姿勢変化を伴う半滑走艇の CFD シミュレーション法

正員 折 原 秀 夫* 正員 宮 田 秀 明**

CFD Simulation Method for Semi-Planing Boats with Reference to the Change of Running Attitude

by Hideo Orihara, *Member* Hideaki Miyata, *Member*

Summary

A new CFD simulation method is developed for a semi-planing boat in unsteady motion. The density function method for the free surface treatment and the moving-grid method for the moving body boundaries are applied. The motion of a boat is simultaneously solved by combining the equation of the motion of the boat with the flow computation based on the finite volume method. Simulations for two types of semi-planing boat are performed in the Froude number range from 0.5 to 1.0 and the simulation results are compared with the experimental ones. It is shown that the CFD simulation method can simulate the flow around a semi-planing boat with sufficient degree of accuracy and it can be used as an effective tool for the development of hull form.

1. 結 言

近年船舶の高速化の流れの中で、一般の排水量型船舶に比べより高いフルード数 (F_n) 域で航行する半滑走艇 (semi-planing boat) が数多く建造されるようになってきている。半滑走艇は従来小型の旅客船や漁船等として用いられて来たが、最近は高速フェリーの普及によって、全長が 100 メートルを越える大型のものが建造されるようになってくるとともに、実用目的で建造される高速艇の大部分を占めている。このように半滑走艇は広く実用されている反面、通常の排水量型船舶の場合に比べ半滑走艇周りの流場については、理論的、実験的の手法を問わず、取り扱った研究は少なく、流場の構造に関してもこれまで殆ど明らかにされていない。

半滑走艇は、通常単胴型高速船のうち排水量型船舶とモーターボートの競争艇に代表される滑走艇との間の速度域、即ち水線長ベースのフルード数 ($F_n = U_0 / (gL_{wl})^{0.5}$, U_0 :

船速, L_{wl} : 水線長) において概ね $0.5 < F_n < 1.1$ 程度で航行する船舶として分類されている。このような速度域では船体に作用する動的圧力の大きさが無視し得ぬ大きさとなり、さらに船体表面上での正圧と負圧とがそれぞれ船首と船尾とに偏って分布するようになるため、特にラストハンプと呼ばれる $F_n \sim 0.5$ 付近で船体姿勢中でも重心回りのトリムが大きく変化して、著しい船首上げトリムの状態となると同時に、船体抵抗の急激な増加が発生する。このため、一般に半滑走艇はこうしたラストハンプ域での抵抗増大を緩和し動的圧力の効果を利用するため、通常の排水量型船舶の船型とは異なる半滑走船型、即ち船長の大部分でハードチェーンと船尾でのトランサムスターンの特徴とする船型が採用されている。

こうした船型を有する半滑走艇周りの流場は、上記の船体の航走姿勢の変化の影響とともに、船首近傍でのスプレの発生や、トランサムスターン周りでの不連続的な船尾波の発生等極めて非線形性の強い流体現象が発生して、通常の排水量型船舶の場合の流場とは大きくその様相が異なるものとなる。また、しばしば船体に働く流体力に起因するポアロイングや横不安定現象等の動的不安定現象が発生するため、船体の流体力学的性能評価の観点から見て半滑走艇周り流場の流体力学的取り扱い極めて困難なものとなっている。

* 日立造船 (研究当時東京大学大学院工学系研究科修士課程)

** 東京大学大学院工学系研究科

このような流場の複雑さのため、半滑走艇まわり流場に関する研究は殆どの場合実験の手法が用いられてきた。しかし、半滑走艇等高速船の実験を行なう場合には、相似模型を用いる場合の高速曳航時の浅水影響や小型模型使用時の重量超過による排水量補正が必要となること、また実船実験の場合には波や潮流による外乱の影響等が存在するため、排水量型船舶の場合と比較すると実験の手法は必ずしも満足すべき手法とはなり得ていない。

一方理論的研究として、線型理論を用いて半滑走艇まわり流場を取り扱う試みがなされており、これまでに船体の航走姿勢の変化を含めた半滑走艇まわりの流場を取り扱った研究が報告されている^{1),2),3)}。しかし、これらの研究では基本的に流場の線形性を仮定した取り扱いを行っているため、先に述べたスプレーの発生等半滑走艇周りの流場にみられる非線形性の強い現象の取り扱いが必ずしも十分ではない。このため船体航走姿勢、抵抗係数等についての実験値との比較においても計算値の推定精度は必ずしも十分ではなく、半滑走艇の推進性能を取り扱う手法としては改善の余地が大きいものと考えられる。

このように、半滑走艇周りの流場では流れの非線形性が支配的となること及び実験的方法を用いる場合の制約が大きいことから、計算流体力学(CFD)的方法を用いた取り扱いが有効であると考えられる。しかし、排水量型船舶の推進性能評価を主たる対象として開発されてきた従来のCFDの手法では、先に述べた非線形性の強い自由表面変形や鉛直断面内の縦運動など半滑艇に特有な現象を取り扱うことは困難であるため、通常の半滑走艇周り流場を取り扱った例はこれまで殆どなく、僅かに完全滑走状態の高速滑走艇を対象としたものとして、オイラー方程式の有限差分法を用いた柱状滑走艇周り流場の計算⁴⁾及び同様の形状をNavier-Stokes (NS) 方程式の有限体積法により計算した例⁵⁾があるのみであり、航走時の船体の姿勢変化や船体の運動を取り扱った例は未だ報告されていない。

そこで、本研究ではこのような半滑走艇に関する流体力学的取り扱い法の現状を踏まえ、船体周りの非線形性の強い自由表面変形とともに、船体の動的な航走姿勢の変化やポーポイジングに代表される動的不安定現象を取り扱い得る新たな半滑走艇流体力学的性能評価法の確立を目指し、船体の姿勢変化を考慮した半滑走艇のCFDシミュレーション法の構築を行なうものである。本研究で用いる数値計算法は、セーリングボートの6自由度運動の取り扱いを主たる対象として秋元によって開発されたWISDAM-VII⁶⁾をもとに構築したものである。今回、半滑走艇を対象としてより高 Fn 流場へ適用範囲を拡張するため、自由表面の取り扱いにこれまで碎波を含む船体周りの非線形造波の計算等に用いられてきた密度関数法^{7),8)}を取り入れ計算アルゴリズムの改良を図るとともに、半滑走艇の形状および激しい自由表面の変形に適応した計算格子を作成するため格

