固有応力法の線形破壊力学への応用

正員 豊 貞 雅 宏* 正員 松 岡 一 祥**
 正員 丹 羽 敏 男*

Application of Inherent Stress Methodology to Linear Fracture Mechanics

by Masahiro Toyosada, *Member* Kazuyoshi Matsuoka, *Member*
 Toshio Niwa, *Member*

Summary

Linear fracture mechanics (LFM) is a powerful tool to describe the stress/strain field near a crack tip in an elastic body by means of the concept of stress intensity factor. However LFM being based on an elastic theory, there is limit in application of LFM to a real crack which has a plastic zone at the tip.

An inherent stress methodology is one of the methods to calculate welding residual stress by an elastic theory. The concept of virtual external and body forces is used as operators for the calculation. These two operators are used basically to describe a welded deformation, but also are useful to describe a plastic deformation by an elastic theory.

Being represented plastic deformation of large scale yielding by virtual external and body forces, the application of LFM becomes wide because it is possible to adapt the theory of superposition for plastic problems.

In this paper, above operators are introduced into a cohesive force model such as Dugdale model and new cohesive force model with consideration of inherent strain in a plastic zone is proposed, from the previous study of an inherent stress methodology on welded residual stresses and deformations. Then we calculate COD for center cracked tension specimens with various crack length by the new proposed model.

It is seen that COD by the new model is almost the same as and slightly smaller than that by Dugdale model. However it is recognized that the hypothetical crack seems to reach the free edge of the specimen ahead of a crack for the specimen before applied stress comes to yield stress in Dugdale model. This may be because the decreased effect of K value due to plastic deformation is ignored in Dugdale model. On the contrary, it is recognized that the tendency that the hypothetical crack tip approaches to the free edge of a center cracked plate in the new model, when the applied net stress comes to yield stress. It becomes also clear that the growth of plastic zone by the new model is equal to or less than that by Dugdale model.

1. は じ め に

線形破壊力学は、弾性体中のき裂先端近傍の応力状態などを応力拡大係数の概念を用い、記述する強力な手法であ

る。しかし、弾性論に基づいているため、先端に塑性域が存在する実際のき裂に対する適用性には限界がある。

溶接残留応力を弾性論で算定する方法の1つに固有応力法¹⁾がある。その中で、仮想外力および仮想体積力の概念が、オペレーターとして用いられる。この2つのオペレーターは、基本的には、溶接変形を記述・計算するために用いられるが、塑性変形を弾性論で記述するのに有効である。

大規模降伏による塑性変形を、仮想外力と仮想体積力を

* 九州大学工学部

** 船舶技術研究所

用いた弾性論で表現すると、線形重ね合わせが可能となり、線形破壊力学の適用範囲が拡大する。

ここでは、上述の考え方を Dugdale モデル²⁾ に適用した場合を取り扱う。まず、溶接残留応力に対する固有応力法を概説し、仮想外力と仮想体積力の 2 つのオペレーターにより、溶接残留応力と変形がどのように表現されるかを示す。次に、き裂先端の塑性変形に対する適用法について述べる。そして、最後に Dugdale モデルの大規模降伏を起こしたき裂先端への拡張方法について述べ、その有効性を検討する。

2. 固有応力法¹⁾

溶接残留応力は、溶接金属と母材の溶着・凝固過程で、熱伝導、熱弾塑性、相変態などの現象が作用して生じる。現象は複雑であり、シミュレーションによりその生成過程を追跡しようとする、凝固・相変態の潜熱、相変態の時間依存性、および、溶融点直上の温度から室温までの熱伝導・熱伝達、熱弾塑性の各種物性値を把握しておく必要がある。また、これらの物性値が与えられても、剛性の回復していない高温状態での弾塑性解析は、解に対する誤差が大きく、その誤差が最終結果にも影響を与えるため、溶接の全過程を精度良くシミュレーションすることは不可能なのが現状である。そこで、溶接残留応力の簡易な推定法が求められ、多くの研究が行われてきた。

残留応力の簡易推定は、固有ひずみ³⁾あるいは固有応力¹⁾を仮定した弾性計算で行われる。その際、固有ひずみあるいは固有応力の分布形状の特定が必要である。ここでは、まず著者らの提案する固有応力法¹⁾について概説する。

2.1 固有応力^{1,4)}

一般的には、固有応力は、初期応力および内部応力と同義とされる。すなわち「物体に外力が働いていない状態で物体内に存在する応力」⁵⁾である。一方、固有ひずみにフック則を用いて求められた応力の正負逆符号の応力を固有応力とする場合もある^{1,4)}。ここでは後者の定義による固有応力を取り扱う。

溶接残留応力などの内部応力 σ_{ij} があるとする。応力 σ_{ij} との間にフック則などの構成式が成立するひずみを弾性ひずみ ε_{ij}^e とする。固有ひずみ ε_{ij}^l を仮定し、全ひずみ ε_{ij} がこの仮定された固有ひずみと弾性ひずみの和とする。弾性体と仮定すれば

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^l \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (2)$$

ここに、 D_{ijkl} はフック則などの構成テンソルである。なお式中の下添字の重複はアインシュタインの総和規約にしたがっている。

(2)式に(1)式を代入して整理すると、

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^l) \quad (3)$$

ここで

$$\sigma_{ij}^l = -D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^l \quad (4)$$

とおく。(4)式により固有ひずみと関係付けられる応力が著者らの定義する固有応力である。

2.2 仮想体積力と仮想外力

固有応力法は、単に固有ひずみを(4)式により応力に書き換えただけでなく、仮想体積力と仮想外力の概念により、弾性解析で変形と内部応力を求める強力な手段となっている。

熱応力問題における Duhamel の相似定理⁶⁾の手法を内部応力に適用する。物体内部を V 、境界線を S とする。体積力が存在しない場合、内部応力の釣り合い条件は(5)式となる。

$$\sigma_{ij}|_j = (D_{ijkl} \varepsilon_{kl})|_j + \sigma_{ij}^l|_j = 0 \quad (\text{in } V) \quad (5)$$

ここに、 $|_j$ は微分記号である。一方、内部応力の定義(外力が働いていない)から(6)式が得られる。

$$\sigma_{ij} n_j = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} n_j + \sigma_{ij}^l n_j = 0 \quad (\text{on } S) \quad (6)$$

