密度流の界面における不安定現象に関する基礎的研究

正 員 胡 長 洪* 正 員 福 地 信 義*

A Numerical Analysis on Instability of Stratified Shear Flow

by Changhong Hu, *Member* Nobuyoshi Fukuchi, *Member*

Summary

Safety, comfort and high-efficiency in marine systems are becoming strongly needed in recent years. For the design of the functional systems such as smoke control of marine fire and purging of gases in a tank, it is often required to solve the problem of two horizontal flows with different densities. In the case of the lower stream with the greater density, the flow is stably stratified under some conditions. If this phenomenon occurs, the efficiency of the gas purging in an enclosed space may be seriously reduced. Acquiring an extensive knowledge of such stratified flow is therefore necessary.

In this paper, the stability of the stratified horizontal shear layer between two uniform streams is investigated by numerical simulation. The numerical method is a control volume method in which the SIMPLE procedure is applied and the QUICK scheme is used for convection term. The development of the Kelvin-Helmholtz (K-H) instability is simulated to show that the shear layer becomes unstable, rolls up into billows and collapses finally. The secondary Kelvin-Helmholtz instability is also observed in the simulation results in a case of high Reynolds number flow. The effects of Richardson number and Reynolds number on the stratified shear flow are investigated and it is found that Richardson number is the dominant parameter for Kelvin-Helmholtz instability. Finally, the unstable region of the stratified flow, which is governed by Richardson number and Reynolds number, is presented from the numerical simulation results.

1. は じ め に

近年、これまで以上に安全性や快適性を追求する機運の高まりにより、船舶や海洋構造物の機能設計において熱・ガス拡散に関する高度な解析が不可欠となっている。特に、火災時の煙制御¹⁾や比重が異なるガス間の置換²⁾を扱う問題では、制御する流体間に密度差があり、軽い上層流体と重い下層流体間の境界面において密度と流れの躍層が存在する密度流を解析対象とすることがある。この密度流では、2層密度や速度の差により界面が形成される場合と、界面の不安定により内部波の巻き込みや砕波が起こって混合される場合では、ガス流動制御の方法や換気効率が極めて異

なる。このため、密度流の界面における不安定現象を解明し、密度や速度の差と界面形成や混合状態の関係を把握して機能システムの設計を行う必要がある。

本研究では、密度流界面の不安定現象の解明のために、有限体積法を応用した SIMPLE 法を用いた数値解析により、境界面の層流状態から内部波が発生して集中渦列の発生、巻き込み・砕波が起こる Kelvin-Helmholtz (K-H) 不安定、さらに、乱流への一起因となる 2 次的渦列の発生による不安定に到るまでの時系列的な現象把握を行った。この解析により、界面不安定に対する支配パラメータである Richardson 数および Reynolds 数の影響を調べ、不安定領域図を作成する。

2. 密度流の不安定現象解析

安定した密度成層流は多くの自然現象と工学に関する問題の中に出現する。密度成層流の界面不安定、すなわち K-H 不安定問題に関する研究は科学の進歩に伴い、この 30

* 九州大学工学部

原稿受理 平成 10 年 1 月 8 日

春季講演会において講演 平成 10 年 5 月 14, 15 日

年間に盛んに行われている。無限小な攪乱に対する界面不安定の発生の必要条件は Richardson 数が 0.25 より小さいことであり、非粘性理論によって証明されている（付録を参照のこと）。この判断基準は高 Reynolds 数の流れにも適用できるが、現実の問題では Richardson 数だけでなく Reynolds 数の影響も重要である。Woods は海洋観測³⁾を行って、Richardson 数が 0.25 より小さいところで、水温躍層に不安定による内部波が発生して、乱流混合となる現象を観測し、さらに不安定域に乱流が発生しない臨界 Reynolds 数の確定も試みた。実験的研究としては、Thorpe による不安定の時間的な発展⁴⁾、Koop らによる不安定の空間的な発展⁵⁾ などが、これらの実験で、K-H 不安定に対する Reynolds 数の影響を、密度成層流が不安定によって乱流に遷移する条件を調べている。一方、数値解析による研究も数多く見られ、Patnaik らは 2 次元の安定成層流を Reynolds 数 200 まで計算した⁶⁾。最近、Staquet はこのような 2 次元計算を Reynolds 数 2600 まで行い、2 次不安定現象を数値計算により求めた⁷⁾。Rogers と Moser は 3 次元の計算を行って、K-H 波の 3 次元構造を明らかにした⁸⁾。これらの計算は直接数値シミュレーションであり、完全な乱流の構造解明までに至っていないが、界面不安定のパラメータに関する研究としては価値のある結果が多く得られている。しかし、K-H 不安定になる条件や、K-H 波が崩れたあとで乱流に移行する条件など、まだ不明な点は数多く残されている。本研究では、機能設計に応用する目的で、2 次元の K-H 波の数値解析を行い、Richardson 数と Reynolds 数で構成した平面内に不安定域を確定することに重点を置く。