子生成法についても変更を加えている。

以下、第2章において本研究で新たに開発したCFDシミュレーション法WISDAM-VIIIの概要について述べた後、第3章では本手法の精度検証を目的として船型試験水槽で行なった実験の結果およびシミュレーション精度検証について述べる。第4章では半滑走艇周りの流場構造の解明を目的として、船体姿勢を固定とした条件での定常航走シミュレーションを行い、計算から明らかにされた流場の構造および Fn 影響に関する考察について述べる。さらに第5章では船体のトリム、ヒープを自由とした状態の船体姿勢変化のシミュレーションを行ない、本研究で開発したWISDAM-VIIIの運動状態への適用性を示すとともに、船体設計への応用についても述べる。第6章で本研究で得られた結論について述べる。

2. CFDシミュレーション法

2.1 座標系および計算格子

本研究では、船体とともに前進速度 U_0 で移動する慣性座標系を用い、座標系の原点を水面上船体中央の位置に取り、 x 軸を船尾方向に z 軸を鉛直上向きにとる右手系を採用する。

計算格子については、複雑な3次元形状を有する船体周りの流れを精度良く取り扱うため、一般曲線座標系上で生成された船体適合格子を用いる。格子のトポロジーについては一般に船体周り流れの計算ではO-H型の格子系が用いられる事が多いが、半滑走艇等にみられるトランサムスターンを取り扱う場合、単一構造のO-H型格子では船体形状に適合した格子の生成が困難となることや船体表面への格子の引き付けを行なった場合に船体から離れた部分に偏平な格子が生じ不必要な格子点数の増加を伴うこと、また船体運動計算時において計算不安定の原因となることを考慮し、本研究ではFig. 1に示すO-O型の格子系を採用した。O-O型の格子系を採用することにより、単一構造格子を用いた比較的単純な格子生成を行なった場合でも、トランサムスターン周りに直交性の高い滑らかな格子を生成する事が可能となるとともに、船体近傍のみに計算格子を引き付けることにより計算に用いる格子点数を節約する事が可能となっている。

また、後述のように本研究では自由表面の取り扱いに密度関数法を用いるため、予め自由表面上に格子を配置しておく必要がある。そこで本研究ではFig. 2に示されるように計算領域を静水面の上下で分割し、境界面となる静水面上で双方の格子点が一致するように格子生成を行なった。このような格子生成を行なうことにより、半滑走艇に特有な船体の姿勢変化と自由表面の激しい変形に対応することが可能となっている。

尚、格子生成手法については、毎時間ステップで船体の運動に伴って格子の再生成を行う必要があることを考慮

Fig. 1 O-O type grid system, all grid (above) and near the boat (below).

し、多自由度の船体運動状態でも格子生成に要する計算時間が少なく、効率的に計算を進めることが出来る WIS-DAM-VII⁶⁾ と同様の方法を用いている。

2.2 支配方程式

流場の支配方程式として、以下に示す非定常非圧縮の RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes) 方程式および連続の式を用いている。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} = -\nabla \phi + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は速度ベクトル、 $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$ は乱流応力である。 ϕ は動圧 ρU_0^2 で無次元化された圧力から無次元静水圧 $-z/Fn^2$ を引いたものであり、次式で与えられる。

$$\phi = p/(\rho U_0^2) + z/Fn^2 \quad (3)$$

また全ての変数は垂線間長 L_{pp} 、一様流速 U_0 及び流体密度 ρ で無次元化され、圧力、面積はそれぞれ ρU_0^2 、 L_{pp}^2 で無次元化されている。(1)、(3)式に現れる無次元パラメータ、レイノルズ数 (Re) 及びフルード数 (Fn) はそれぞれ以下のように示される。

$$Re \equiv U_0 L / \nu, \quad Fn \equiv U_0 / (L_{pp} g)^{0.5} \quad (4)$$

ここで ν は流体の動粘性係数、 g は重力加速度である。

2.3 離散化

本研究で用いる計算法では支配方程式(1)、(2)式を有限体積法を用いて離散化し、数値計算を行なう。離散化に

Fig. 2 Schematic sketch of decomposed grid system.

用いるコントロールボリュームの体積を V 、これを構成する面要素の面積ベクトルを $\mathbf{S}$ とし(1)、(2)式の両辺をコントロールボリュームについて積分して、さらにガウスの発散定理を適用すれば(1)、(2)式はそれぞれ次の様に表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{u} dV = \int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S} \quad (5)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (6)$$

ここで $\mathbf{T}$ は応力テンソルであり次式で与えられる。

$$\mathbf{T} = -\mathbf{u}\mathbf{u} - \phi \mathbf{I} + \frac{1}{Re} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] - \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \mathbf{C} + \mathbf{P} + \mathbf{D} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{D}$ はそれぞれ対流項、圧力項、拡散項を示し、ここで乱流応力 $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$ については拡散項 $\mathbf{D}$ に含めて取り扱うものとする。

次に、船体運動に伴う格子移動の影響の評価については、Rosenfeld ら⁹⁾ と同様の移動格子法により考慮する。この時(8)式右辺の応力テンソル $\mathbf{T}$ はコントロールボリューム表面の移動速度ベクトル $\mathbf{v}$ を用いて以下のように改められる。

$$\mathbf{T} = -(\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{u} - \phi \mathbf{I} + \frac{1}{Re} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \mathbf{C} + \mathbf{P} + \mathbf{D} \quad (8)$$

(8)式を用いることにより、船体運動に伴って生じる格子移動の影響は Fig. 3 に示されるように各コントロールボリューム上において界面を通過する見かけ上の移流として移流項に含めて評価される。各項の離散化については、移流項に QUICK スキーム¹⁰⁾ を用いた 3 次精度の上流差分を用い、その他の項には 2 次精度の中心差分を用いる。また、時間積分に関しては 1 次精度の Euler 陽解法を用いる。コントロールボリュームでの変数配置には速度・圧力を共にコントロールボリュームの中心に定義するセル中心変数配置を採用する。

Fig. 3 Definition sketch of mass flux.

