フレーム構造物の固有値問題における有限要素解析の事後誤差評価に関する研究

正員 北村 充* 学生員 陳 玉华**
正員 信川 寿* 正員 大坪 英臣***

A Study on *A Posteriori* Error Estimation of Finite Element Analysis for
Eigenvalue Problem of Frame Structures

by Mitsuru Kitamura, *Member* YuHua Chen, *Student Member*
Hisashi Nobukawa, *Member* Hideomi Ohtsubo, *Member*

Summary

A *posteriori* error estimation method for finite element solutions of natural frequencies and natural mode shapes of structures is proposed in this paper. The governing equations of a *posteriori* error for free vibration problems are introduced. A method used for solving the error equations is presented and an efficient solution strategy is developed since it is difficult to solve the error equations directly. A technique of eliminating the degrees of freedom at the mid-node of element is developed in order to reduce the size of matrix in error equations. The finite element solutions of eigenvalues and eigenvectors are improved by adding the estimated error onto the original solutions.

1. 緒 言

有限要素法は構造問題を中心とした幅広い分野で利用されている有力な工学解析手法であるが、解の精度はメッシュ分割に大きく依存している。不適切な分割メッシュを用いた解析は無視できない誤差を有するため、有限要素解析の事後誤差評価は注目されており、Zienkiewicz や大坪らにより静的問題を中心として様々な研究が行われて来た¹⁻⁶⁾。しかし、動的問題における事後誤差評価の研究はまだ確立されておらず、さらに、著者らの知る範囲においては自由振動問題の事後誤差評価法は報告されていない。このような背景から、本論文は自由振動固有値問題、特にフレーム構造物を対象とした事後誤差評価法について研究する。

2. 事後誤差評価法の理論

2.1 固有値問題における事後誤差の支配方程式

* 広島大学工学部

** 広島大学大学院

*** 東京大学大学院

原稿受理 平成9年1月9日

春季講演会において講演 平成9年5月15日

棒の縦振動の支配方程式と境界条件式は次のように与えられる。

$$AE \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = A\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (3)$$

ここで、 $u(x, y)$ は縦方向変位、 E は弾性係数、 A は断面積、 ρ は質量密度である。領域 Ω は境界 Γ_u または Γ_σ に囲まれているが、これらの境界上では変位 $\bar{u}$ と表面力 $\bar{\sigma}$ がそれぞれ与えられている。仮想仕事の原理により、次の弱形式が導かれる。

$$\int_{\Omega} v A \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\Omega + \int_{\Omega} AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega - AE \left[v \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma_\sigma} = 0 \quad (4)$$

ここで v は仮想変位である。式(4)より有限要素方程式が導かれ、固有振動数と固有ベクトルを求めることができる。厳密解 $u(x, t)$ と有限要素解 $\bar{u}(x, t)$ は以下のように表現される。

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t \quad (5)$$

$$\bar{u}(x, t) = \bar{U}(x) \sin \bar{\omega} t \quad (6)$$

ここで $U(x)$ と ω は厳密解の変位振幅と固有振動数であり、 $\bar{U}(x)$ と $\bar{\omega}$ は有限要素解である。有限要素解 $\bar{U}_i(x)$ は

内挿関数を有するベクトル $\{\hat{N}(x)\}$ と節点における変位振幅を有するベクトル $\{\hat{U}\}_i$ により表現される。

$$\hat{U}_i(x) = \{\hat{N}(x)\}^T \{\hat{U}\}_i \quad (7)$$

ここで添え字 i は要素 i を表している。有限要素法に用いられる近似関数は変位を厳密に表現できないため、有限要素解は残差 r_i を発生させる。

$$r_i = A\rho \frac{\partial^2 \hat{u}(x,t)}{\partial t^2} - AE \frac{\partial^2 \hat{u}(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{in } \Omega_i \quad (8)$$