ここに、 n_j は境界 S 上での外向き法線ベクトルである。

(5)、(6)式より「物体内部に体積力 $B_i^l = \sigma_{ij}^l|_j$ が働き、境界で外力 $F_i^l = -\sigma_{ij}^l n_j$ が働く弾性問題の解は、応力 $D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ を与える。」ことがわかる。ここで、固有応力の微分を仮想体積力、固有応力に内向きの法線ベクトルを乗じたものを仮想外力と定義する。以上から、(3)、(5)および(6)式により、以下の手法が導かれる。

固有応力により生じる内部応力は 2 つの部分に分けて取り扱える。

①仮想体積力 $\sigma_{ij}^l|_j$ および仮想外力 $-\sigma_{ij}^l n_j$ が働くことによって生じた応力 ($D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$)

②固有応力そのもの (σ_{ij}^l)。

①と②の和が内部応力である。

仮想体積力 B_i^l 、仮想外力 F_i^l および固有応力によって生じた変形に対する 2 次的な応力 σ_{ij}^* の定義を以下に示す。

$$B_i^l = \sigma_{ij}^l|_j = -(D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^l)|_j \quad (7-a)$$

$$F_i^l = -\sigma_{ij}^l n_j = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^l n_j \quad (7-b)$$

$$\sigma_{ij}^* = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^l \quad (7-c)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^l \quad (7-d)$$

上述①の応力 σ_{ij}^* は全ひずみ ε_{ij} と対応しているため、変形によって生じた応力である。そこで、(7-d)式は、「固有応力によって生じた変形に対応する応力 σ_{ij}^* と固有応力 σ_{ij}^l の和が、内部応力 σ_{ij} である。」と同義となる。

Fig. 1 に突き合わせ溶接継手の溶接線方向残留応力を例として、内部応力 σ_{ij} と変形に対応する応力 σ_{ij}^* および固有応力 σ_{ij}^l の関係を、溶接線方向応力だけについて簡略化して示した⁴⁾。(a)図で、斜線部が固有応力 σ_{ij}^l である。 $-\sigma_c$ は変形に対応する応力 σ_{ij}^* である。この生成の様子を(b)図に示す。溶接により生じた固有応力は、それぞれの溶接線垂

Fig. 1 Illustrated figures of induced stress due to deformation by virtual external force and inherent stress which consist of welded residual stress for butt weld joint

直断面で変化せず、一定の分布とする。すると、(7-a) 式より仮想体積力は溶接線方向には 0 となる。一方、溶接線のとぎれる両端面では (7-b) 式により、固有応力は両側からの圧縮の仮想外力となる。両端面では (7-c) 式の 2 次的な応力は仮想外力による圧縮で、これに固有応力を加えた (7-d) 式は 0 となる。中央付近では両端からの圧縮による 2 次的な応力は $-\sigma_c$ となり、(7-d) 式により (a) 図の残留応力分布となる。 σ_c の断面積分は固有応力のそれと一致するため、(a) 図の残留応力は釣り合いを保っている。

仮想体積力の影響について、Fig. 2 に示す。図は溶接線直角方向の溶接収縮の生成機構を示している。固有応力により、溶接線直角方向には体積力 $\sigma_y^l|_y = d\sigma_y^l/dx$ が生じる。固有応力の分布形状を台形とした場合、固有応力分布の傾斜部に一様な仮想体積力が働く。体積力の定義 (0 応力状態の位置から、マイナスの体積力を積分すると、その位置の応力となる。) から、体積力による応力は、固有応力と同型の分布で正負逆のものとなる。残留応力はこの 2 つの応力の和であり 0 となる。

残留応力が 0 となっても、固有体積力によって生じた圧縮力に対する溶接収縮が残る。この収縮量は、仮想体積力によって生じた応力 σ^* (図中斜線部) の積分値をヤング率 E で除したものとなる。

以上の論議は、固有ひずみを塑性ひずみとしても成立する。すなわち、(1), (3), (4), (7-a), (7-b) 式の固有ひずみを塑性ひずみ ε_y^p あるいは ε_{li}^p に置き換えることができる。

3. き裂前方の塑性域の存在領域と仮想き裂面に働く等価固有応力

無限平板中に長さ $2c$ の貫通き裂 (平面問題として) が存在し、き裂に垂直な引張応力下でき裂先端に塑性域が生じたとする (Fig. 3 参照)。座標 x, y を Fig. 3 のように定める。この塑性域内も二軸応力状態となっているが、簡単のため y 方向応力しか働かないと仮定する。 y 軸に平行に塑性域内で微小幅 dx の帯状の部分を取り出し、 y 方向塑性ひずみ ε_y^p の影響について、それ以外の弾性成分を除いて考

Fig. 2 Generation mechanism of transversed welded shrinkage to weld line due to virtual body forces

える。この領域の ε_y^p , $\sigma_y^l = -E\varepsilon_y^p$, $B_y^l = d\sigma_y^l/dy$, $\sigma_y^* = -\int B_y^l dy$ の分布は模式的に Fig. 4 のようになる。図中の $-\sigma_0$ は $y=0$ での固有応力の値である。これらの量の関係は、正負は逆、座標 x, y は入れ替わっているが Fig. 2 と同様であり、この帯状の部分の y 方向成分に限れば、塑性ひずみによる伸びだけが生じることになる。しかし、この帯状の部分以外には、Fig. 4(c) の仮想体積力 B_y^l による応力、ひずみなどが生じるが、それらは弾性論で表現できる。

Fig. 4(d) の σ_y^* の積分値を E で除した塑性伸び量が塑性現象の支配的な現象となる場合、塑性ひずみ分布を、その積分値である伸びあるいは収縮量の等しい矩形分布とし、Fig. 4(c) の仮想体積力の複雑な分布形状を体積力とデルタ関数の積、すなわち集中的な応力 σ_0 で置き換えることができる (Fig. 4 中の破線)。

そこで、この微小幅 dx 要素の帯状部分の $-b \leq y \leq b$ には一様な塑性ひずみ $\varepsilon_y^p (= \varepsilon_y^l)$ が存在し、 $|y| > b$ では、塑性ひずみが存在しないと理想化する。この場合 $-b \leq y \leq b$ 間で生じる塑性伸び L は、

$$L = 2b\varepsilon_y^p \quad (8)$$

また $-b \leq y \leq b$ 間における固有応力 σ_y^l は、(4) 式より

$$\sigma_y^l = -E'\varepsilon_y^p = -\frac{E'L}{2b} \quad (9)$$

ただし

Fig. 3 Coordinate system of a crack

Fig. 4 Illustration of secondary stress due to plastic deformation

$$E' = \begin{cases} E & \text{(平面応力状態)} \\ E/(1-\nu^2) & \text{(平面ひずみ状態)} \end{cases}$$