2.4 自由表面の取り扱い

半滑走艇周りの流れを取り扱う場合、通常の排水量型船の場合に比べフルード数が大幅に増加するため、自由表面において船首近傍でのスプレーの発生やトランサム後方での不連続的な船尾波の発生等、極めて複雑な変形が生じる。このため数値計算の取り扱いの際には、こうした自由表面の変形に対する取り扱いが重要となる。これまで WISDAM-VII⁶⁾ では波高関数を用いて自由表面の位置を決定し、自由表面に適合する格子を生成する方法を用いてきた。この方法では、自由表面での保存性が満たされやすいという利点を有するものの、急激な波面勾配や碎波等の発生に対しては格子の生成が困難となり計算を行なうことが不可能となるため、半滑走艇周りの自由表面場に対しては制約が大きく必ずしも適切な方法とはなっていない。そこで本研究では自由表面の取り扱い法を変更し、新たに船体にのみ適合し自由表面には直接適合しない格子系と密度関数法(density-function method)^{7),8)} による自由表面の取り扱いを導入した。

自由表面を密度関数法を用いて取り扱う場合、自由表面条件のうち自由表面での質量の保存則に対応する運動学的条件については、自由表面上も含めた全計算領域で定義される密度関数 ρ_m について、自由表面を挟む流体側、外部側での値をそれぞれ $\rho_{m,1}, \rho_{m,2}$ と定義し、以下に示す密度関数に関する輸送方程式、

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_m(u-v)] = 0 \quad (9)$$

を各時間ステップで解き、 $\rho_m = 0.5(\rho_{m,1} + \rho_{m,2})$ となる等値面を自由表面の位置として与えることにより評価される。ここで(9)式左辺第2項では(8)式対流項と同様コントロールボリューム表面の移動速度 v を用いて格子移動の影響を考慮している。離散化については空間に関し対流項の場合と同様な3次上流差分、時間に関し2次精度の Adams-Bashforth 法を用いている。

また自由表面での応力の連続条件である動力学的条件に

Fig. 4 Schematic sketch of the pressure extrapolation.

ついては、自由表面での表面張力および外部側での粘性応力の寄与を無視し、自由表面における速度と圧力の境界条件として、以下に示す近似的な評価を行っている^{7),8)}。このうち速度に関する条件については、Kawamura ら⁸⁾ と同様に、自由表面に隣接する外部側の速度点から自由表面に隣接する流体側の速度点の方向への自由表面までの距離の逆数を係数とした重み付けにより速度の外挿を行なうことによって処理している。また圧力の条件に関しては、自由表面において大気圧を零、即ち $p=0$ とすると、 $\phi = p + z/Fn^2$ より、自由表面での圧力の関係式

$$\phi = z/Fn^2 \quad (10)$$

を得る。ここで z は静止水面位置からの自由表面の高さを示す。そこで、(10)式で与えられる自由表面位置での圧力の値を用い、Fig. 4 に示されるように隣接する圧力点の方向の自由表面上の圧力の値を、その方向での自由表面直下の圧力点に定義されている密度関数 ρ_m と外挿される外部側の圧力点での ρ_m の値との差 $\Delta \rho_{mk,tsrf}$ を係数として、以下に示す重み付け平均をとった値を外部側の圧力点に与えることにより処理している。

$$\phi_{tsrf} = \frac{\sum_k [\Delta \rho_{mk,tsrf} \phi_{s,k}]}{\sum_k \Delta \rho_{mk,tsrf}}$$

where

$$\Delta \rho_{mk,tsrf} = |\rho_{m,k} - \rho_{m,tsrf}| \quad (11)$$

以上のような密度関数法を用いた自由表面の取り扱いでは、自由表面の変形はスカラー量 ρ_m の移流として流場の状態と密接に関連して取り扱うことが可能であることから、流場の変化による自由表面のトポロジーの変化等にも比較的容易に対処することが出来る。特に半滑走艇の場合に一般的なトランサムスターンについて、通常採用されるようなトランサムスターンからの‘滑らかな流出’を仮定

した特殊な取り扱いを行うことなく計算を行うことが可能となっている。このためフルード数の増加に伴ってトランスミタースターン後方の流場が、いわゆる死水状態と船底より滑らかに流出する状態のいずれの場合においても対応が可能となっている。

2.5 その他境界条件

速度の境界条件に関しては、船体表面では船体から見た流体の相対速度が零となる no-slip 境界条件を与える。船体表面の移動速度を $\mathbf{v}_b$ とすると、no-slip 境界条件は以下のように与えられる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_b \quad (12)$$

船体表面の移動速度 $\mathbf{v}_b$ は、船体運動を剛体運動と仮定することにより、次のように求まる。

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega}_h \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \quad (13)$$

$\mathbf{v}_c$ は船体重心の移動速度、 $\boldsymbol{\omega}_h$ は船体の回転角速度ベクトル、 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)$ は重心から各船体表面位置までのレバーを表すベクトルである。

外部境界では、流入境界側ではデリクレ条件で一様流を与え、流出境界側では零勾配条件を与える。

圧力に関しては、自由表面での圧力条件(11)式から圧力 ϕ がデリクレ的に定まり、この値が圧力の基準値となる。船体表面では、上記の速度境界条件を支配方程式(1)式に与え、さらに船体表面で法線ベクトル $\mathbf{n}$ との内積を取ることにより、最終的に圧力に関し以下の関係が成立する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial t} \quad (14)$$

この式は、物体の加速度と圧力の釣合関係が物体表面上で成立することを示し、物体が運動しない場合、即ち $\mathbf{v}_b = 0$ となる場合には、 $\partial \phi / \partial n = 0$ となり零勾配条件と等価になる。

尚、船体表面での拡散項の評価については、境界層内の格子解像度が不十分となることを補うため、壁関数を用いている。

2.6 乱流モデル

乱流モデルについては、半滑走艇まわり流れに特徴的な船首近傍で船体表面上に形成される薄い膜状の流れとそれに続くスプレーの発生や碎波、さらに碎波やスプレーの落下によって生じる自由表面近傍での渦の形成への対応を考慮し、自由表面の任意の変形に容易に対応し得る簡易 SGS 乱流モデルを適用した。

