呼ばれる。さらに、 $\text{Ref}(f(\zeta, z))$ の勾配が最も急な方向 (steepest descent) が $\psi(u, v) = \text{一定}$ の方向になるから、積分路を steepest descent にとれば、積分への寄与は、専ら鞍点 z_s からくることになる。

さて、(25)式において、 $f(\zeta, z^*) = f(\zeta, z)^*$ という対称性があるので、鞍点は実軸上にあり、 $(\partial\varphi(u, 0)/\partial u) = 0$ 、即ち、

$$-\xi + \sum_{j=1}^{2N} \left\{ \frac{\lambda_j}{2(1-\lambda_j u)} + \frac{\beta_j^2 u(2-\lambda_j u)}{4(1-\lambda_j u)^2} \right\} = 0 \quad (26)$$

を解くことによって求める。Naess and Jhonsen¹⁶⁾ は steepest descent は実軸を直角に横切っていることを数値計算から確認しており、これに従って、鞍点 z_s を通る steepest descent に積分路を変更すれば、結果的に、次の数値積分を行うことによって(24)式は近似的に評価することができる。

$$p(\xi) = \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{f(\xi, z_s)} dv \quad (27)$$

なお、実際の計算は、(26)式は二分法—はさみうち法¹⁷⁾、(27)式の積分は二重指数関数型公式¹⁷⁾によって行っている。

3.3 計算例

以上述べた手法に基づき、方向分散性を考慮した水位変動の確率密度関数並びに振幅の期待値の計算例を示す。

実際の計算を行う際には、方向波スペクトルを与える必要がある。ここでは、簡単のために方向分布関数が周波数依存しないものとして、

$$S(f, \theta) = S(f) \cdot G(\theta) \quad (28)$$

として与えている。ここに $S(f)$ は周波数スペクトル、 $G(\theta)$ は方向分布関数であり、周波数スペクトルとして次の Modified-JONSWAP スペクトル¹⁸⁾、方向分布関数として光易型方向分布関数⁵⁾を用いた。

$$S(f) = 0.173 F_1 \frac{H_{1/3}^2}{f_p} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-4} \exp \left(-\frac{2}{3} \left(\frac{f}{f_p} \right)^{-4} \right) \gamma \exp \left(-\frac{(f_p - f)^2}{2\sigma^2 f_p^2} \right)$$

ここで

$$F = 1.323 - 0.414\gamma + 0.105\gamma^2 - 0.015\gamma^3 + 0.001\gamma^4$$

$$\sigma = 0.07 \cdots f \leq f_p, \quad \sigma = 0.09 \cdots f > f_p \quad (29)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \quad (30)$$

ここに、 $H_{1/3}$ は有義波高、 f_p はピーク周波数、 γ は peak enhancement parameter、 s は方向集中パラメータ、 θ_0 は主方向である。Fig. 5 は計算に用いた周波数スペクトルと方向分布関数であり、(29)式で $H_{1/3} = 11 \text{ m}$ 、 $f_p = 0.053 \text{ Hz}$ 、 $\gamma = 1.0$ 、(30)式において $s = 200, 75, 10$ とした結果である。参考までに $s = 75, 10$ という値は、合田によりうねり及び風波の標準的な値⁵⁾とされている。

Fig. 6 は、Fig. 5 の周波数スペクトルと方向分布関数をもとに、水深 70 m としたときの水位変動の確率密度関数を求めた結果である。さらに、Fig. 7 は Fig. 6 の水位変動の確率密度関数から、山側の振幅の極大値と谷側の振幅の極小値の最大期待値 $E[\xi_n/\sigma]$ (Appendix-A 参照) を求めた結果であり、水位変動の標準偏差 σ で無次元化している。図には、線形理論として、Fig. 6 に Gauss 分布、Fig. 7 に Longuet-Higgins による結果¹⁾、さらに 2 次の成分として和の成分のみを考慮した結果を示している。