E : ヤング率, ν : ポアソン比

したがって上述のように $y=b$ の位置には仮想体積力による集中荷重 $\bar{B}_y^l$

$$\bar{B}_y^l = -\sigma_y^l dx \quad (10)$$

$y=-b$ の位置には仮想体積力による集中荷重 $\bar{B}_y^l$

$$\bar{B}_y^l = \sigma_y^l dx \quad (11)$$

が働く。すなわち (10) 式と (11) 式の一对の仮想体積力による集中荷重 (この集中荷重は着力点間に引張の応力 $(-\sigma_y^l)$ を生じさせる) により、 L なる塑性伸びが $-b \leq y \leq b$ 間に生じる。ここで仮想的にき裂が x 軸上 a まで伸びたとする。上記一对の仮想体積力による集中荷重による K 値を

$$K = |\bar{B}_y^l| h(x, b, a) \quad (12)$$

と置く。この仮想体積力による一对の集中荷重を、 x の位置のき裂面に働く等価な一对の集中荷重 $\hat{F}_y (= \sigma_y dx)$ に変換すると、

$$-\sigma_y^l h(x, b, a) dx = \sigma_y \psi(x, a) dx \quad (13)$$

ただし

$\psi(x, a)$: x の位置のき裂面に単位集中荷重が作用した場合の K 値

この等価な x の位置のき裂面に働く集中的な応力 σ_y により生じる x の位置のき裂開口変位 (COD) $V(x)$ を、

$$V(x) = \sigma_y \Gamma(x, a) \quad (14)$$

ただし

$\Gamma(x, a)$: x の位置のき裂面に集中的な単位応力が作用した場合に生じる x の位置の COD

と置く。実際にはこの x の位置には、き裂面がなく L なる塑性伸び、すなわち L なるくいちがいが生じている。仮想き裂の開口変位は、弾性論的取り扱いで生じるくいちがいに等しいと考えられる。すなわち

$$V(x) = L \quad (15)$$

したがって (14) 式、(15) 式より

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} L \quad (16)$$

(13)式に、(9)および(16)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{E' L}{2b} h(x, b, a) dx &= \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} L \psi(x, a) dx \\ \therefore \frac{E'}{2b} h(x, b, a) &= \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} \psi(x, a) \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式を解くことにより、仮想体積力の着点 b が求められる。

仮想き裂面には、仮想体積力による集中荷重と絶対値が等しく、符号が反対の仮想外力が働くから、

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y + \sigma_y' = \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} - \frac{E'}{2b} \right\} L \quad (18)$$

なる等価仮想外力がき裂面に付加されることになる。

そこで無限板中の板厚貫通き裂に対して、仮想体積力の着点 b およびき裂面に働く等価仮想外力を求める。

Fig. 5 に示すようにき裂面から離れた位置に一对の集中荷重が働く場合の K 値⁷⁾ は

$$\begin{aligned} K &= \bar{B}_y' h(x, y, a) = \frac{\bar{B}_y'}{2\sqrt{\pi a}} \left[1 - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &\quad \times \left\{ \sqrt{\frac{a+z}{a-z}} + \sqrt{\frac{a+\bar{z}}{a-\bar{z}}} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

ただし

$$\begin{aligned} z &= x + iy, & \bar{z} &= x - iy \\ \alpha &= \begin{cases} (1+\nu)/2 & (\text{平面応力状態}) \\ 1/2(1-\nu) & (\text{平面ひずみ状態}) \end{cases} \end{aligned}$$

実座標系に改め $y = b$ とし、 $h(x, b, a)$ を求めると

$$\begin{aligned} h(x, b, a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \left[\frac{\sqrt{(a^2 - x^2 - b^2) + A}}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{ab^2((a^2 - x^2 - b^2) + A)A - (a^2 + x^2 + b^2 - A)((a-x)^2 + b^2)}{A\sqrt{(a^2 - x^2 - b^2) + A}\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

ただし

$$A = \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + b^4 + 2b^2(a^2 + x^2)}$$

また $\psi(x, a)$ は⁷⁾

Fig. 5 Concentrated force acted on point apart from crack surfaces

$$\psi(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a - x} \quad (21)$$

一方、集中荷重 $\hat{F}_y (= \bar{\sigma}_y dx)$ がき裂面の x の位置に働く場合の x_0 の位置における COD $V(x_0)$ は⁷⁾,

$$V(x_0) = \frac{4\{\hat{F}_y\}_{x=x}}{\pi E'} \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} \quad (22)$$

ここで $[\beta, x]$ (ただし $\beta = x - dx$) 間で部分積分を適用すると

$$\begin{aligned} &\{\hat{F}_y\}_{x=x} \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} \\ &= \{\hat{F}_y\}_{x=\beta} \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 \beta}{a|\beta - x_0|} \\ &\quad + \int_{\beta}^x \bar{\sigma}_y \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} dx \\ &\quad + \int_{\beta}^x \hat{F}_y \frac{d}{dx} \left\{ \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} \right\} dx \end{aligned} \quad (23)$$

上式の右辺第3項は、

$$\begin{aligned} &\int_{\beta}^x \hat{F}_y \frac{d}{dx} \left\{ \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} \right\} dx \\ &= \mp \int_{\beta}^x \hat{F}_y \frac{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad \begin{cases} (x \geq x_0) \\ (x < x_0) \end{cases} \end{aligned}$$

となり、 $\hat{F}_y$ は $[\beta, x]$ 間で $x = x$ を除いていたところ 0 であるから、第3項は 0 となる。一方 $\bar{\sigma}_y$ は $[\beta, x]$ 間で一定の値をとるから、(23)式右辺第2項は

$$\begin{aligned} &\int_{\beta}^x \bar{\sigma}_y \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} dx \\ &= \bar{\sigma}_y \left[|x - x_0| \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} + \sqrt{a^2 - x_0^2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]_x \\ &= \bar{\sigma}_y \left\{ |x - x_0| \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} + \sqrt{a^2 - x_0^2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right\} \\ &\quad - \bar{\sigma}_y \left\{ |\beta - x_0| \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 \beta}{a|\beta - x_0|} + \sqrt{a^2 - x_0^2} \sin^{-1} \frac{\beta}{a} \right\} \end{aligned}$$