簡易 SGS 乱流モデルでは渦粘性係数 ν_t は次のように与えられる。

$$\nu_t = L_s^2 |\boldsymbol{\omega}| \quad (15)$$

ここで $\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトルである。また、 L_s に関しては、船体表面に引きつけられた計算格子を用いることによって生じるアスペクト比の大きな格子を取り扱うため、等方立方格子からの歪みを考慮して次の式で算定する。

$$L_s = C_1 \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (16)$$

ここで、 $C_1 = 0.5$ 、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ はそれぞれの方向へのコントロールボリュームの間隔である。

2.7 圧力解法

速度の連続条件(2)式によって導出される圧力方程式に関しては、速度、圧力を同一の点で定義するセル中心変数配置の場合に生じる圧力場の振動を防止するため、Rhie ら¹¹⁾、Zang ら¹²⁾と類似のセミスタガード法により圧力場を求めている。以下、圧力解法の概要を述べる。

支配方程式(1)式を Euler 陽解法を用いて離散化し、 $n+1$ 時間ステップでの速度 $\mathbf{u}^{n+1}$ 及び、速度予測子 $\mathbf{u}^*$ を以下のように与える。

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{f} \quad (17)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^{n+1} \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{f}$ は(1)式の対流項と拡散項の寄与分を示す。反復法を用いて(1)式を満足する $(n+1)$ 時間ステップでの圧力 ϕ^{n+1} を求めることを考え、 m イタレーションレベルでの速度 $\mathbf{u}^m$ 及び圧力増分 $\delta \phi^m$ をそれぞれ次のように与える。

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^m \quad (19)$$

$$\delta \phi^m = \phi^{m+1} - \phi^m \quad (20)$$

(19)式の両辺の発散をとると

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}^m &= \nabla \cdot (\mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \phi^m) \\ &= \gamma^m \end{aligned} \quad (21)$$

を得る。(21)式で与えられる発散 γ^m について、 $m = m+1$ で $\gamma^{m+1} = 0$ として圧力に関し展開して一次の項をとることにより、(21)式で与えられる各コントロールボリューム (i, j, k) での発散 $\gamma_{i,j,k}^m$ と圧力の増分 $\delta \phi_{i,j,k}^m$ との間に以下の関係が導かれる。

$$\gamma_{i,j,k}^{m+1} = \gamma_{i,j,k}^m + \frac{\partial \gamma_{i,j,k}^m}{\partial \phi_{i,j,k}^m} \delta \phi_{i,j,k}^m = 0 \quad (22)$$

したがって各コントロールボリュームでの圧力増分 $\delta \phi_{i,j,k}^m$ は

$$\delta \phi_{i,j,k}^m = - \frac{\gamma_{i,j,k}^m}{\left(\frac{\partial \gamma_{i,j,k}^m}{\partial \phi_{i,j,k}^m} \right)} \quad (23)$$

と与えられる。

(21)式を用い、さらに表記の便宜上添字 (i, j, k) を省略すると(23)式は以下のように書き改められる。

$$\delta \phi^m = - \frac{\gamma^m}{\Delta t \frac{\partial (\nabla^2 \phi^m)}{\partial \phi^m}} \quad (24)$$

ここで、セル中心変数配置の場合に特有なチェッカーボード状の圧力振動の発生を防ぐため、Zang ら¹²⁾にならい、新たに各コントロールボリューム界面上に以下のように定義される速度流束 $\mathbf{U}^i$ を与える。

$$\mathbf{U}^i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}^i \quad (25)$$

この時、(19)式と同様にして m イタレーションレベルでの速度流束は(17)、(18)、(25)式より以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} U^{l,m} &= (u^n + \Delta t f) \cdot S^l - \Delta t \nabla \phi^m \cdot S^l \\ &= U^{l,*} - \Delta t \nabla \phi^m \cdot S^l \end{aligned} \quad (26)$$

同様にして圧力増分 $\delta\phi^m$ は

$$\delta\phi^m = \frac{1}{V} \sum_l U^{l,m} \quad (27)$$

と与えられる。ここで、速度流束 U^l と圧力 ϕ は互いにスタガード状に配置されるため、(26)式において圧力勾配 $\nabla\phi$ を互いに隣接する圧力点の圧力を用いて評価することが可能となり、通常、速度圧力に関するスタガード変数配置の場合と同様にチェッカーボード状の圧力振動を防ぐ事が可能となる。

以上、圧力解法の手順をまとめると、各イタレーションレベルで(26)式により速度流束を更新し、(27)式により圧力増分を求め(20)式により圧力を更新することによって速度流束と圧力とを同時緩和して反復の収束値として速度の連続条件(2)式を満足する圧力 ϕ^{n+1} を求めている。そして(18)式により最終的に $(n+1)$ 時間ステップでの速度 u^{n+1} を求めている。

2.8 船体運動の取り扱い

本研究では船体運動の取扱法として、秋元⁶⁾と同様に以下に示す船体運動と格子移動を組み合わせる船体運動を評価する方法を用いている。

船体を剛体と見なすと、並進運動、重心まわりの回転運動について運動方程式が以下のように与えられる。

$$m_h \frac{dV_c}{dt} = F_{hull} + F_{rudder} + F_{propulsor} + \frac{m_h}{Fn^2} e_z \quad (28)$$

$$\frac{dh}{dt} = M_{hull} + M_{propulsor} + M_{rudder} \quad (29)$$

ここで、 V_c は船体重心の速度ベクトル、 h は船体重心周りの角運動量ベクトル、 F_{hull} 、 F_{rudder} 、 $F_{propulsor}$ は、それぞれ船体、舵、推進器が受ける流体力、 m_h は無次元化された船体質量、 e_z は鉛直方向の単位ベクトルを示す。また M_{hull} 、 M_{rudder} 、 $M_{propulsor}$ は、それぞれ船体、舵、推進器が受ける流体力によって生じる重心周りのモーメントである。(28)、(29)式に現れる流体力のうち舵、推進器に作用する流体力 $F_{propulsor}$ 、 F_{rudder} 、 $M_{propulsor}$ 、 M_{rudder} については、これを直接数値計算によって評価することは本研究で用いる数値計算法の範囲内では極めて困難である。したがって運動方程式を解く際には、これらの項については実験計測や理論解析等により得られるモデル式を用いて近似的に評価するものとする。船体に加わる流体力 F_{hull} 、 M_{hull} については、各時間ステップで密度関数分布から与えられる船体浸水表面上で、表面の圧力と摩擦応力を積分することによって評価する。流体計算の中では圧力から静水圧成分を除外した ϕ を変数として取り扱っているため、船体に作用する流体力を求める際には、流体計算で得られた ϕ に静水圧成分 $-z/Fn^2$ を加えて積分する必要がある。