式(8)に対して仮想仕事の原理を適用し、全要素において合成すると次式を得る。

$$\sum_i \int_{\Omega_i} v r_i d\Omega = \sum_i \int_{\Omega_i} \left(v A \rho \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) d\Omega - AE \left[v \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right]_{r_\sigma} - \sum_{ij} v \lambda_{ij} \quad (9)$$

$$\lambda_{ij} = \left(AE \frac{\partial \hat{u}(x,t)}{\partial x} \right)_i - \left(AE \frac{\partial \hat{u}(x,t)}{\partial x} \right)_j \quad \text{on } \Gamma_{ij} \quad (10)$$

上式中の λ_{ij} は要素 i と j 間の要素境界 Γ_{ij} における境界力の不連続量である。式(5), (6)を式(4), (9)に代入すると次式が導かれる。

$$\left(- \int_{\Omega} v A \rho \omega^2 U d\Omega + \int_{\Omega} AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} d\Omega - AE \left[v \frac{\partial U}{\partial x} \right]_{r_\sigma} \right) \sin \omega t = 0 \quad (11)$$

$$\left(- \int_{\Omega} v A \rho \hat{\omega}^2 \hat{U} d\Omega + \int_{\Omega} AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} d\Omega - AE \left[v \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right]_{r_\sigma} - \sum_{ij} v \lambda_{ij} - \int_{\Omega} v R d\Omega \right) \sin \omega t = 0 \quad (12)$$

ここで、

$$R = -A\rho \hat{\omega}^2 \hat{U} - AE \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial x^2} \quad \text{in } \Omega \quad (13)$$

$$\Lambda_{ij} = \left(AE \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right)_i - \left(AE \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right)_j \quad \text{on } \Gamma_{ij} \quad (14)$$

$\sin \omega t \neq 0$, $\sin \hat{\omega} t \neq 0$ であるため、式(11), (12)は次式と等価である。

$$- \int_{\Omega} v A \rho \omega^2 U d\Omega + \int_{\Omega} AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} d\Omega - AE \left[v \frac{\partial U}{\partial x} \right]_{r_\sigma} = 0 \quad (15)$$

$$- \int_{\Omega} v A \rho \hat{\omega}^2 \hat{U} d\Omega + \int_{\Omega} AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} d\Omega - AE \left[v \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \right]_{r_\sigma} - \sum_{ij} v \Lambda_{ij} - \int_{\Omega} v R d\Omega = 0 \quad (16)$$

式(15)から式(16)を引くと次式を得る。

$$\int_{\Omega} v A \rho e_u d\Omega + \int_{\Omega} AE \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial e_u}{\partial x} d\Omega - AE \left[v \frac{\partial e_u}{\partial x} \right]_{r_\sigma} + \sum_{ij} v \Lambda_{ij} = - \int_{\Omega} v R d\Omega \quad (17)$$

これは固有値問題における事後誤差の弱形式であり、 e_u と e_a は、それぞれ、変位振幅と加速度振幅における誤差である。

$$e_u(x) = U(x) - \hat{U}(x) \quad (18)$$

$$e_a(x) = (-\omega^2 U(x)) - (-\hat{\omega}^2 \hat{U}(x))$$

$$= -\omega^2 U(x) + \hat{\omega}^2 \hat{U}(x) \quad (19)$$

要素 i における変位振幅と加速度振幅の誤差を次式により内挿する。

$$e_u(x) = \{N(x)\}^T \{e_u\}_i \quad (20)$$

$$e_a(x) = \{N(x)\}^T \{e_a\}_i \quad (21)$$

ここで $\{e_u\}_i$ と $\{e_a\}_i$ は要素 i に関する節点振幅を有するベクトルである。この内挿関数を用いた有限要素法を式(17)に適用すると次の有限要素方程式を得る。

$$[M]\{e_a\} + [K]\{e_u\} = \{G\} - \{A\} \quad (22)$$

ここで $\{G\}$ と $\{A\}$ は、それぞれ、残差 R と境界力不連続量 Λ_{ij} の合成により得られる $\{A\}$ に起因する等価節点力ベクトルである。