図より次のことがわかる。

Fig. 5 Frequency wave spectra and directional function for numerical simulation

・ Fig. 6 より、2 次の非線形性を取り入れた結果は、Gauss 分布に比べ山側の大きな水位変動の発生確率が高くなり、逆に、谷側の水位変動の発生確率が小さくなっていることがわかる。当然のことながら、Fig. 7 に示す振幅の極値の最大期待値 $E[\xi_n/\sigma]$ は、Fig. 6 に示す確率密度関数の傾向を反映しており、2 次の非線形性を取り入れた結果は、山側と谷側の振幅の非対称性を明瞭に示している。

Fig. 6 Probability density function of surface elevation for input directional wave spectra. 'with sum': results when the difference frequency components are omitted. 'total': results with total 2nd order effect

・こうした傾向は、2次の成分が和の成分のみの場合に顕著となるが、その割合は方向分散性に依存していることがわかる。即ち、Fig. 4 に示した2次の非線形周波数応答関数の特性からわかるように、方向分散性の大小にかかわらず、同一方向に進行する（交差角 $\Delta\theta=0^\circ$ ）成分波の干渉が卓越する。しかし、方向分散性が大きくなるにつれて、同一方向に進行する成分波の干渉が低下し、相対的に交差角の大きい成分波の干渉が増える。その結果、Fig. 6, 7 に示すような方向分散性に依存するような傾向を与えたと考えられる。

・間接的にはあるが、差の成分は、全体的には非線形性を緩和させ、線型理論に近づける役割を果たしていることがわかる。差の成分も、和の成分と同様に方向分散性に依存し、結果的に、和と差の成分を考慮した結果は、方向分散性の大きさにかかわらず、ほぼ同程度の結果を与える。

以上、短波頂不規則波のモデルを用いた予測法を示し、数値シミュレーションにより、方向分散性を考慮した場合の結果について考察した。次に、本手法の妥当性を評価するために、実海域で観測された波浪データに適用してみる。

4. 実海域データへの適用

ここで使用するデータは、1986年から1990年にかけて、山形県由良港沖で実施された POSEIDON 号による実海域実験¹⁹⁾で取得されたものである。この実験では、台風の来襲時や冬季節風による風波の発達時に、総計43回にわ

Fig. 7 Expected values of the largest wave amplitudes of crest and the smallest wave amplitudes of trough in N observations. 'with sum': results when the difference frequency components are omitted. 'total': results with total 2nd order effect

たる臨時計測と称する20時間から48時間の連続観測を実施している。これらのデータの中から2つの代表的な大波高時のデータを選定し解析を行った。

4.1 波浪データ

計測に用いた波高計は、海底設置式の送受波器を持つ大水深型超音波式波高計であり、方向波スペクトルを観測するために3台の波高計を用いた。波浪観測地点は、由良港沖合約3kmの海域であり水深は43mである。本実験の方向波スペクトルの観測システム、精度及び結果については、既に詳細な報告²⁰⁾があるので、ここでは省略する。

使用したデータの風(POSEIDON号上で観測、高さは海面上19.5m)ならびに波浪の各種統計量の30分ごとの経時変化をFig. 8に示す。データのサンプリング間隔は1秒、図のr80202, r81214は連続データの区別するためにつけた名称であり、それぞれ1988年2月2日、1988年12月14日に収録されたデータであることを意味する。いずれも、冬季節風によって風波が発達した際の波浪データであり、r80202では最大有義波高7.1mを記録している。

4.2 解析方法

解析は、Fig. 8の風、波の各種統計量の経時変化から、定常と思われる区間(Fig. 8で $\leftrightarrow$ で示す区間であり、いずれも13.5時間)について行った。実際には、Fig. 8に示した区間の時系列をゼロクロス法で解析し、Fig. 9で定義され