したがって(22)式は、

$$\begin{aligned} V(x_0) &= \frac{4\{\hat{F}_y\}_{x=\beta}}{\pi E'} \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 \beta}{a|\beta - x_0|} \\ &\quad - \frac{4\bar{\sigma}_y}{\pi E'} \left\{ |\beta - x_0| \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 \beta}{a|\beta - x_0|} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{a^2 - x_0^2} \sin^{-1} \frac{\beta}{a} \right\} \\ &\quad + \frac{4\bar{\sigma}_y}{\pi E'} \left\{ |x - x_0| \cosh^{-1} \frac{a^2 - x_0 x}{a|x - x_0|} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{a^2 - x_0^2} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで右辺第1項および第2項は、 x に関して定数項であり(22)式には定数項を含まないので両者の和は 0 となる。

したがって

$$\begin{aligned} V(x) &= \lim_{x_0 \rightarrow x} V(x_0) \\ &= \frac{4\bar{\sigma}_y}{\pi E'} \sqrt{a^2 - x^2} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \bar{\sigma}_y \Gamma(x, x, a) \end{aligned} \quad (25)$$

(20), (21) および (25) 式を (17) 式に代入して

$$\frac{1}{\sqrt{2b}} \left[\frac{\sqrt{(a^2 - x^2 - b^2) + A}}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \right]$$

$$+ \frac{ab^2[(a^2-x^2-b^2+A)A-(a^2+x^2+b^2-A)\{(a-x)^2+b^2\}]}{A\sqrt{(a^2-x^2-b^2)+A}\{\sqrt{(a-x)^2+b^2}\}^3} \Bigg] \\ = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-x^2}\sin^{-1}(x/a)} \cdot \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x} \quad (26)$$

ただし

$$A = \sqrt{(a^2-x^2)^2 + b^4 + 2b^2(a^2+x^2)}$$

したがって、き裂面に働く等価仮想外応力は(18)式より、

$$\bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y + \sigma_y' = \left\{ \frac{\pi}{4\sqrt{a^2-x^2}\sin^{-1}(x/a)} - \frac{1}{2b} \right\} E' V(x) \quad (27)$$

Fig. 6 に(26)式より求めた仮想体積力の着力点 b の解析結果を示す。この b は塑性域の y 方向の拡がりの代表値を

Fig. 6 Calculation results of acting point of virtual body force apart from crack line for a crack in an infinitely wide plate

Fig. 7 Schematic profile of plastic zone ahead of a crack

表すものと考えられる。この塑性域の拡がりの代表値は、実き裂半長 (図の横軸の1以下の任意の位置に対応し、 c/a が小さくなるほど作用荷重が大きくなることになる) と仮想き裂半長 a が決まれば、決定されることになる。またその形状は、塑性域内で y 方向の塑性ひずみが一定と仮定してその存在領域を表しているの、塑性域の形状そのものとは一致しないものの、模式的に Fig. 7 に示すこれまでの弾塑性有限要素法などにおける解析結果より得られる塑性域形状 (平面応力状態では、図の領域 I の形状) と酷似したものになっている。なお Fig. 6 に示すように、平面応力状態と平面ひずみ状態に対し、 c/a が同じならば、 b の値は平面ひずみ状態の方が僅かに大きくなっているが、両者の差はほとんどないことが分かる。平面ひずみ状態では、二軸の影響で σ_y が平面応力状態のそれより大きくなるので、同一荷重で比較すると、平面応力状態の c/a が平面ひずみ状態のそれより小さくなるので、平面応力状態の方が塑性域は y 方向に広がっていると考えられる。

Fig. 8 に(27)式より求めた塑性域が存在することにより生じるき裂面に働く等価仮想外応力 $\bar{\sigma}_y$ の計算結果を示す。き裂中央では塑性ひずみが存在することによりき裂を開口させる力が働き、き裂先端近傍ではき裂を閉口させる力が働くことが分かる。Fig. 9 に(20)式の $h(x, y, a)$ の計算結果を示すが、上記の挙動は無限板中の貫通き裂では、集中荷重の着力点がき裂面から離れるにしたがい、 K 値が一旦上昇し (その最大値はき裂面に集中荷重が働く場合の約1%増になっている)、最大値を示した後減少することに対応している。

半無限板の端部き裂では、任意の位置の $h(x, y, a)$ は求められていないが、マウス部すなわち $x=0$ でも着力点がき裂面から離れるにしたがい K 値が単調に減少する⁷⁾ ので、等価仮想外応力は常に負となり、塑性域の存在は常に

Fig. 8 Calculation results of equivalent virtual external stress distribution acting on a crack surface

Fig. 9 K value for concentrated force acted on point apart from crack surface

き裂を閉口させる方向にのみ働くものと考えられる。

4. き裂開口変位の定式化

上記の結果より、固有ひずみの影響を考慮するには、(17)式（無限板中の板厚貫通き裂の場合には(26)式）で得られる b を用い、(18)式（無限板中の板厚貫通き裂の場合には(27)式）で与えられる等価仮想外応力が、Dugdale モデルの仮想き裂面に働くと考えればよい。すなわち上記の結果を考慮すると、Fig. 10 の重ね合わせが成立する。図の (b) + (c) + (d) が Dugdale モデルである。これに塑性域に固有応力 σ_y が存在する問題、すなわち Fig. 10(e) が働き、さらに Fig. 10(f) に示すように仮想体積力に対応する応力が、き裂線から b 離れた位置に作用し、さらにこれと符号が反対の応力（仮想外力による応力）が仮想き裂面に働く問題を重ね合わせれば良いことになる。

すなわち Fig. 10(f) の一對の仮想体積力と仮想外力により、仮想体積力の着点と仮想外力の着点（すなわち仮想き裂面）間（ $-b \leq y \leq -0$ 、および $+0 \leq y \leq b$ ）には $-\sigma_y$ なる応力が生じる。そして $-b \leq y \leq -0$ 、および $+0 \leq y \leq b$ 間に存在する固有応力 σ_y すなわち Fig. 10(e) と打ち消し合い、この部分の作用応力は固有応力の存在によって変化しないが、これによる塑性伸びが Fig. 2 で論じたように生じる。

Fig. 10 の (e) + (f) は、前節で示したように等価な仮想外力 $\bar{\sigma}(x)$ だけがき裂面に働いている問題に置き換えることができる。そこで $x=a$ を仮想き裂先端として、 x の位置に単位集中荷重を作用させた時に生じる、 x_j 点の変位を $f(x_j, x, a)$ とすると、固有応力が作用する場合の x_j 点の COD は、Fig. 10 および (18) 式より

$$\begin{aligned} V(x_j) &= \int_0^a \sigma(x) f(x_j, x, a) dx - \sigma_y \int_c^a f(x_j, x, a) dx \\ &\quad + \int_c^a \bar{\sigma}(x) f(x_j, x, a) dx \\ &= \int_0^a \sigma(x) f(x_j, x, a) dx - \sigma_y \int_c^a f(x_j, x, a) dx \\ &\quad + \int_c^a V(x) \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E'}{2b(x)} \right\} f(x_j, x, a) dx \end{aligned} \quad (28)$$