Fig. 5 Flow chart of the solution procedure.

(28)、(29)式で与えられる運動方程式に対し、本研究では、計算の毎時間ステップで圧力、摩擦応力を積分して得られる流体力を外力として与え、船体の運動を解くとともに、運動方程式から得られる船体姿勢の変化に対応した格子の再生成を行ない、新たに生成された格子上で(8)式に示されるように格子移動を考慮した形で速度、圧力を更新することにより、流場と船体運動とのカップリングを行っている。以上、船体運動の取扱を含むCFDシミュレーション法のフローチャートをFig. 5に示す。

3. 計算精度の検証

本研究で開発したCFDシミュレーション法WISDAM-VIIIの精度を検証し、併せて半滑走艇周りの流場構造の理解を深める目的で、東京大学船型試験水槽において船体周り波高計測を行なった。得られた実験結果については、実験で用いたものと同一の船型について行なったCFDシミュレーションでの結果との比較を行ない、定性的、定量的の両面から計算精度の検証を行った。

半滑走艇では抵抗成分の中で圧力抵抗成分の影響が支配的となるとともに、船体に作用する圧力場によって船体の航走姿勢が大きく変化するため、船体周りの圧力場を正確に推定することが重要となる。流体の圧力 ϕ は自由表面で

の動力学的条件(10)式に示されるように波高と対応するので、船体近傍の波高を計測して計算結果との比較を行なうことにより、間接的に船体に作用する圧力場についての計算精度の検証が可能となると考えられる。

3.1 実験方法およびシミュレーション条件

波高の計測には Fig. 6 に示す漁船船型 (hull 'A') の垂線間長さ 1.580 メートルの相似模型を使用した。船体は曳引台車に完全に固定し、船体の姿勢については別に姿勢自由として行った曳航試験の結果を用い、トリム、ヒープに関して Table 1 に示す値を与えた。波高計測については、計測精度を高めるためサーボ式点接触型波高計を用いた。波高計は曳引台車上に設置された電動トラバースに固定され、各航走時に長手方向に垂直な断面内を波面に接触を保ちながら一定速度で船体右舷側を一定のトラバース速度で移動して船体横断面内の波形を計測した。また船体長手方向には、それぞれ L_{pp} ベースの無次元値で 3.165×10^{-3} 間隔で計測を行なった。

今回行なった計測では、船首近傍部のスプレアの発生が見られた箇所については、接触型の波高計を用いたため、計測を行なうことができなかったが、その他の部分では半滑走艇に特徴的なトランサムスターンの波形を含め、良好な計測結果が得られた。

また精度検証のための計算では、実験の場合と同じ船体の航走姿勢を与え、姿勢を固定とした状態で行なった。本

Fig. 6 Body plan of hull 'A'.

Table 1 Condition of the wave height measurement.

Hull Type	Hull 'A'
L_{pp}	1.580 m
Speed	2.019 m/s
Frude Number	0.513
Trim, Heave	0.98(degree), 2.23×10^{-3}

研究では半滑走艇の設計手法としてのCFDシミュレーション法の確立を主たる目的としているため、格子点数は9万点 ($50 \times 30 \times 60$) と比較的小規模の計算としている。その他計算条件については Table 2 に示す。

3.2 結果および考察

Fig. 7, 8 に波高等高線図および断面波形の実験値と計算値との比較を示す。ここで Fig. 7 では下側が、Fig. 8 では図中のプロットがそれぞれ実験値を示し、ともに船長で無次元化された値を示している。また計算値は密度関数 $\rho_m = 0.5$ の等値面として与えられるものであり、オーバータンの発生などで波高が2価以上となる箇所ではその中で最小の値を該当箇所の波高の代表値として等高線図に示している。また、Fig. 8 に示される4断面の位置はそれぞれ Fig. 7 内の縦線で示すとおりである。

Fig. 7 に示す波高等高線図の比較において、図中上側に示されるシミュレーションでの計算結果は下側の実験値と良く一致し、高フルード数で航行する半滑走艇の場合に特徴的な波形を良く再現していることが認められる。即ち、船体前半部から形成される、大波長、小波頂角を有する船首波とそれに続き船尾付近から形成される第二波について波長、位相とも計算結果は実験結果とほぼ正確に一致しており、さらにトランサムスターンを有する船型に特徴的な船尾トランサム角部からの八の字状の船尾波および船尾船底部からの波面の滑らかな流出が明確に再現されている様子が確認される。

ここで、さらにシミュレーションでの実験結果に対する定量的な推定精度を検証するため、Fig. 8 に示される断面波形による比較を行う。Fig. 8 に示される4断面はそれぞれ船体前半部、船体後半部、船尾端直後および船体後方位置に相当し、半滑走艇まわり波形に関し特徴的な断面波形の位置に相当している。即ち、 $x = -0.089$ では船体前半部で形成される急峻な船首波を、 $x = 0.291$ では船首波に続く深い谷の部分、 $x = 0.538$ ではトランサムスターンまわりの波形を、そして $x = 0.728$ では 'rooster-tail' と呼ばれる船尾後方位置での山状の波面の形成の様子をそれぞれ示している。

図中の比較において、各断面とも波高の絶対値において若干の不一致が認められるものの、計算値は実験値の傾向

Table 2 Condition of the computation for hull 'A'.