る振幅を求め、各種統計量を算出した。Table 2 に解析したデータの基本的な統計情報を示す。以下、工学的に重要である山側の振幅についての検討結果のみを示す。

本計算法では、入力となる方向波スペクトルを与える必要がある。ここでは、解析対象区間のデータを 2048 秒ごとに分割し、それぞれ総計 23 ケースについて方向波スペクトル解析を行い、各周波数成分並びに各方位成分の平均値をとって、入力方向波スペクトルを与えた。Fig. 10 に入力した方向波スペクトルを示す。なお、方向波スペクトルの解析は拡張エントロピー法²¹⁾を用いて行った。

4.3 解析結果

Fig. 11 は r 80202, r 81214 のデータを K 分割 ($K=20, 15, 10, 8, 6, 4$) し、各区間の最大値を全区間で平均化して、山側の振幅の N 波中の最大平均値を求め、本手法によって求められる最大期待値と比較した結果である。図には合わせて、線型理論として Longuet-Higgins による結果¹⁾並びに長波頂不規則波に相当する結果として (30) 式において $s=300$ とした結果も示した。

図より以下のことがわかる。

- ・線型理論は観測値に対し過小評価を与え、海洋波の非線形性が無視できないような大波高時において線型理論を適用することは危険であることがわかる。
- ・これに対し、本予測法の結果は観測値とほぼ一致し、大波高時の波浪の統計的性質を予測する手段として有効であることがわかる。
- ・方向分散性による予測値の変化は、Fig. 7 における数値シミュレーションと同様ほとんど見受けられず、海洋波のモデルの差異が振幅の統計量に及ぼす影響は小さい。

5. 結 言

今回の検討をまとめれば次のようになる。

- ・海洋波のモデルとして短波頂不規則波を用い、方向分散性を有する海洋波の 2 次の非線形性を考慮した場合の確率的予測法を示した。
- ・その予測法により、方向分散性が振幅の統計量に与える影響を検討した結果、個々の 2 次の成分、即ち、差及び和の成分は方向分散性の影響を受けるものの、全体としては長波頂不規則波の場合とさほど変わらない。
- ・実海域で観測された波浪データをもとに本手法を検証した結果、本手法が大波高時の海洋波の統計的性質を予測する方法として有効であることを示した。

本報告で使用した波浪データは、運輸技術研究開発調査費による「海洋構造物の沖合展開のための開発研究」の一環として、海洋科学技術センターをはじめ、日本海事協会、民間企業 8 社との共同研究として実施された浮遊式海洋構造物「POSEIDON」号による実海域実験で取得されたものであることを付記する。

Fig. 8 Change of mean wind speed U , significant wave height $H_{1/3}$, significant wave period $T_{H1/3}$, wind direction, and wave direction

Fig. 9 Explanatory sketch of wave amplitudes. A_c : wave amplitude of crest. A_t : wave amplitude of trough

Fig. 10 Input directional wave spectra

Table 2 Characteristic values for the analyzed data

	r80202	r81214
data length (h)	13.5	13.5
number of A_c , A_t	5362	5513
σ (m)*1	3.08	2.17