ただし $V(x)$: x の位置での COD

$b(x)$: x の位置での塑性域の半幅 ((17) 式の解)

c : 実き裂先端位置

一方、仮想き裂先端では K 値は 0 となるから、 x の位置に単位集中荷重を作用させた時の K 値を $g(x, a)$ とすると、(18) 式を考慮して

$$\begin{aligned} &\int_0^a \sigma(x) g(x, a) dx - \sigma_y \int_c^a g(x, a) dx \\ &\quad + \int_c^a \bar{\sigma}(x) g(x, a) dx = 0 \\ \therefore &\int_0^a \sigma(x) g(x, a) dx - \sigma_y \int_c^a g(x, a) dx \\ &\quad + \int_c^a V(x) \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} - \frac{E'}{2b(x)} \right\} g(x, a) dx = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $[c, a]$ 間を n 分割し、その 1 つの区間を $[B_i, B_{i+1}]$ (ただし、 $B_1 = c, B_{n+1} = a$) とする。 i 要素における $V(x)$ の内挿関数をそれぞれ

$$V(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} X_{(i)}^k \quad (31)$$

と置く。仮想き裂先端要素については変位の特異性を考慮し、なおかつ仮想き裂先端では $V(a) = 0$ であるから

Fig. 10 Principle of superposition for cohesive force model with consideration of existence of inherent strain in the region of a plastic zone

$$i=n \text{ の要素 (仮想き裂先端要素) では } \left. \begin{aligned} X_{(n)} &= \sqrt{a-x} \\ X_{(i)}^k &= x^{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$i \neq n$ の要素では

と置くと, (28)式は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \alpha_{jk} X_{ji}^k - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \int_{B_i}^{B_{i+1}} X_{(i)}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{E'}{2b(x)} \right\} f(x_{ji}, x, a) dx \\ & = \int_0^a \sigma(x) f(x_{ji}, x, a) dx - \sigma_Y \int_c^a f(x_{ji}, x, a) dx \end{aligned} \quad (33)$$

(33)式をマトリックス表示すると

$$\{\beta_{jlik}\} \{a_{ik}\} = \{\gamma_{ji}\} \quad (34)$$

ただし

$$\beta_{jlik} = \begin{cases} - \int_{B_i}^{B_{i+1}} X_{(i)}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} - \frac{E'}{2b(x)} \right\} \\ \quad \times f(x_{ji}, x, a) dx & (i \neq j) \\ X_{ji}^k - \int_{B_i}^{B_{i+1}} X_{(i)}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} - \frac{E'}{2b(x)} \right\} \\ \quad \times f(x_{ji}, x, a) dx & (i = j) \end{cases}$$

$$\gamma_{ji} = \int_0^a \sigma(x) f(x_{ji}, x, a) dx - \sigma_Y \int_c^a f(x_{ji}, x, a) dx$$

ただし X_{ji} は x_{ji} に対応する位置 ((32)式参照) を表す。

上式は, a を仮定すれば正解を解くことができる。すなわち, まず a をある値に仮定し, (17)式より $b(x)$ をあらかじめ求めておき, (34)式を解き, 得られた α_{ik} ($k=1, m$) より, (31)式から仮定した a に対して $[c, a]$ 間の $V(x)$ が求められる。

この内挿関数を使用すると, (30)式は

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sigma(x) g(x, a) dx - \sigma_Y \int_c^a g(x, a) dx \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \int_{B_i}^{B_{i+1}} X_{(i)}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(x, x, a)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{E'}{2b(x)} \right\} g(x, a) dx = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

となるから, (35)式の左辺が正となれば a を大きく, 負となれば a を小さくし, 改めて (34)式を解き, 収束させれば, a , および α_{ik} の正解が得られる。

求められた a , および α_{ik} を用いると, COD は (28)式より

$$\begin{aligned}
V(x_j) = & \int_0^a \sigma(x) f(x_j, x, a) dx - \sigma_Y \int_c^a f(x_j, x, a) dx \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ik} \int_{B_i}^{B_{i+1}} X_{(i)}^k \left\{ \frac{1}{Y(x, x, a)} \right. \\
& \left. - \frac{E'}{2b(x)} \right\} f(x_j, x, a) dx
\end{aligned} \quad (36)$$

と与えられる。

5. 一様外応力を受ける中央貫通き裂材のき裂開口変位

Dugdale モデルと比較するため、前節のモデルを、一様外応力を受ける中央貫通き裂問題に適用する。この問題では、Fig. 11 に示すように、き裂面に双集中荷重を受ける場合の $f(x_j, x, a)$ を求めなければならない。

$|x|$ の位置のき裂面に単位集中荷重が作用した場合の K 値 $g(x, a)$ は、Tada⁷⁾ によると

$$\begin{aligned}
g(x, a) = & \frac{2}{\sqrt{2w}} \left\{ 1 + 0.297 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \left(1 - \cos \frac{\pi a}{2w} \right) \right\} \\
& \times \frac{\sqrt{\tan \frac{\pi a}{2w}}}{\sqrt{1 - \left\{ \frac{\cos(\pi a/2w)}{\cos(\pi x/2w)} \right\}^2}}
\end{aligned} \quad (37)$$

この双集中荷重による x_j 点の COD $f(x_j, x, a)$ は、Paris の相反定理⁸⁾ より

$$\begin{aligned}
f(x_j, x, a) = & \frac{2}{E'} \int_0^a g(x_j, a) g(x, a) da \\
= & \frac{4}{E' w} \int_0^a \left\{ 1 + 0.297 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \left(1 - \cos \frac{\pi a}{2w} \right) \right\} \\
& \times \left\{ 1 + 0.297 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \left(1 - \cos \frac{\pi a}{2w} \right) \right\} \\
& \times \frac{\tan \frac{\pi a}{2w}}{\sqrt{1 - \left\{ \frac{\cos(\pi a/2w)}{\cos(\pi x_j/2w)} \right\}^2} \sqrt{1 - \left\{ \frac{\cos(\pi a/2w)}{\cos(\pi x/2w)} \right\}^2}} da
\end{aligned} \quad (38)$$