Frude Number	0.513
Reynolds Number	1.0×10^5
Running Attitude	Fixed
Grid Number	($50 \times 30 \times 60$)
Time of Simulation	4.0
Time of Acceleration	1.0

Fig. 7 Comparison of computed and measured wave contours around a hull 'A' at $Fn=0.513$. The interval of the contours is 0.002.

Fig. 8 Comparison of computed and measured wave profiles on the transverse sections ($Fn=0.513$)

を良く捉えており、計算に用いられた格子点数(9万点)を考慮すれば、シミュレーションの精度はかなり良好であることが確認される。特にトランサムスターンを有する船型に特徴的な船尾直後の波形に注目すると、Fig. 8で $x=0.538$ の断面に見られるように、トランサム下端からの波面の滑らかな流出とその外側での八の字状の船尾波に対応する段状の波形が計算値において明確に捉えられており、半滑走艇周り流れに対し、今回採用したCFDシミュレーション手法の有効性が確認される。

一方で、実験値と計算値との波高の絶対値の比較については、波高等高線図 Fig. 7にも示されるように船体後半部の波高が負の値をとる部分での両者の一致が悪くなっており、この様子は断面波形の比較において $x=0.291, 0.538$ で計算値が実験値に比べかなり減衰されている様子に示されている。この要因は種々考えられるが、まず第一の要因として、レイノルズ数(Re)影響によるものが考えられる。ここで示した計算値は $Re=1.0 \times 10^5$ での値であるのに対して、実験値では 3.3×10^6 での値を示しており、 Re に関して両者の間かなりの差が存在する。この Re の差によって、計算による波が減衰された可能性が考えられるが、一方より大きな要因として格子解像度の影響が考えられる。一般に数値計算での波高の計算精度は、水面付近での鉛直方向の計算格子の密度によって大きな影響を受けることが知られている。今回の計算で用いた格子では、各断面で静止水面下の格子密度は粗く、ハードチャインを有する部分で静止水面の位置からハードチャインの位置までに6個の格子で分割されている。このため波高がマイナス即ち静止水面位置以下となる部分では、このような大きな格子間隔が自由表面の変形を規定する密度関数の輸送方程式を解く際に過剰な数値粘性として働き、その結果 Fig. 8の一部で示されるような不一致が生じたものと考えられる。

4. 流れ構造の検討

既述のように、半滑走艇まわりの流れは通常の排水量型

Fig. 9 Body plan of hull 'B'.

船舶の場合と比べその性質を大きく異にするものであるにもかかわらず、その詳細な構造については、これまで実験的、理論的の手法の如何を問わず殆ど取り扱われておらず、従来行われた研究では多くの場合船体抵抗や姿勢変化量といった積分量に関する考察がなされるにとどまっている。しかし、今後半滑走艇に特有な動的不安定現象の解明や、より一層の推進性能の向上等を指す上では、船体まわりの流れ構造自体を解明することが不可欠であると考えられる。

そこで本研究では、半滑走艇まわり流れに対するフルード数影響と詳細な流れ構造を明らかにすることを目的として、フルード数0.6, 1.0の場合について船体姿勢固定の条件でシミュレーションを行なった。

4.1 シミュレーション条件

シミュレーションの対象としては、Fig. 9に示される高速旅客船船型 hull 'B'を用いた。船型の特徴として、船体前半部では角度の大きいV字型のフレームラインを有し、船体中央部付近から後半部にかけては船底面の捻りを有する断面形状を持ち、船尾では一般的なトランサムスターン形状を有している。船体姿勢に関しては、後に述べる模型船を用いた抵抗試験で得られた値を用いた。この時トリム量はそれぞれフルード数0.6で3.56 (degree), 1.0で3.35 (degree)である。その他計算条件については Table 3に示す。

4.2 結果および考察

Fig. 10に船体横断面内波形の長手方向の変化図を示す。図中上側がフルード数1.0, 下側がフルード数0.6の場合を示し、ともにS.S.9の位置から後方へ0.05間隔で横断面内波形を重ね合わせ、船体正面より後方を見たものである。2つのケースとも格子解像度の不足のため、一般に船首近傍で見られるスプレーについては明確には捉えられていないが、スプレーの発生源と考えられる船体表面付近での波形については2つのフルード数の間で明確な相違が認められる。

即ち、フルード数0.6の場合においては波形は巻き波状の碎波に類似の形態を示しているのに対し、フルード数1.0の場合においては、船体表面上を膜状に鋭く駆け上がるジェット状の形態へと大きく変化している様子が確認され

Table 3 Condition of the computation for hull 'B'.

Frude Number	0.6,1.0
Reynolds Number	1.0×10^5
Running Attitude	Fixed
Grid Number	(50 x 30 x 70)
Time of Simulation	4.0
Time of Acceleration	1.0

Fig. 10 Comparison of longitudinal variations of transverse waveprofiles at $Fn=1.0$ (above) and 0.6 (below), the interval of transverse sections is 0.05 .

Fig. 11 Computed velocity vector (above) and contour of streamwise vorticity component (below), the interval of vorticity is 4.0 and contours of anti-clockwise rotation are drawn in bold lines and clockwise rotation in dotted lines, respectively, $Fn=0.6$.

る。さらにフルード数の相違による流場の変化を詳細に観察するため、フルード数 0.6 , 1.0 の場合について、Fig. 11, 12 に S.S.6 の位置における断面内速度ベクトル図および主流方向渦度成分 ω^1 のコンター図の比較を示す。ここで ω^1 コンター図については反時計まわり成分を実線で、時計まわり成分を破線とともに間隔を 4 として示した。Fig. 11 に示されるフルード数 0.6 の場合については、速度ベクトル図において、前述の巻き波状の碎波によって生じたもの

Fig. 12 same as Fig. 11, the case of $Fn=1.0$.