2.1 密度流界面のモデル化と支配パラメータ

密度流内の二次元非線型 Kelvin-Helmholtz 波を解析するために、非圧縮性の Newton 流体を対象とし、平行剪断流れの様相を数値計算によりシミュレーションを行う。

速度と密度の初期プロファイルを図 1 のように表し、上層と下層の流速を U と $-U$ 、上層流体の密度を ρ_1 、下層流体の密度 ρ_2 をとすると、速度境界層の厚さの半分 δ は

次のように定義される。

$$\delta = \frac{U}{(du/dz)_{\max}} \quad (1)$$

また、平均密度と密度差を ρ_0 、 $\Delta\rho$ とすると、上層と下層の密度は次の関係がある。

$$\rho_1 = \rho_0 - \frac{1}{2}\Delta\rho, \quad \rho_2 = \rho_0 + \frac{1}{2}\Delta\rho \quad (2)$$

密度成層における流れの状態は、主に次のパラメータにより支配される。

a) Reynolds 数:

$$Re = \frac{U\delta}{\nu} \quad (3)$$

b) 最小 Richardson 数:

$$Ri = \frac{g\Delta\rho\delta\sqrt{Pr}}{2\rho_0 U^2} \quad (4)$$

c) 無次元波数:

$$\alpha = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad (5)$$

d) Prandtl 数:

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (6)$$

ここに、 g は重力の加速度、 λ は波長、 ν は動粘性係数および κ は密度変化に関わる分子拡散係数である。なお、(3) 式の Reynolds 数は境界層厚さと流速差を代表値とする場合の 1/4 の値である。

Richardson 数 Ri は K-H 不安定現象に最も重要なパラメータである。無粘性 2 層流の安定性解析によると、 $Ri \leq 0.25$ は不安定になる必要条件である。なお、Richardson 数については付録において説明する。

さらに、粘性による影響を無視できない流体の場合には、 Ri のほか、Prandtl 数 Pr 、Reynolds 数 Re も考慮する必要がある。無次元波数 α については、現実にはいろいろな波数の擾乱が存在すると考えられるが、計算では最も K-H 不安定になり易い波数 ($\alpha = 0.43$: 線形理論による) を用いる。

2.2 支配方程式

(1) 運動量と密度の輸送方程式

座標は直交デカルト系 (x, y, z) とし、 x 軸を主流方向、 z は鉛直上向きにとる。 y 方向の各状態量を一様とすると、流速 (u, w) および密度 ρ に関する状態は、次の 2 次元方程式により表される。

i) 質量保存式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

ii) 運動量の輸送方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Fig. 1 Initial velocity and density profiles

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g \end{aligned} \quad (9)$$

iii) 密度の輸送方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u\rho}{\partial x} + \frac{\partial w\rho}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \quad (10)$$

ここに、 t は時間および p は圧力である。なお、運動量の輸送式には、密度躍層での密度変化に浮力項のみを考慮する Boussinesq 近似を用いている。

(2) 無次元化

各次元量 (上付き “*” で示す) に対して、流速、波長、平均密度と密度差 $U, \lambda, \rho_0, \Delta\rho$ を用い、以下のように無次元化を行う。

$$\begin{aligned} u &= u^*/U, w = w^*/U, x = x^*/\lambda, z = z^*/\lambda \\ t &= t^*U/\lambda, p = p^*/\rho_0 U^2, \rho = (\rho^* - \rho_0)/\Delta\rho \end{aligned} \quad (11)$$