自由振動問題において、要素 i に関する残差力 $R_i(\hat{U})$ は以下のように弾性力に關係する量 $R_i^e(\hat{U})$ と慣性力に關係する量 $R_i^s(\hat{U})$ に分解できる。

$$R_i(\hat{U}) = R_i^e(\hat{U}) + R_i^s(\hat{U}) \quad (23)$$

式(23)の表現を用いると、残差に起因する等価節点力ベクトルは

$$\begin{aligned} \{G\}_i &= - \int_{\Omega_i} \{N\}^T (R_i^e(\hat{U}) + R_i^s(\hat{U})) d\Omega_i \\ &= \{G^e\}_i + \{G^s\}_i \end{aligned} \quad (24)$$

になる。このような $\{G\}$ の分離を用いることにより式(22)は次式になる。

$$[M]\{e_a\} + [K]\{e_u\} = \{G^e\} - \{A\} + \{G^s\} \quad (25)$$

式(25)は棒の縦振動の自由振動における事後誤差式であるが、同様な展開はフレーム要素のその他の自由度成分に対しても成立する。事後誤差の主成分は元の有限要素解析に用いた有限要素の近似関数の次数よりも1階高次であるため、2節点(12自由度)アイソパラメトリック要素により求められた有限要素解の事後誤差を3節点(18自由度)アイソパラメトリック要素を用いて解析する。

2.2 誤差ノルム

自由振動問題において、全領域と各要素における事後誤差ノルムは次式により与えられる。

$$\|e\| = \sqrt{\|e^u\|^2 + \|e^k\|^2} \quad (26)$$

$$\|e\|_i = \sqrt{\|e^u\|_i^2 + \|e^k\|_i^2} \quad (27)$$

$$\|e^u\|^2 \sum_i \|e^u\|_i^2 = \sum_i \int_{\Omega_i} e_\sigma^T E^{-1} e_\sigma d\Omega_i \quad (28)$$

$$\|e^k\|^2 = \sum_i \|e^k\|_i^2 = \sum_i \int_{\Omega_i} e_v^T \rho e_v d\Omega_i \quad (29)$$

上式中 $\|e^u\|$ と $\|e^k\|$ は、それぞれ、ひずみエネルギーと運動エネルギーに關係するエネルギーノルムであり、 e_σ と e_v はそれぞれ応力と速度の誤差である。

$$e_\sigma = E \frac{\partial e_u(x)}{\partial x} \quad (30)$$

$$e_v = \omega U(x) - \hat{\omega} \hat{U}(x) \quad (31)$$

3. 事後誤差の解法

整合質量マトリックス (consistent mass matrix) を適

用した有限要素解析により求められた固有振動数 $\hat{\omega}$ は厳密な固有振動数 ω よりも大きくなるため、

$$\hat{\omega} = \omega + \Delta\omega \quad (32)$$

と表現できる。ここで $\Delta\omega$ は固有振動数の誤差になる。式(18)、(32)を式(19)に代入すると次式を得る。

$$\{e_a\} = -\omega^2\{e_u\} + (2\Delta\omega \cdot \omega + \Delta\omega^2)\{U\} \quad (33)$$

式(33)を式(25)に代入すると、パラメータ β を含む事後誤差式が導出される。

$$([K] - \omega^2[M])\{e_u\} = \{G^e\} - \{A\} + \beta\{G^s\} \quad (34)$$

$$\beta = 1 - 2 \frac{\omega}{\hat{\omega}} \cdot \frac{\Delta\omega}{\hat{\omega}} - \frac{\Delta\omega^2}{\hat{\omega}^2} \quad (35)$$