Fig. 11 Center cracked plate subjected to a pair of splitting forces

ただし β は x と x_j のうちの大きい方の値をとる
と与えられる。

$\{1/Y(x, x, a) - E'/2b(x)\}$ の値はき裂材の境界条件で変化するが、簡単のため、中央貫通き裂の場合は無限板中のき裂のそれ、すなわち

$$\left\{ \frac{1}{Y(x, x, a)} - \frac{E'}{2b(x)} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4\sqrt{a^2 - x^2} \sin^{-1}(x/a)} - \frac{1}{2b(x)} \right\} E' \quad (39)$$

で近似できると仮定する。

そこで、以上の関係式を用いて、平面応力状態を仮定し $c/w = 0.05 \sim 0.8$ の中央貫通き裂材に、無限遠で一様応力が作用する場合の COD を求めた。ただし、ここでは $\{c, a\}$ 間は 10 分割、すなわち $n = 10$ 、各要素の内点は 3、すなわち $m = 3$ とし、数値積分はガウス積分によった。この結果の妥当性を調べるために、同一問題の弾塑性 FEM 解析も合わせて実施した。弾塑性 FEM の要素は一定ひずみ要素であり、その要素分割の 1 例を Fig. 12 に示す。 FEM 解析では、加工硬化の影響も調べるために、応力～ひずみ関係は完全弾塑性体と、加工硬化係数が $E/100$ の bi-linear の 2 種を用い、平面応力状態で解析した。

Fig. 13, Fig. 14 および Fig. 15 に、 $x = 0$ (き裂中央)、 $x = c/2$ および $x = 0.9c$ の位置で得られた COD をそれぞれ示す。図中には、ここでのモデルによる結果、 FEM 解析から得た結果に加えて、2 種類の Dugdale モデルによる結果も合わせて示す。

図中細い実線は、 $2w$ の間隔で周期的に存在する直列き裂のき裂面に、双集中荷重が作用した場合の COD の解析解を使用して求めた Dugdale モデルによる COD を示し

Fig. 12 Finite element subdivision for a center cracked tension specimen

Fig. 13 Comparison between mouth COD calculated by using elasto-plastic FEM and one by present model for CCT specimen

Fig. 14 Comparison between COD at $x=0.5c$ calculated by using elasto-plastic FEM and one by present model for CCT specimen

Fig. 15 Comparison between COD at $x=0.9c$ calculated by using elasto-plastic FEM and one by present model for CCT specimen

ている（このき裂面に双集中荷重が作用する周期き裂は、Fig. 11の左右の自由境界で x 方向変位を拘束したものとなり、 $c \ll w$ の場合には、中央貫通き裂問題とほぼ等しくなる）。そして各き裂に対して、縦線で示している位置は、実断面応力 σ_{net} が降伏点に等しくなる（応力的に全面降伏する）公称応力 σ を示している。

太い点線は、Fig. 11の K 値、すなわち(37)式から得られる双集中荷重が働く場合のCOD（(38)式）を用いて、Dugdaleモデルの重ね合わせの原理を適用して、中央貫通き裂材のCODを求めた結果である（式(28)から(36)で $\bar{\sigma}(x)$

を0として求められる。Dugdaleモデル本来の考え方では中央貫通き裂の場合この結果になるが、周期直列き裂のように陽な形で解析解が与えられない。 $c/w \leq 0.20$ では、 x 方向変位の自由端での拘束の影響がほとんどなくなるので、周期直列き裂のDugdaleモデルによるCODとほとんど一致している（太い点線と細い実線はき裂長が $0.2w$ よりも小さい場合はほとんど重なっている）。しかし、 c/w が大きくなるにつれて、き裂前方の自由端での拘束がないため、周期き裂のDugdaleモデルによるよりも、CODが大きくなっている。特に c/w が0.35および0.5の場合には低荷重下では両者はほぼ一致しているものの全面降伏近傍では、中央貫通き裂のCODが大きくなっている。なお中央貫通き裂では、 $a=w$ の場合の K 値が求められないので $a=0.98w$ までの計算結果を図中に示している。

また、○印は完全弾塑性体によるFEM解析結果、●印はbi-linearの応力～ひずみ関係を有する材料のFEM解析結果である。bi-linear材の方が、完全弾塑性体によるものより、極くわずかにCODは小さくなっているが、全面降伏荷重までしか計算できない完全弾塑性体によるCODを同時に図示すると、ほとんど重なり、両者の区別がつかない（●印は○印の下に隠れている）。なお細い点線はFEM解析結果を結んだものである。

そして、塑性域に固有ひずみが存在することを考慮したここでのモデルによるCODを、太実線で示してある。 $a/w=1$ すなわち全面降伏時（仮想き裂先端がき裂前方の自由縁に達した時点）については、Fig. 11の双集中荷重による K 値を与えられないので、ここでのモデルならびに中央貫通き裂に対してのDugdaleモデルによるCODは求められないが、図中には両者について $a/w=0.98$ までの計

算結果を示している。

周期き裂で $c/w \leq 1$ の場合、中央貫通き裂の近似となるが、 c/w が大きい場合には自由表面の x 方向変位を拘束している事になり、中央貫通き裂よりも COD を小さく与える事になるので、ここでの比較の対象とはならず、あくまで参考値である。したがって以下では断りのない限り、Dugdale モデルといえば中央貫通き裂を指すものとする。

Fig. 13~15 を参照すると、塑性域の固有ひずみの存在を考慮したここでの結合力モデルによる COD は、Dugdale モデルによるそれとほとんど等しいが、仮想き裂先端近傍でき裂を閉口させる力が働くために、Dugdale モデルによるそれよりも少し小さくなっている。また弾塑性 FEM による COD と比較すると、Dugdale モデルにおけると同様、これまでの研究結果と同じく、ここでの結合力モデルによる COD が大きくなっている。ここでの結合力モデルは Dugdale モデルと同様、仮想き裂領域では y 方向の単軸応力状態になっているとモデル化していることに由来するものと考えられ、実際問題への適用にあたっては、Dugdale モデル同様塑性拘束係数を導入して、見掛け降伏点を上昇させたものを使用する必要がある。