輸送係数 κ, ν を均一等方性と仮定し、方程式 (7)～(10) を無次元化すると、以下のように書き改められる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha}{2\pi Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\alpha}{2\pi Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho \frac{4\pi Ri}{\sqrt{Pr}\alpha} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u\rho}{\partial x} + \frac{\partial w\rho}{\partial z} = \frac{\alpha}{2\pi Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

(3) 初期条件

界面の安定性は流速に擾乱を与え、その発達状態により判定する。初期状態の流速 (u, w) および密度 ρ は分子拡散と擾乱を考慮して次式で与える。

$$u = \operatorname{erf}\left(\frac{\pi^{3/2}}{\alpha} z\right) + \bar{u}, w = \bar{w}, \rho = -0.5 \operatorname{erf}\left(\frac{\pi^{3/2}}{\alpha} Pr^{1/2} z\right) \quad (16)$$

ここに、($\bar{u}, \bar{w}$) は初期擾乱速度であり、次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\operatorname{sign}(z) A e^{-2\pi|z|} \sin(2\pi x), \\ \bar{w} &= A e^{-2\pi|z|} \cos(2\pi x) \end{aligned} \quad (17)$$

2.3 数値計算法

2次元非線形 Kelvin-Helmholtz 波をシミュレーションするため、運動量と密度に関する輸送方程式を有限体積法で離散化し、SIMPLE 法⁹⁾を用いて数値計算を行う。計算には主流方向では周期性境界条件を用いる⁹⁾。従って、不安定の空間発展型ではなく、時間発展型の解析となる。

SIMPLE 法は、Patanker 等によって開発された有限体積法を応用した輸送方程式の数値解法である。この方法は他の解法と比べて所要計算時間が少なく済み、有限体積

Fig. 2 Control Volume for variable $\phi_{i,j}$

法を用いるために物理量の保存則を満たし易い利点がある。

この解法では、状態量を ϕ とし、支配方程式 (13)～(15) を次の一般式に書き換える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = S \quad (18)$$

ここに、 Γ_ϕ は動粘性係数または拡散係数である。この方程式を、Fig. 2 に破線枠で示す有限体積の領域について積分すると、次式に改められる。

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x \Delta z + \left(u\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \Delta z \\ - \left(u\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \Delta z + \left(w\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta x \\ - \left(w\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta x = S_{i,j} \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (19)$$

方程式 (19) の移流項の処理には、QUICK スキーム¹⁰⁾を使用する。例えば、 $(u\phi)_{i-\frac{1}{2},j}$ に対して、 $\phi_{i-\frac{1}{2},j}$ は次式となる。

$$\phi_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j}) - \frac{1}{8}(\phi_{i-2,j} + \phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j}) & \text{if } u_{i-\frac{1}{2},j} > 0, \\ \frac{1}{2}(\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j}) - \frac{1}{8}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}) & \text{if } u_{i-\frac{1}{2},j} < 0 \end{cases} \quad (20)$$

この方法では、移流項は 3 次精度の風上差分になるため、数値計算の精度を向上することができる。

計算は、1) 圧力 p を仮定し、これに対応する流速 u, w を求める、2) 質量保存式 (12) を満たすように流速と圧力の補正值 $\Delta p, \Delta u, \Delta w$ を求める、3) 繰り返し補正を行い、収束したら密度を計算する、4) 次のタイムステップの計算に移る、の順序にて行う。

3. 支配パラメータと不安定現象

3.1 計算条件

計算領域の水平方向のサイズは線形理論による最も K-H

不安定な状態になり易い波長に等しくなる $\alpha=0.43$ を使用する。ここでは対象流体を空気とし、Prandtl 数は $Pr=0.71$ を用いる。計算における初期擾乱の大きさは $A=0.03$ とする。

本研究では、K-H 不安定に対する Richardson 数と Reynolds 数のみの影響を調べるために、Reynolds 数と Richardson 数を Table 1 のように変化させて数値実験を行った。