いままで述べられた式において $\{e_u\}$ は質量マトリックスに関して正規化されている。つまり、

$$(\{\tilde{U}\} + \{e_u\})^T [M] (\{\tilde{U}\} + \{e_u\}) = 1.0 \quad (36)$$

が満足されている。 β は厳密な固有振動数 ω により決定される数値であるため、誤差解析前に β を決定することは難しいが、厳密な β を用いなくても式(34)を解いて得られた $\{e_u\}$ は正規化後には常に同じ値になるため、事後誤差式は以下のようになる。

$$([K] - \omega^2[M])\{e_u^0\} = \{G^e\} - \{A\} + \beta^0\{G^s\} \quad (37)$$

$\{e_u^0\}$ は β^0 に依存する値であり、正規化されていないが、 $\{e_u^0\}$ と正規化された $\{e_u\}$ の差は質量マトリックスに対する正規化係数の違いに帰着する。この非線型方程式の未知数は方程式数より常に1つ多いため、式(37)を解いて $\{e_u^0\}$ と ω を求めることは非常に難しい。この問題点を解決するために簡単・効率的な解法を検討する。

次のようにパラメータ α を導入する。

$$\omega = \alpha \hat{\omega} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (38)$$

式(38)を式(37)に代入することにより事後誤差の方程式はパラメータ α を含む次式になる。

$$([K] - \alpha^2 \hat{\omega}^2 [M])\{e_u^0\} = \{G^e\} - \{A\} + \beta^0\{G^s\} \quad (39)$$

上式において α の値を定めることにより、事後誤差方程式(39)は線型式になり、 $\{e_u^0\}$ は簡単に求められる。また、固有ベクトルは次のように修正することができる。

$$\{\tilde{U}^0\} = \{\tilde{U}\} + \{e_u^0\} \quad (40)$$

$\{\tilde{U}^0\}$ は予測誤差を足し込むことにより修正された固有ベクトルであり、次のように正規化できる。

$$\{\tilde{U}\} = \frac{1}{C_M} \{\tilde{U}^0\} = \frac{1}{C_M} (\{\tilde{U}\} + \{e_u^0\}) \quad (41)$$

ここで、

$$C_M = \sqrt{\{\tilde{U}^0\}^T [M] \{\tilde{U}^0\}} \quad (42)$$

修正された固有振動数 $\hat{\omega}$ は次の Rayleigh 商により求められる。

$$\hat{\omega}^2 = \frac{\{\tilde{U}\}^T [K] \{\tilde{U}\}}{\{\tilde{U}\}^T [M] \{\tilde{U}\}} = \{\tilde{U}\}^T [K] \{\tilde{U}\} \quad (43)$$

この方法においてパラメータ α を定めることが重要になる。厳密解は次のように支配方程式を満足する。

$$([K] - \omega^2[M])\{U\} = \{0\} \quad (44)$$

しかし、任意に与えられた α を用いて得られた解 $\{\tilde{U}\}$ と $\hat{\omega}$ は式(44)を満足できない。つまり、

$$([K] - \hat{\omega}^2[M])\{\tilde{U}\} \neq \{0\} \quad (45)$$

式(45)の不均衡力を減少させるために、目的関数 F を導入する。

$$F = (A_1 - \hat{\omega}^2 B_1)^2 + (A_2 - \hat{\omega}^2 B_2)^2 + \dots + (A_n - \hat{\omega}^2 B_n)^2 \quad (46)$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} = [K]\{\tilde{U}\} \quad (47)$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} = [M]\{\tilde{U}\} \quad (48)$$

ここで n は自由度数である。目的関数 F を最小にすることにより適切な α を求めることができる。本研究では、以下に示す増分法を適用してこの最適化問題を解き、適切な n を決定する。