と考えられる自由表面付近での大きな乱れが認められるとともに、主流方向渦度成分 ω^1 のコンター図においても、これに対応して自由表面下に、船体表面上に形成される境界層に相当する渦度成分と逆向きの渦度成分の形成される様子が確認される。一方、Fig. 12 に示されるフルード数 1.0 の場合では、速度ベクトル図において船体表面状にジェット状に形成される波形の部分でかなり大きな上向き速度成分が見られるものの、船体近傍でフルード数 0.6 の場合に見られたような乱れは無く、また ω^1 コンター図においても船体表面境界層の部分を除いて渦度の形成は殆ど見られないこと等、船体まわりの流場構造がフルード数 0.6 の場合と大きく異なったものであることが確認される。

以上の比較結果より、半滑走艇周りの流場ではフルード数の増加に伴い自由表面の形態が大きく変化するとともに、速度場等流場構造についても顕著な構造変化が生じていることが認められ、流場に対するフルード数影響が大きいことが確認される。

5. 姿勢変化シミュレーション

半滑走艇においては、船体の航走姿勢が推進性能と密接な関連を有するとともに航走フルード数によって船体姿勢が大きく変化し、船体形状や重心位置によっても異なる船体姿勢変化の挙動を示すことから、半滑走艇の性能を評価する上で船体姿勢を求めることが非常に重要となる。そこで本研究では、先に述べた船体まわりの流場計算と運動方程式とをカップリングして船体の運動を取り扱う手法を用い、船体重量と重心位置とを与え船体の運動方程式の定常解として船体の定常航走姿勢を求める姿勢変化シミュレーションを行ない、水槽試験で得られた実験値との比較およびシミュレーションの評価を行なった。

5.1 シミュレーション条件

姿勢変化シミュレーションの対象としては、前章の定常航行シミュレーションの場合と同様に Fig. 9 に示される高速旅客船舶型 hull 'B' を用いた。

計算状態については、重心位置変更時の船体抵抗及び航行姿勢変化を検証する目的で東京大学船型試験水槽で行った抵抗試験の結果を参考にし、 $Fn=0.6$ で剰余抵抗係数に約 6 パーセントの違いが見られた初期トリム 0.0 (degree) と 0.727 (degree) との場合を取り上げる。このとき両者の重心位置の違いは概ね船長の 3 パーセント程度であり、航行トリム量の実験値はそれぞれ 3.01 (degree) 及び 3.56 (degree) となる。計算の初期条件として与えられる船体トリム量はともに 3.35 (degree) とした。また付加物に関しては実験、シミュレーションとも考慮せず、船体のみの曳航状態で行った。

本研究で取り扱う姿勢変化シミュレーションの場合には、基本的に非定常計算の収束解として得られるバランス状態での船体の姿勢及び船体抵抗のみが必要となるため、船体の運動方程式(28)、(29)式の解の時間精度は要求されない。そこで運動計算の収束を早め計算の効率を高める目的で運動方程式に変位の 1 階微分に比例する人工粘性項を付加している。今回行なった姿勢変化シミュレーションでは $T=3.0$ の時点で船体の運動が開始されるため、計算の初期条件として与えられた船体姿勢と運動計算の結果得られるバランス状態での姿勢との差が大きい場合には運動計算の初期の段階で極端に大きな流体外力が作用する場合がある。このような場合には上で示した人工粘性項の付加によって船体姿勢の変動速度をある程度小さくすることが可能となり、計算の安定性が改善されるものと考えられる。

本研究の運動状態計算では、船体に関しては計算で得られた流体力を直接船体の運動方程式の外力として取り扱うが、運動状態での計算条件では計算効率および安定性を高める目的で $Re=1.0 \times 10^5$ として計算を行なっているため、計算で得られた流体力を直接用いた場合、実験状態 ($Re=2.1 \times 10^6$) に比べ流体力の摩擦成分が過大となり結果として船体のバランスが実験状態と計算状態とで著しく異なるものになる可能性がある。

そこで姿勢変化シミュレーションではこの点を修正する近似的取り扱いとして、計算で得られた摩擦抵抗係数 $C_{f,cal}$ と実験 Re で与えられる Schöenherr の摩擦抵抗係数 $C_{f,shnr}$ を用いて船体に働く流体力のうち摩擦成分のみを修正し、船体の運動方程式で外力となる流体力 F_{hull}^* を以下のように与える。

$$F_{hull}^* = \frac{C_{f,shnr}}{C_{f,cal}} f_{hull} + f_{hull} \quad (30)$$

ここで f_{hull} , f_{hull}^* はそれぞれ船体浸水面上で摩擦力、圧力を積分して与えられる計算流体力である。

その他計算条件については、 $T=10.0$ までシミュレーションを行う点及び $T=3.0$ 以降航行姿勢を自由とする点を除き Table 3 に示す定常航行シミュレーションの場合と同様である。

5.2 結果および考察

以下姿勢変化シミュレーション結果を示す。ここで初期トリム 0.727 (degree) の場合をケース 1、初期トリム 0.000 (degree) の場合をケース 2 とする。圧力分布については動圧 ρU_0^2 で無次元化された圧力から静水圧成分 $-z/Fn^2$ を除いた ϕ を示すが、流体力については静水圧成分を含めて無次元化した圧力成分を用いる。また、抵抗係数については、計算値では船体浸水表面上で圧力を積分し静止時の浸水表面積および $1/2\rho U_0^2$ で無次元化した値を剰余抵抗係数として与えている。一方実験値では、計測で得られた全抵抗を計算値の場合と同一の静止時浸水表面積を用いて無次元化し、二次元外挿法により剰余抵抗係数を与えている。

Fig. 13 に船体のトリム角の時間履歴を示す。計算結果については $T=10.0$ での値を収束値と見なし、定常航行状態でのトリム量の大きさとしている。実験値との比較では、ケース 1 の場合、実験値 3.56 (degree) に対し計算値 3.85 (degree)、ケース 2 の場合で実験値 3.01 (degree) に対して計算値 3.17 (degree) となり、ケース 1、2 も実験値に対し計算値が大きい値をとっている。また Fig. 14 に船体の剰余抵抗係数の時間履歴を示す。剰余抵抗係数の比較についても、実験値と計算値の比較では、ケース 1 について実験値 10.11×10^{-3} に対し計算値 11.70×10^{-3} 、ケース 2 について実験値 9.56×10^{-3} に対し計算値 10.59×10^{-3} となり、トリム角の場合と同様に実験値に対し計算値が大きい値を示しているものの、実験値と計算値との間の差はほぼ全体の 1 割程度にとどまっている。また、ケース 1、ケース 2 の間のトリム角および剰余抵抗係数の相対関係の

Fig. 13 Comparison of the time historical variations of trim angle, $Fn=0.6$.