Fig. 16 には、塑性域の固有ひずみの存在を考慮したここでの結合力モデルと Dugdale モデルによる、仮想き裂の先端位置と外応力の関係、すなわち塑性域の成長曲線を示す。図中には、各き裂長に対して実断面応力 σ_{net} が降伏点と等しくなる公称応力 σ の値も縦線で示してある。さらに図中には参考のため周期き裂に対する Dugdale モデルによる結果も合わせて示すが、その結果は、固有ひずみの存在を考慮したここでの結合力モデルによるそれとほとんど一致し、両者は重なっている ($a/w > 0.98$ では周期き裂における Dugdale モデルだけの結果が図に示されている)。一方 Fig. 13~15 に示したように COD に関してはここでの結

合力モデルと中央き裂の Dugdale モデルでほとんど差はなかったが、仮想き裂の成長は高応力側で Dugdale モデルによるものより、ここでの結合力モデルによる方が小さくなっている。

Fig. 16 を参照すると、Dugdale モデルでは仮想き裂先端がき裂前方の自由縁に達する時点でも、実断面応力が降伏点以下となる兆候を示している。このような傾向を示すためには a/w が 1 より少し小さい外応力状態で、仮想き裂前方の応力が急勾配に分布し、そこ (弾性域) での平均応力が非常に小さく、この状態から作用応力が増加しても殆ど塑性域が成長しないような現象が表れ、最終的に $\sigma_{net}/\sigma_Y = 1$ で $a/w = 1$ となる必要がある。しかし曲げ応力を誘起しない一様応力が作用するここでの問題でこのような現象が現れることは考えられない。

上記のような結果が生じた原因として、中央貫通き裂のき裂面に双集中荷重が作用する場合 (Fig. 11) の K 値、すなわち (37) 式の精度が悪いことが一方では考えられる。しかし (37) 式の精度は全ての a/w および x/a において最大 1% の誤差であり⁷⁾、Dugdale モデルで $a/w = 1$ となる時点の σ_{net}/σ_Y を Fig. 16 で外挿して求めると、例えば $c/w = 0.5$ のとき 0.957, 0.8 のとき 0.903 となり、4~10% 程度の差となり、 K 値の誤差から上記の結果を引き起こしているとは考えられない。

Fig. 16 の結果より、固有ひずみの存在を考慮した結合力モデルによる周期仮想き裂の成長曲線は c/w が大きい場合、全面降伏時 a/w が多少 1 より小さくなる可能性がある (この問題を解くには、き裂面から離れた位置に集中荷重を受ける場合の K 値と $\gamma(x, x, a)$ が周期き裂に対して必要である。前者はすでに複素関数表示で求められており実座標系に比較的簡単に変換できる。しかし後者の $\gamma(x, x, a)$ を求めるにはき裂面に集中荷重が作用する場合の K 値を用いて相反定理より COD を求め、集中荷重を集中的な応力に変換しなければならず、膨大な式の変形を必要とするのでここでは行っていない)。この場合には、全面降伏時仮想き裂前方の応力は、殆ど降伏点ぐらいまで大きくなっており、わずかの荷重増加で不連続的に塑性域が成長して、前方のき裂からの塑性域と合体すると考えれば良い。すなわち周期き裂問題は、中央貫通き裂前方の自由縁で x 方向変位を拘束した問題と等しくなるが、 x 方向変位を拘束した場合、拘束しない場合よりも当然塑性域の成長は抑制される。したがって全面降伏直前に塑性域は少しの荷重増加で自由縁まで急成長するものと考えられる。一方自由縁の x 方向変位が拘束されていない中央貫通き裂では Fig. 16 に示したように、固有ひずみを考慮した結合力モデルでは、実断面応力が降伏点に近づくにつれ自由縁に向かって連続的に成長している。

き裂前方の自由縁で x 方向変位が拘束されていない中央貫通き裂の Dugdale モデルで、仮想き裂先端が自由縁に

Fig. 16 Growth of a fictitious crack for each model

まで成長しているにもかかわらず、実断面応力が降伏点より小さくなる兆候を示す事実と、ここでの固有ひずみの存在を考慮した結合力モデルによる塑性域の成長曲線が妥当と考えられることから以下の考察ができる。すなわち塑性域をき裂とモデル化してそのき裂面に降伏点に等しい弾性応力が結合力として働くということだけの条件を付加して、塑性問題を弾性問題に置き換えるという Dugdale モデルの手法は、塑性による K 値の減少(仮想き裂中央部では、中央貫通き裂の場合、そこでの塑性域は K 値を増加させるが、仮想き裂先端付近では K 値を減少させ、全体としては塑性域は K 値を減少させる)を無視した第1近似になっていることが分かる。

以上より Dugdale モデルよりも、ここでの結合力モデルの方が実際の現象をより正確に表しているものと考えられる。しかしここでの結合力モデルも、塑性域の応力状態を単軸応力状態と仮定し、さらに塑性域での固有ひずみ分布をき裂垂直方向に一樣と仮定していることなどから、第1次近似モデルであることは論を待たない。

中央貫通き裂の Dugdale モデルを基礎とした疲労き裂開閉モデルで、最大荷重を低下させた場合の遅延減速効果が実験結果よりも大きくなったこと⁹⁾や、スパイク荷重をかけた直後き裂は停留すると評価されるのにもかかわらず、実験結果では遅延減速効果は現れるものの停留しないという結果¹⁰⁾となっていた。しかし、ここでの結合力モデルでは仮想き裂の成長が Dugdale モデルよりも小さいことから、本モデルを基礎としたき裂開閉モデルでは過去の履歴の影響域が小さく評価されるので上記の現象をより真実に近づけることができるものと期待される。

Fig. 17 には、 $c/w=0.05$ に対し、外応力が小さい場合と、大きい場合を例にとり、見掛け上仮想き裂面に働く等価仮想外応力 $\tilde{\sigma}(x)$ の計算結果を例示する。ここで示した

$\tilde{\sigma}(x)$ は、求められた α_{ik} から直接求めた結果であり、非常に滑らかな応力分布が得られていることが分かる。また塑性域がき裂長に比べて小さい場合には、等価仮想外応力はいずれの仮想き裂位置でも常にき裂を閉口させる方向に作用しているが、大規模降伏条件下では、実き裂先端付近でき裂を開口させる方向、その前方で閉口させる方向に働いていることが分かる。しかしこれは中央貫通き裂の場合であり、片側端部き裂の場合には、3章で議論したように常にき裂を閉口させる方向にしか作用しないと考えられる。