さらに、高 Reynolds 数の場合、2 次不安定 (secondary instability) 現象が起こることがあり、これは K-H 不安定が起こった後に乱流発生の一因となるため、この現象の把握は極めて有意義と考えられている。この現象の数値シミュレーションには内部波の微細構造の解析が必要であり、Table 1 に示すように他計算の約 5 倍のメッシュ数を用いて解析を行った。

3.2 支配パラメータの影響

(1) 内部波の発達・減衰の様相

Fig. 3 は $Ri=0.07$, $Re=300$ の場合を計算した等密度線の時系列であり、不安定の時間的な発展が示されている。この例では、1) 剪断流により運動エネルギーの一部が擾乱

運動エネルギーに転換して内部波を生じ、2) しだいに発達して波の巻き込みが起こり、3) 無次元時間 $t=3\sim 4$ において K-H 波の波高が最大に達し、4) その後に粘性による擾乱エネルギーの消散のために、密度の均等化が起こる、ことを表している。一方、 $Ri=0.19$, $Re=300$ の場合における等密度線を Fig. 4 に示すが、擾乱を起こす転換エネルギーが少ないのと粘性の影響により内部波が生じるのみで発達しない。

Fig. 3 と Fig. 4 に示した等密度線に対する、 $t=3$ 時点での流速ベクトル図を Fig. 5 に示す。 $Ri=0.07$ の場合は大きな渦を巻いている様子が示されているが、等密度線のほうが界面の不安定性を判定し易いので、本論文では主に等密度線を用いる。

不安定の現象をエネルギー的に把握するため、次式により波のエネルギーを計算する。ただし、ここでは基準密度を 1 としている。

Table 1 Description of the calculations

Contents	Ri	Re	α	Pr	Resolution
Effect of Ri	0.03	300	0.43	0.71	(100,248)
	0.07				
	0.11				
	0.15				
	0.19				
	0.28				
Effect of Re	0.07	3	0.43	0.71	(100,248)
		10			
		20			
		50			
		100			
		300			
Second Instability	0.07	1000	0.43	0.71	(200,625)
		2000

Fig. 3 Isopycnic contours as function of time $Ri=0.07$, $Re=300$

Fig. 4 Isopycnic contours as function of time $Ri=0.19$, $Re=300$

Fig. 5 Velocity field at $t=3.0$ (a) $Ri=0.07$, $Re=300$, (b) $Ri=0.19$, $Re=300$

$$E = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_0^\lambda \frac{(u - \bar{u})^2 + w^2}{2} dx \quad (21)$$

ここに、 z_1, z_2 は密度躍層の計算域の上下位置であり、 $\bar{u}$ は 1 波長当たりの平均流速である。従って、

$$\bar{u} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda u dx \quad (22)$$

E の大きさは平行流の運動エネルギーから波のエネルギーへの変換量を表し、従って E は K-H 波の大きさの指標にあたる。

(2) Richardson 数の影響

$Re=300$ の場合について、Richardson 数を変化させ解析を行い、これにより計算した波のエネルギー E の経時変化を Fig. 6 に示す。 Ri が大きくなると、 E が小さくなり、波の周波数も小さくなることがわかる。 $Ri \geq 0.19$ になると、

Fig. 6 Effect of the Richardson number on the evolution of 'wave kinetic energy' E , $Re=300$

と、K-H 不安定は殆ど起こらない。

E の最大時点における等密度線と等渦度線をそれぞれ Fig. 7 と Fig. 8 に示す。等密度線により、Richardson 数が小さいと密度躍層が極めて狭く、K-H 波の波高も高く波の巻き込みも強いことがわかる。一方、Richardson 数が大きくなるに従い、重力による安定効果が増大して内部波は不活発になり、密度勾配も小さくなって躍層幅が増大する。

対応する等渦度線からは、Richardson 数の影響は剪断層自体には少ないが、剪断層の鉛直方向の運動は Richardson 数の増大に伴って擾乱エネルギーが減少して重力に対抗し難く、波高が小さくなるのが分かる。