- $\alpha^{(0)} = \hat{\omega}_{k-1} / \hat{\omega}_k$ にセットする。ここで、 $\hat{\omega}_{k-1}$ は $k-1$ 番目の修正固有振動数であり、 $\hat{\omega}_k$ は FEM により求められた k 番目の固有振動数である。 $\Delta\alpha$ を適切な数値に決定し、 $m=0$ にセットする。
- $m = m+1$ とし、 $\alpha^{(m)} = \alpha^{(m-1)} + \Delta\alpha$ により $\alpha^{(m)}$ を定める。
- 式(39)より固有ベクトルの誤差 $\{e_u^0\}^{(m)}$ を求める。また、式(40)～(43)により固有振動数と固有ベクトルの修正値を求める。
- 式(46)より目的関数 F を算出する。
- 目的関数 F が最小 ($F^{(m)} > F^{(m-1)}$) になるまで、step-b)～step-d) を繰り返す。
- $\{\tilde{U}\}^{(m-1)}$ と $\hat{\omega}^{(m-1)}$ は事後誤差解析による修正された固有ベクトルと固有振動数になる。

4. マトリックスサイズの縮退

元の有限要素解析に用いた要素よりも1階高次の内挿関数を事後誤差解析に使用する必要があるため、事後誤差解析のマトリックスサイズは大きくなり、計算量も増加してしまう。ここでは、式(34)を解くにあたり、要素中央節点における自由度を消去する方法を利用する。要素 i に対する事後誤差式は次のようになる。

$$[\bar{K}]\{e_u\}_i = \{G^e\}_i - \{A\}_i + \beta\{G^s\}_i \quad (49)$$

$$[\bar{K}]_i = ([K] - \alpha^2 \hat{\omega}^2 [M])_i \quad (50)$$

両端節点における変位振幅を有するベクトルを $\{e_1\}_i$ とし、要素中央節点におけるものを $\{e_2\}_i$ とすると、式(49)は次式のように分割表現される。

$$\begin{Bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] \end{Bmatrix}_i \begin{Bmatrix} \{e_1\} \\ \{e_2\} \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} \{G_1^e\} \\ \{G_2^e\} \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \{A_1\} \\ \{A_2\} \end{Bmatrix}_i + \beta \begin{Bmatrix} \{G_1^s\} \\ \{G_2^s\} \end{Bmatrix}_i \quad (51)$$

$\{G_1^e\}, \{G_2^e\}, \{G_1^s\}$ および $\{G_2^s\}$ は既知であるが、境界力不連続量 $\{A_1\}$ は未知である。しかし、フレーム問題において要素中央節点は他の要素と接していないため、境界力の連続性が保証されている。つまり、境界力不連続量 $\{A_2\}$ はゼロになる。上式に対してこの条件を用いると

$$\begin{aligned} & [\bar{K}_{11}]_i \{e_1\}_i + [\bar{K}_{12}]_i \{e_2\}_i \\ & = \{G_1^e\}_i - \{A_1\}_i + \beta \{G_1^s\}_i \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & [\bar{K}_{21}]_i \{e_1\}_i + [\bar{K}_{22}]_i \{e_2\}_i \\ & = \{G_2^e\}_i + \beta \{G_2^s\}_i \end{aligned} \quad (53)$$

を得る。式(53)より $\{e_2\}_i$ を求め、式(52)に代入すると

$$[\bar{K}]_i \{e_1\}_i = \{\hat{G}_1^e\}_i - \{A_1\}_i + \beta \{\hat{G}_1^s\}_i \quad (54)$$

を得る。ここで、

$$[\bar{K}]_i = [\bar{K}_{11}]_i - [\bar{K}_{12}]_i [\bar{K}_{22}]_i^{-1} [\bar{K}_{21}]_i \quad (55)$$

$$\{\hat{G}_1^e\}_i = \{G_1^e\}_i - [\bar{K}_{12}]_i [\bar{K}_{22}]_i^{-1} \{G_2^e\}_i \quad (56)$$

$$\{\hat{G}_1^s\}_i = \{G_1^s\}_i - [\bar{K}_{12}]_i [\bar{K}_{22}]_i^{-1} \{G_2^s\}_i \quad (57)$$