次に Fig. 13 の結果をもとに塑性拘束係数を求める。COD は、一般的に表すと、

$$V(x) = \xi(x, c, \sigma, \sigma_Y) \quad (40)$$

という関数形で表される。通常の塑性拘束係数 ξ の定義では、塑性拘束係数を導入した場合の COD は、

$$V(x) = \xi(x, c, \sigma, \xi \sigma_Y) \quad (41)$$

で与えられる。この補正は Fig. 18 中に示すように、解析的に得られた応力を、 ξ 倍すると同時に COD も ξ 倍する事と等しい。ここで解析的に得られた全面降伏時の結果と、FEM による結果から ξ の値を求めると、Fig. 18 のようになる。

図中には、Dugdale モデルに対して求めた結果も示した。図より、両モデルとも ξ はき裂が大きくなるにつれてわずかに大きくなる傾向を示している。き裂長さに関係なく一定の塑性拘束係数となるとして、その平均値を求めると、固有ひずみを考慮したここでのモデルでは、 $\xi=1.08$ 、Dugdale モデルでは $\xi=1.10$ となった。この塑性拘束係数を導入して、Fig. 13 の FEM の結果と比較したのが Fig. 19 である。塑性拘束係数を導入することで両者の場合とも実際の COD をほぼ推定できることが分かる。

Fig. 20 には、 $c/w=0.5$ の場合について、 ξ を導入した本モデルによるき裂開口変位形状を、 σ_{net}/σ_Y (σ_{net} : 実断面応

Fig. 17 Example of equivalent virtual external stress distribution acting on a crack surface ($c/w=0.05$)

Fig. 18 Relative crack length dependency on plastic constraint factor

Fig. 20 Calculation results of configuration of COD ($c/w = 0.5$, $w = 20$ mm)

Fig. 19 Comparison between mouth COD calculated by using elasto-plastic FEM and one by present model with plastic constraint factor ξ

力)で0.2きざみに求めた結果を、FEM結果とともに示す。当然のことながら、き裂先端近傍ではFEM結果よりも、CODは大きくなっているが、中央部でのき裂開口形状は、両者で良く一致している。Dugdaleモデルによるき裂開口形状と本モデルによるそれを比較するため、図中には $\sigma_{net}/\sigma_Y = 0.8$ の場合につき、き裂中央のCODが本モデルによるそれに一致するように ξ を定め、Dugdaleモデルで計算したCODも示している。本モデルとDugdaleモデルのき裂開口形状は、本モデルの方が当然の事ながら、等価な固有応力が働くために、き裂先端付近では小さくなっており、より真に近づいたき裂開口形状となっていることが分かる。

6. 結 論

大規模降伏の場合には、単純な弾性学による重ね合わせができない。本論文では溶接残留応力や溶接変形の推定で適用している固有応力法により生じる仮想体積力および仮想外力という2つのオペレータを用い、塑性変形を弾性学的に取り扱う方法に言及し、き裂の結合力モデルにこれを応用した。そして中央貫通き裂に対してき裂開口変位を求め、弾塑性FEMならびにDugdaleモデルから得られたき裂開口変位と比較し、その有効性を検討した。得られた結果を以下に要約する。

(1) 仮想き裂部には、き裂線から離れた位置にき裂を開口しようとする仮想体積力が働き、き裂面にはき裂を閉口させようとする仮想外力が働き、それらは物体内で釣り合いを保っている。また仮想き裂面では、仮想外力により生じる応力と固有応力は絶対値が等しく符号が反対であり、仮想き裂面での作用応力は降伏応力と等しい。

(2) き裂線に垂直な面内の塑性域内に一様な固有ひずみが存在し、垂直な面内で仮想体積力により生じる力と仮想外力による力が常に釣り合っているという第1近似により、仮想体積力が働く位置を決定でき、両者によるK値と等しくなる等価な仮想外力が仮想き裂面に働くという結合力モデルを構築した。

(3) 一様外応力を受ける中央貫通き裂に対して、上記の結合力モデルとDugdaleモデルで求めたき裂開口変位は、前者の方がき裂が長くなると、わずかに小さくなるが、その差は小さい。しかし(周期直列き裂でなく)中央貫通き裂のDugdaleモデルでは、実断面応力が降伏点に達する前に、仮想き裂先端が試験片端部にまで成長するという矛盾が生じるのに対し、固有ひずみの存在を考慮した結合力モ

デルでは、実断面応力が降伏点に近づくにつれ、仮想き裂先端が試験片端部に連続的に達するという妥当な傾向を示す。

(4) 塑性域の形状を代表すると考えられる仮想体積力の着点力の形状は、塑性域の拡がりの形状と酷似している。

(5) 中央貫通き裂の場合、塑性域寸法に比べて実き裂が十分小さい場合には、実き裂先端近傍の塑性域はき裂を開口させる方向に、仮想き裂先端近傍の塑性域はき裂を閉口させる方向に作用する。しかし塑性域寸法が実き裂に比べて大きくなると、どの位置の塑性域もき裂を閉口させる方向に作用する。そして塑性域の存在は全体としては、き裂の K 値を見掛上小さくする役割を演じている。

(6) 中央貫通き裂に対する塑性拘束係数は、平面応力状態の場合、固有ひずみの存在を考慮した結合力モデルでは、1.08 となった。

本研究に対し、日本造船学会材料加工委員会材料分科会(主査:町田進東京大学名誉教授)の委員諸氏から有意義な討論を賜った。ここに記して謝意を表します。また本研究は、文部省科学研究費試験研究(代表者:豊貞雅宏)の一部として実施したものである。

参 考 文 献

- 1) 松岡: 溶接製殻構造物の残留応力に関する一解法, 日本造船学会論文集, Vol. 153, (1983), p. 210
- 2) D. S. Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8, (1960), p. 100
- 3) 藤本: 固有歪にもとづく溶接残留応力の解析法, 鉄道技術研究所速報, No. 60, (1960)
- 4) 松岡: 固有応力, 日本造船学会誌, No. 646, (1983), p. 35
- 5) 渡辺, 佐藤: 溶接力学とその応用, 朝倉書店, (1965)
- 6) 竹内: 熱応力, 日新出版, (1971), p. 41
- 7) H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irwin: The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Hellertown, Pa., (1973)
- 8) P. C. Paris: The Mechanics of Fracture Propagation and Solutions to Fracture Arrest Problem, Do. D 2-2195, The Boeing Company, (1957)
- 9) 豊貞, 丹羽, 山口: 長いき裂に対する疲労き裂遅延減速現象とき裂停留条件について, 日本造船学会論文集, Vol. 176, (1994), p. 439
- 10) 豊貞, 丹羽, 後藤, 坂井: ΔK の物理的意味と構造物の疲労寿命推定法, 日本造船学会論文集, Vol. 180, (1996), p. 539