(3) Reynolds 数の影響

剪断流において粘性は擾乱のエネルギーを消散する働きをし、流れを安定させるために、Reynolds 数が小さくなると、K-H 不安定が起こり難くなると推測できる。また、計算は Prandtl 数を一定に行ったため、Reynolds 数が小さくなると、流れに対する粘性影響が強くなると同時に、物質の拡散影響も強くなる。

Fig. 9 は $Ri=0.07$ の場合について、Reynolds 数を変化させて計算した波のエネルギー E の経時変化である。Reynolds 数が大きくなるに従い、 E も大きくなるがわかる。 $Ri=0.07$ であっても $Re < 50$ になると、K-H 不安定は起こらなくなる。

E の最大時点における等密度線と等渦度線をそれぞれ Fig. 10 と Fig. 11 に示す。等密度線では、 $Re=50$ の場合には不安定が起こらず、等密度線の勾配が緩く密度躍層が全体的に広がっている。これは、躍層が不安定になる前に強い分子粘性拡散によって波エネルギーが消散されたと考えられる。 $Re > 300$ では、Reynolds 数の影響が顕著ではなく

Fig. 7 Effect of the Richardson number on the isopycnal contours at the time the wave kinetic energy reaches its maximum, $Re=300$

Fig. 8 Effect of the Richardson number on the vorticity contours at the time the wave kinetic energy reaches its maximum, $Re=300$

Fig. 9 Effect of the Reynolds number on the evolution of 'wave kinetic energy' E , $Ri=0.07$

なる。

一方、等渦度線では、 $Re=50$ の場合には、強い粘性の影響によって、元々は薄い剪断層が拡散され、等高線の間隔も全体的に広がっている。 $Re>300$ の場合には薄い剪断層が拡散されずに残っており、波の巻き込みの中心から分離して、上下部に伸びている。

これらの図より、界面不安定に対する Reynolds 数の影響は Richardson 数とは逆比例的働きをし、その影響度は小さいことがわかる。

3.3 2次不安定

実験などによって、K-H 波が崩れた後、流れは乱流に転換して行く。K-H 波が崩れ始めた時、隣接する波の渦巻き

の間に、スケールの小さい不安定波が生じる。これは 2 次不安定 (secondary instability) と呼ばれる。この 2 次不安定は周期倍分岐により K-H 波がカオス的な乱流に崩れていく過程の初期様相と指摘されている¹¹⁾。

数値計算により 2 次不安定を表現できるのは、粘性の影響が小さくエネルギー消散の過程が長く続く高 Reynolds 数の場合に限られ、しかも細かい計算メッシュが必要である⁷⁾。ここでは、 $Ri=0.07$, $Re=2000$ のケースについて、メッシュ数を他の約 5 倍にして計算した。計算結果として、等密度線の時間発展の様相を Fig. 12 に示すが、 $t=5.5$ 時点の等高線にはっきりと 2 次不安定の様子がシミュレーションされている。

計算結果は $t=6.0$ まで示しているが、この先、K-H 波が崩れて、細かい渦に変わり、最終的に乱流になる様子が想定されるが、今回の計算は 2 次元解析であり、さら計算メッシュ数も不足しているため追跡できなかった。K-H 波が崩れた後の流れは本質的に 3 次元の乱流であるため、乱流への変遷に関する解析は 3 次元な計算を必要とする。

3.4 密度流の不安定領域

以上の結果から、K-H 波の不安定になる条件は Richardson 数のみならず、Reynolds 数にも顕著に影響されることがわかる。横軸に Reynolds 数、縦軸には Richardson 数を取り、界面の安定 (○印) と不安定 (●印) を表示すると Fig. 13 のようになる。この図には、Table 1 に示す計算のほかに、さらに多くの Reynolds 数と Richardson 数の組み合わせを計算して示している。なお、計算の結果から安定と不安定の判断は、計算した E の一番大きい時点での等密度線において、波の巻き込み (billow) が発生したら不安

Fig. 10 Effect of the Reynolds number on the isopycnic contours at the time the wave kinetic energy reaches its maximum, $Ri=0.07$

Fig. 11 Effect of the Reynolds number on the vorticity contours at the time the wave kinetic energy reaches its maximum, $Ri=0.07$