*1 : standard deviation of surface elevation

参 考 文 献

- Longuet-Higgins, M. S.: On the statistical distributions of the heights of sea waves, Journal of Marine Research, Vol. 11, No., pp. 245-265, 1952
- Rice, S. O.: Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal, Vol. 23, 24 (1994, 1995)
- Cartwright, D. E. and M. S. Longuet-Higgins: The statistical distribution of the maxima of a random function, Proc. Royal. Soc. London. Ser. A., Vol. 237, pp. 212-232, 1956
- 竹沢誠二, 笠原昭夫: 人工不規則水波の統計的性質, 関西造船協会誌, 195号, pp. 1-15, 1984
- 合田良実: 港湾構造物の耐波設計 波浪工学への序説, 鹿島出版会, 1984
- 吉元博文: 大波高時の波浪の統計的性質について, 第13回海洋工学シンポジウム, pp. 425-432, 1995
- Hamada, T.: The secondary interactions of surface waves, Report of the Port and Harbour Technical Research Institute, Report No. 10, pp. 1-28, 1965
- 木村晃: 非線形長周期波の2次元スペクトル, 第32回海岸工学講演会論文集, pp. 154-158, 1985
- 橋本典明, 永井紀彦, 菅原一晃, 浅井正, 久高将信: 波浪の多方向性と弱非線形性を考慮した水圧波から表面波への換算法について, 海岸工学論文集第39巻, pp. 171-175, 1992
- Sekimoto, T.: Nonlinear Effect on the Estimation of Directional Wave Spectrum, Wave Generation'95 pp. 44-59, Yokohama, Japan, 25 Sept, 1995
- 富永政英: 海洋波動 基礎理論と観測成果, 共立出版株式会社, 1976
- Langley, R. S.: A statistical analysis of non-linear random waves, Ocean Engineering, Vol. 14, No. 5, pp. 389-407, 1987
- 久米均: 数理統計学, コロナ社, 1984
- Kac, M. and Siegert, A. J. F.: On the theory of noise in radio receivers with square law detector, Journal of Applied Physics, Vol. 18, pp. 383-397, 1947
- Kato, S and T. Kinoshita: Nonlinear response of moored floating offshore structures in random waves and its stochastic analysis, 船舶技術研究所報告, 第27巻第4号, pp. 2-143, 1990
- Naess, A. and Jhonsen, J. M.: An effect numerical method for calculating the statistical distribution of combined first-order and wave drift response, Proc. of OMAE, Vol. 2, pp. 59-70, 1991
- 渡辺力, 名取亮, 小国力: Fortran 77 による数値計算ソフトウェア, 丸善出版会, 1990
- Yoshimoto, H.: Characteristics of directional wave spectra measured at Japan sea, Proc. of OMAE, Vol. 1-A, pp. 35-42, 1992
- 井上令作他: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その1 実験の概要, 船舶技術研究所報告, 別冊13号,

Fig. 11 Expected values and mean values of the largest wave amplitude of crest in N observation

1992

- 20) 吉元博文, 安藤定雄, 小林顕太郎: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その3 実験海域の波方向スペクトルについて, 日本造船学会論文集第168号, pp. 255-262, 1990
- 21) 橋本典明, 永井紀彦, 浅井正, 原一晃, 久高将信, 小野修平: 海洋波の方向スペクトルの推定における最大エントロピー原理法 (MEP) の拡張, 海岸工学論文集第40巻, pp. 136-140, 1993

Appendix-A 振幅の極値の最大期待値⁵⁾

1個の山側の振幅の極大値が ξ を越える確率は, 振幅の極大値分布の確率分布関数 $F_p(\xi)$ を用いて $1-F_p(\xi)$ で与えられる。 N 個の独立な振幅の極大値が ξ より小さい確率は $F_p(\xi)^N$, 少なくとも1個の極大値が ξ を越える確率は $1-F_p(\xi)^N$ であるから, 最大極大値が $(\xi, \xi+\delta\xi)$ の間にある確率は

$$f(\xi, N) = N p_p(\xi) [1 - F_p(\xi)]^{N-1} \quad (\text{A-1})$$

で与えられる。ここに, $p_p(\xi)$ は極大値の確率密度関数である。(A-1)式から振幅の N 個中の極大値の最大期待値 $E[\xi_N]$ は, 次式で求めることができる。

$$E[\xi_N] = \int_0^\infty \xi f(\xi, N) d\xi \quad (\text{A-2})$$

なお, $F_p(\xi)$ と $p_p(\xi)$ は, 水位変動の変位と速度が独立であるとすれば, 次式で求めることができる¹⁵⁾。

$$F_p(\xi) = 1 - \frac{p(\xi)}{p(\bar{\xi})} \quad (\text{A-3})$$

$$p_p(\xi) = \frac{d}{d\xi} \{F_p(\xi)\} = -\frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{p(\xi)}{p(\bar{\xi})} \right\} \quad (\text{A-4})$$

ここに, $\bar{\xi}$ は水位変動の平均値である。谷側の振幅の極小値の最大期待値については, $\xi \rightarrow -\xi$ として扱えば, 山側の振幅と同様にして求めることができる。