要素中央節点自由度の除去により事後誤差評価における全自由度数は元の有限要素解析のものと同しくなる。さらに、事後誤差解析は線型な方程式を解くことだけであるため、元の固有値解析と比較しても非常に少ない計算量で事後誤差解析を行なうことができる。

5. 数値解析例

ここでは数値解析例を用いて本研究で提案する事後誤差解析手法の精度および有効性を検証する。

5.1 平面フレーム問題

Fig. 1-a) に示される平面フレームの問題を Fig. 1-b) の有限要素モデルを用いて解析する。有限要素解析には2節点アイソパラメトリック要素を使用し、事後誤差解析には3節点アイソパラメトリック要素を使用する。また、3節点

a) Structure model of plane frame

b) Finite element sub-division

Fig. 1 Plane Frame Problem

アイソパラメトリック要素を用いた有限要素解析も行い、参考解 'ref' として用いる。参考解を厳密解とみなすことにより、本事後誤差評価により修正された解 'est' の精度を検証する。有限要素法により求められた固有振動数、事後誤差評価により修正された固有振動数、および、参考の固有振動数を Table 1 に示すが、本事後誤差評価により非常に精度よく固有振動数が修正されたことが分る。Table 2 は第1, 第4, 第6固有振動数における目的関数 F とパラメータ α の関係を表すが、誤差により修正された固有振動数はパラメータ α に依存しないことが示されている。たとえば、第6固有振動数において、 α が 0.4~0.9 (適切な α は 0.64) の範囲で変化しても非常に良い結果が得られている。パラメータ α を任意に設定しても同様の精度の解が得られるこの現象は本解析手法において非常に重要である。このように、厳密な α を求める必要がないなら、ここで提案する事後誤差評価法は計算量が少ない有効な手法である。

ひずみエネルギーと運動エネルギーに関する誤差ノルムの分布が Fig. 2, 3 に示されているが、ひずみエネルギーに関する誤差が非常に大きな割合を占めていることが分る。モードの次数が増加するに従って運動エネルギーに関する誤差の割合が増加する傾向がみられる。また、誤差のエネルギーノルムの分布傾向は各モードによって異なっている。たとえば、第3要素は第1モードにおいて誤差ノルムが最も大きな要素であるが、第6モードにおいて誤差ノルムが最も小さい要素になっている。

予測誤差ノルムと参考誤差ノルムの比が Fig. 4 に示されているが、全要素において $\|e\|^{est}/\|e\|^{ref} \approx 1$ になって

Table 1 Comparison of eigenvalues for the plane frame problem

Mode #	$\hat{\omega}$	ω^{est}	ω^{ref}	F	α
1	15.87	15.35	15.35	0.003	0.967
2	24.45	23.28	23.28	4.689	0.952
3	56.97	52.77	52.77	5.444	0.927
4	131.87	112.58	112.58	0.587	0.850
5	260.72	196.80	196.80	2.132	0.755
6	475.82	304.88	304.88	0.159	0.640

Table 2 Relationship between the modified eigenvalue and parameter α for the plane frame problem

First mode		Fourth mode		Sixth mode	
α	ω^{est}	α	ω^{est}	α	ω^{est}
0.50	15.35	0.50	112.58	0.40	304.90
0.70	15.35	0.70	112.58	0.55	304.90
0.90	15.35	0.85	112.58	0.64	304.88
0.967	15.35	0.95	112.62	0.80	305.45
1.00	15.35	1.00	114.02	0.95	309.72