Fig. 12 Isopycnic contours that shows onset of secondary instability. $Ri=0.07$, $Re=2000$. The arrows indicate the secondary Kelvin-Helmholtz waves

定と判定した。

これらの数値計算結果によると、全 $Ri-Re$ 領域は3つの領域に分けることができる。

- I. 安定領域(1): $Ri > 0.25$; 密度差と流速による剪断エネルギーが小さいために内部波が発達し難い安定域。Reynolds 数が小さいところでは粘性の影響もある。

Fig. 13 Effect of Richardson number and Reynolds number on Kelvin-Helmholtz instability

- II. 安定領域(2): $Ri \leq 0.25$; Reynolds 数が小さく、主に粘性による内部波の発達し難い安定域。
- III. 不安定領域: $Ri \leq 0.25$; 密度差と流速による剪断エネルギーが大きく、粘性の影響が小さい ($Re > 20$) ために内部波が発達し易い不安定域。

この図では、Reynolds 数が 20000 以上になると粘性の影響は無視でき、この領域では理論解析による流体不安定の必要条件 $Ri \leq 0.25$ と一致している。さらに、Richardson 数が次の条件下で界面不安定が起こる。

$$Ri < 0.25 - 0.5 / (Re - 20)^{1/3} \quad (23)$$

これより、Reynolds 数の影響度は Richardson 数に比べ $1/3$ 乗程度であることがわかる。

4. 結 言

密度流界面の不安定現象の解明のために、境界面の層流状態から内部波の Kelvin-Helmholtz (K-H) 不安定、さらに、乱流への一起因となる 2 次不安定に到るまでの現象把握を数値解析により行い、界面不安定の支配パラメータ Richardson 数および Reynolds 数の影響度を調べて、次の事が明らかになった。

- (1) K-H 不安定の様相は、剪断流の運動エネルギーが擾乱エネルギーに転換して内部波を生じ、しだいに発達して波の巻き込みが起こる。波高が最大に達した後に粘性による擾乱エネルギーの消散により波が減衰する。
- (2) Richardson 数が小さいと密度躍層が極めて狭く、K-H 波の波高も高く波の巻き込みも強いが、Richardson 数が大きくなるに従い、重力による安定効果が増大して内部波は不活発になり、密度勾配も小さくなって躍層幅が増大する。
- (3) 剪断流において粘性は擾乱のエネルギーを消散する働きをし、流れを安定させるために、Reynolds 数が小さい場合には K-H 不安定が起こり難くなる。
- (4) 高 Reynolds 数の場合には、K-H 波が崩れ始めた時、隣接する波の渦巻きの中にスケールが小さい不安定波が生じる。この 2 次不安定は周期倍分岐により K-H 波がカオス的な乱流に崩れていく過程の初期様相を示している。界面不安定が起こる条件は、この計算例では $Ri < 0.25 - 0.5 / (Re - 20)^{1/3}$ である。

参 考 文 献

- 1) 福地信義, 藤野剛史, 篠田岳忠: 大規模空間の火災時における煙の界面形成と拡散に関する研究, 日本造船学会論文集, 第 181 号, (1993), pp. 441-450.
- 2) 福地信義, 栖原二郎: ガス置換によるタンク内ガス濃度分布について, (第 3 報) 置換ガス間の比重差の影響, 日本造船学会論文集, 第 147 号, (1980), pp. 125-132.
- 3) Woods, J. D.: On Richardson's number as a criterion for laminar-turbulent-laminar transition in the ocean and atmosphere, Radio Science, (1969),