Fig. 14 Comparison of the time historical variations of residual resistance, $Fn=0.6$.

Fig. 15 Comparison of the pressure distributions on the hull surface, the interval of the contours is 0.01, $Fn=0.6$.

比較について注目すると、トリム角について実験値では2つのケースでのトリム量の差は0.55 (degree) であるのに対し、計算値では0.68 (degree), 剰余抵抗係数についても同じく 0.55×10^{-3} に対し 1.11×10^{-3} となり、トリム角、剰余抵抗係数とも微妙な重心位置の違いによる船体姿勢および船体抵抗の変化の傾向を良く捉えていることが示されている。

Fig. 15, 16 にケース 1, 2 に関する船体表面圧力分布および船体近傍波高分布の比較を示す。ここで Fig. 15 から、ケース 1 に比べてケース 2 では船体前半部での正圧部分の大きさが縮小している様子が確認され、先に示した重心位置の違いによる航走時のトリム量の差を良く説明している。また Fig. 16 においても 2 ケース間での波形の違いが明確

Fig. 16 Comparison of the wave contours in the vicinity of the hull, the interval of the contours is 0.002 $Fn=0.6$.

に捉えられており、今回用いたシミュレーション手法が、微妙な重心位置の変化に伴う流場レベルでの変化についても十分シミュレートし得るものであることが示されている。

船体姿勢、抵抗値の正確な推定は半滑走艇の船型改良を行う上で、不可欠の要件であり、本研究で開発した CFD シミュレーション法が重心位置の微妙な変化に対し、かなりの精度で航走姿勢、抵抗係数を推定しかつ正確にその大小関係を評価し得たことは、半滑走艇の船型開発手法としての本シミュレーション法の妥当性を示すものであり、今後の船型設計への適用の可能性を実証したものと考えられる。

6. 結 論

本研究では、非線形性の強い半滑走艇周り流場の取り扱いを目的として船体運動を考慮し得る新たな CFD シミュレーション法 WISDAM-VIII を開発し、実用半滑走艇船型について定常および姿勢変化を伴う非定常航走シミュレーションを行い以下の知見を得た。

(1) 密度関数法、移動格子法を用いた流場計算法と船体の運動方程式の解法とを結合することにより、非線形性の強い造波および船体運動を同時に取り扱う CFD シミュレーション法 WISDAM-VIII を開発した。

(2) (1) の CFD シミュレーション法を用いた半滑走艇の定常航走シミュレーションを行い、実験結果との比較を通じてシミュレーション精度の検証を行うとともに、これまで明らかにされていなかった高フルード数流場構造を

明らかにした。

(3) 重心位置の異なるケースについて、船体のトリム、ヒープを自由とした姿勢変化シミュレーションを行い、水槽実験結果との比較により本シミュレーション手法が、微妙な重心位置の違いに対しても船体姿勢、抵抗係数の変動を正確に評価しうることを示すとともに、半滑走艇船型設計への適用の可能性を示した。

今後は、流場の計算精度の向上及び推進器、舵等船体付加物の取り扱いの改善を図るとともに、ポーポイジング、横不安現象等の非定常性の強い動的不安定現象への取り組みを進める予定である。

7. 謝 辞

本研究を進めるにあたり、CFDシミュレーション法の開発に多大なるご助言を頂きました鳥取大学工学部秋元博路助手並びに東京大学工学部川村隆文元技官(現 International Research Center for Computational Hydrodynamics)に深く感謝の意を表します。また、水槽実験にご協力頂きました東京大学工学部土屋好寛技官に厚く御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 梅田直哉：高速漁船の航走時姿勢変化について，関西造船協会誌，第196号（1985），pp.9-17
- 2) Bessho, M. and Sakuma, S.: A Theoretical Study on High Speed Ship Hull Forms (Application for Practical Hull Forms), J. Kansai Soc. Naval Archt. Japan, No. 222 (1994), pp. 57-64
- 3) Bessho, M. and Sakuma, S.: A Theoretical Study on High Speed Ship Hull Forms (Application for Practical Hull Forms, Second Report), J. Kansai Soc. Naval Archt. Japan, No. 222 (1994), pp. 13-20
- 4) Hino, T., Hirata, N. and Hori, T.: Calculation of Free-Surface Flows Generated by Planing Crafts, Proc. First Int. Conf. Fast Sea Transportation, Vol. 1 (1991), pp. 317-330
- 5) Kawamura, T. and Miyata, H.: Simulation of Nonlinear Ship Flows by Density-Function Method (Second Report), J. Soc. Naval Archt. Japan, Vol. 178 (1995), pp. 1-10
- 6) 秋元博路：3次元運動を行う船体のCFDシミュレーション技術の開発と応用，東京大学博士論文（1996）
- 7) Miyata, H., Katsumata, M., Lee, Y. G. and Kajitani, H.: A Finite-Difference Simulation Method for Strongly Interacting Two-Layer Flow, J. Soc. Naval Archt. Japan, Vol. 163 (1988), pp. 1-16
- 8) Kawamura, T. and Miyata, H.: Simulation of Nonlinear Ship Flows by Density-Function Method, J. Soc. Naval Archt. Japan, Vol. 176 (1994), pp. 1-10
- 9) Rosenfeld, M. and Kwak, D.: Time-Dependent Solution of Viscous Incompressible Flows in Moving Co-Ordinates, Int. J. Num. Method in Fluids, Vol. 13 (1991), pp. 1311-1328
- 10) Leonard, B. P.: A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng, Vol. 19 (1979), pp. 59-98
- 11) Rhie, C. M., Chow, W. L.: Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, AIAA J., Vol. 21 No. 11 (1983), pp. 1525-1532
- 12) Zang, Y., Street, R. L. and Koseoff, J. R.: A Non-staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates, J. Comp. Physics, Vol. 114 pp. 18-33