Fig.2 Strain and kinetic energy norm of estimated error for the first mode

Fig.3 Strain and kinetic energy norm of estimated error for the sixth mode

Fig.4 Ratio of estimated energy norm of error to referred energy norm of error

いる。これより、事後誤差ノルムは非常に精度よく求められていると言える。

5.2 立体フレーム問題

立体フレーム問題を Fig. 5 a) に示すが、これは小形船舶

b) Finite element sub-division

Fig.5 Space Frame Problem

Table 3 Comparison of eigenvalues for the space frame problem

Mode #	$\hat{\omega}$	ω^{est}	ω^{ref}	F	α
1	88.16	75.90	75.90	0.313	0.86
2	119.07	110.45	110.45	2.796	0.95
3	240.53	209.01	209.01	5.616	0.85

 Table 4 Relationship between the modified eigenvalue and parameter α for the space frame problem

First mode		Second mode		Third mode	
α	ω^{est}	α	ω^{est}	α	ω^{est}
0.60	75.98	0.60	110.56	0.60	209.30
0.70	75.91	0.70	110.47	0.70	209.05
0.80	75.90	0.80	110.45	0.80	209.01
0.86	75.90	0.85	110.45	0.85	209.01
0.90	75.90	0.90	110.45	0.90	209.01
0.95	75.90	0.95	110.45	0.95	209.01
1.00	75.90	1.00	110.45	1.00	209.02

のユニット化機関室のラック構造の固有値解析である。Fig. 5-b) に 60 要素により構成される解析メッシュを示す。有限要素解析結果と事後誤差解析結果、および、細かな分割メッシュによる参考解析結果が Table 3 に示されているが、本事後誤差解析により固有振動数が精度よく修正されていることが分る。Table 4 に示されるように、パラメータ α を幾つかの値に設定して固有振動数を求めたが、前述の例題と同様に、固有振動数はパラメータ α の設定値

に依存せずに同一の値が得られている。たとえば、厳密な α は 0.86 であるにも関わらず、第 1 モードでは α が 0.60~1.0 間で変化しても同一の結果を得ることができた。第 2 モード、第 3 モードにおいても同様な結果が得られている。

6. 結 言

本論文では有限要素法による自由振動固有値解析の事後誤差評価を行ない、事後誤差ノルムの予測と固有振動数と固有ベクトルの修正を試みた。特に、フレーム要素に着目して事後誤差の支配方程式を導出した。事後誤差式の解析方法、および、Rayleigh 商を用いた修正固有振動数を求める手法を提案した。例題において、本解析手法により求められた事後誤差ノルム、修正された固有振動数と固有モードは高い精度を有している。また、事後誤差解析のより求められる解や誤差ノルムはパラメータ α に依存しない傾向を示すことが例題により示された。実際の事後誤差解析においてはパラメータ α を厳密に定めることなく、事後誤差解析を行なうことができる。これより、元の有限要素解析と比較して事後誤差解析に要する計算量を大幅に縮小することが可能と考えられる。

本研究は造船学術研究推進機構により援助を受けた「有限要素法による船体振動解析の誤差評価に関する研究」の一貫として実施したものである。本研究の実施にあたり、関係各位に御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz OC and Zhu JZ, "A Simple Error Estimation and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 24, (1988), 337-357.
- 2) Ohtsubo H and Kitamura M, "Element by Element *A Posteriori* Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 29, (1990), 233-244.
- 3) Ohtsubo H and Kitamura M, "Element by Element *A Posteriori* Error Estimation of the Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 33, (1992), 1755-1769.
- 4) Ohtsubo H, Suzuki K and Sato K, "A *Posteriori* Error Estimation in Finite Element Analysis for Elastodynamic Problem", *JSME*, Vol 57-541 (A), (1991), 1979-1985.
- 5) Wiberg NE and Li XD, "A Postprocessed Error Estimation and an Adaptive Procedure for the Semidiscrete Finite Element Method in Dynamic Analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 37, (1994), 3585-3603.
- 6) Babuska I and Strouboulis T, "Validation of *A Posteriori* Error Estimators by Numerical Approach", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol 37, (1994), 1073-1123.