- vol. 4, pp. 1289-1298.
- 4) Thorpe, S. A.: Experiments on the instability of stratified shear flows: miscible fluids, J. Fluid Mech. (1971), Vol. 46, pp. 299-319.
 - 5) Koop, C. G. and Browand, F. K.: Instability and turbulence in a stratified fluid with shear, J. Fluid Mech. (1979), Vol. 93, pp. 135-159.
 - 6) Patnaik, P. C., Sherman, F. S. and Corcos, G. M.: A numerical simulation of Kelvin-Helmholtz waves of finite amplitude, J. Fluid Mech. (1976), vol. 73, part 2, pp. 215-240.
 - 7) Staquet, C.: Two-dimensional secondary instabilities in a strongly stratified shear layer, J. Fluid Mech. (1995), vol. 296, pp. 73-126.
 - 8) Rogers, M. M. and Moser, R. D.: The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz rollup, J. Fluid Mech. (1992), vol. 243, pp. 183-226.
 - 9) S. V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, (1980).
 - 10) B. P. Leonard: A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, Comp. Mech. Appl. Mech. Eng., (1979), Vol. 19, pp. 59-98.
 - 11) Thorpe, S. A.: Transitional phenomena on turbulence in stratified fluids, J. Geophys. Res., (1987), Vol. 92 (C 5), pp. 5231-5248.
 - 12) Drazin, P. G. and Reid, W. H.: Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, (1981).

付録 Richardson 数について

軽い流体が上にある ($d\rho/dz < 0$) 粘性のない二層水平流を考える。不安定は二層流体の相対速度による運動エネルギーの一部が擾乱運動エネルギーに変換し、これが浮力によるポテンシャルエネルギーを超える時に起こる¹²⁾。

高さ z の所の密度 ρ , 水平速度 U の粒子と、高さ $z+\delta z$ の所の密度 $\rho+\delta\rho$, 水平速度 $U+\delta U$ の粒子が擾乱により入れ替わる場合ついて、ここで、 $\delta\rho=(d\rho/dz)\delta z$, $\delta U=(dU/dz)\delta z$ とすると、所要の仕事は次のようになる。

$$\delta W = -g\delta\rho\delta z \quad (\text{A.1})$$

水平方向の運動量の保存を考えて、位置交換後の z 点と $z+\delta z$ 点の速度を $U+k\delta U$ と $U+(1-k)\delta U$ に仮定する。ただし k は 0 と 1 の間の数である。従って、位置交換により解放される運動エネルギー δT は次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2}\rho U^2 + \frac{1}{2}(\rho+\delta\rho)(U+\delta U)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\rho(U+k\delta U)^2 - \frac{1}{2}(\rho+\delta\rho)(U+(1-k)\delta U)^2 \\ &= k(1-k)\rho(\delta U)^2 + U\delta U\delta\rho \\ &\leq \frac{1}{4}\rho(\delta U)^2 + U\delta U\delta\rho \end{aligned}$$

不安定を起こる必要条件は $\delta W \leq \delta T$ なので、

$$-g\frac{d\rho}{dz} \leq \frac{1}{4}\rho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 + U\frac{dU}{dz}\frac{d\rho}{dz} \quad (\text{A.2})$$

の関係がある。これにより、式 (A.2) の密度変化による慣性影響項 (右辺第 2 項) を無視し、次ぎの勾配 Richardson 数 Ri^* を界面に乱れの生じ易さの指標とする。

$$Ri^* = -g\frac{d\rho}{dz} / \rho\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \quad (\text{A.3})$$

一般的に、 $Ri^* \leq 0.25$ は非粘性流体に対する不安定の必要条件であり、実際の粘性流体に対しても、高 Reynolds 数の場合には、式 (A.3) は不安定の判断基準として合理的である。ただし、 Ri^* の値は局所的な値であるために、全域的な指標が必要なこともある。

そこで、分子拡散のみ考えて、初期の流速と密度のプロファイルを次ぎのように仮定し、

$$u = U \operatorname{erf}\left(\frac{\pi^{1/2}}{2\delta}z\right) \quad (\text{A.4})$$

$$\rho = \rho_0 - 0.5\Delta\rho \operatorname{erf}\left(\frac{\pi^{1/2}}{2\delta}Pr^{1/2}z\right) \quad (\text{A.5})$$

これを (A.3) に代入して、 $z=0$ として求めた次ぎの最小 Richardson 数を全域的な安定性の指標として用いる。

$$Ri = \frac{g(\Delta\rho/\rho_0)\delta\sqrt{Pr}}{2U^2} \quad (\text{A.6})$$

ただし、 $\delta = \frac{U}{(du/dz)_{\max}}$