非保存力学系の動的挙動と不安定現象に関する研究

(その1) 従動力を受ける円形アーチ構造のカオスの挙動

正員 福地信義* 学生員 田中太氏*

A Characteristic Analysis on Dynamic Stability of Form-resistant
Structures in Non-conservative System

(Part 1) Chaotic Dynamics of Circular Arch subjected to Follower Forces

by Nobuyoshi Fukuchi, *Member* Takashi Tanaka, *Student Member*

Summary

The deformation and dynamic behavior mechanism of submerged marine frame structures with circular arches and membrane are in principle of a non-conservative nature as circulatory system, since the follower type hydrostatic pressure works vertically to its deformed surface at all times. Disturbance forces of various types, which are omnipresent in a marine environment, may be the most serious factor and occur complexity for dynamic behavior of a circular arch framework undergoing large deflections.

This paper deals with a characteristic analysis on chaotic dynamics of the circular arch subjected to follower forces. For that purpose, the governing equations for finite deformations and dynamic behavior of the circular arch are defined in a mono-clinically convected coordinate description. Therefore, by investigating time histories of motion, phase plane portraits and stability region charts of the disturbed equilibrium in an excitation field, the chaotic behavior of a circular arch is clarified to take an entirely different phase from Duffing system.

1. はじめに

貯蔵、養殖などの海中空間利用や海洋資源開発などのために、海中に展張する薄肉シェル構造や薄膜付きアーチ骨組み構造などの比較的柔軟な曲率のある構造物が出現することが考えられる。このような構造物では、水圧として非保存系の従動力が作用し、荷重により曲率変化が起こることにより構造のもつ形態抵抗の変化を引き起こして、さらに荷重に反映する循環のために、擾乱がある場合のその動的挙動は極めて複雑である。このような非保存力学系の動的挙動は一般にカオスの挙動¹⁾となるが、Duffing系などの比較的単純な支配方程式で表される構造の場合には研究²⁾³⁾がなされているが、複雑な支配方程式となる従動力が作用する形態抵抗構造についての研究は少なく、その動

的挙動と不安定現象の様相を把握する必要がある。

本研究では、非保存力学系の問題における動的・不安定現象の把握と安定性判別法の確立を目的とし、第1報では純循環系の問題を対象に、例として、従動力を受ける円形アーチ構造について、その安定限界の近傍で現出するカオスの挙動を調べる。これには、負荷時の円形アーチの擾乱による安定領域図を作成し、その共振域付近における動的挙動について求めた周期分岐図、応答波形、ポアンカレ断面および相平面を分析し、さらにDuffing系の挙動を比較することによって、その動的・不安定現象を解明する。

2. 対比のためのDuffing系——薄肉シェルの動的挙動

薄肉シェルが水圧による追従力を受けた状態において擾乱が作用する場合の支配方程式を簡略化するとDuffing系の方程式が導出される。

2.1 薄肉シェルの擾乱による運動方程式⁴⁾⁵⁾

水圧による従動力が作用した薄肉シェルの大変形挙動を表すために、Fig. 1に示すような変形に追従する一般座標

* 九州大学大学院工学研究科

Fig. 2 Stability regions of the disturbed equilibrium in an excitation force field of a thin spherical shell [loading stage: P_{90}]

Fig. 3 Bifurcation diagrams [loading stage: P_{90} , $\Omega=0.9$]

Fig. 4 Detail of bifurcation diagrams
[loading stage: P_{90} , $\Omega=0.9$]

Fig. 5 Phase portraits and responses to excitation force
[loading stage: P_{90} , $\Omega=0.9$]

こる。このとき第1周期分岐図では周期分岐が始まり、2, 4, 8周期と分岐を起こし、その後急激に分岐数が増加してカオスにいたり、その後第2周期分岐図と同様に跳躍が起こる。

このように、周期分岐図における跳躍と周期分岐は動的挙動の安定性を決定づける。

(2) カオス現象に至るまで

典型的な周期分岐からカオスに至る過程を調べるために、静的荷重 P_{90} で周波数 $\Omega=0.9$ の場合において周期分岐が始まり、2, 4, 8周期分岐と周期倍分岐が起こって分岐が集積し、その後に逆分岐を経て非周期運動のカオス状態に至り、さらに大規模な跳躍を起こすまでの周期分岐図を Fig. 4 に示す。さらにその各振幅に対応する波形と相平面を Fig. 5 に示す。

擾乱の荷重振幅 B をゼロから次第に増加させると、最初は相平面が円形の単調振動であるが、小規模な跳躍の後には Fig. 5(a) のように変化する。さらに Fig. 5(b) のように2, 4, 8周期まで周期分岐が起きるのが容易に判別で

Fig. 6 Bifurcation diagrams [loading stage: P_{90}]

きる。8周期を過ぎると、Fig. 5(c)に示すように相平面はメビウスの帯を伴ったカオス的な軌道を描き、最終的には大規模な跳躍が起こり、Fig. 5(d)のように相平面が円形の単調振動となる。

(3) 不安定への移行

周波数による動的不安定の様相の違いを調べるために、静的荷重 90% 状態において Ω を変化させて周期分岐図を求め、これを Fig. 6 に示す。さらに、これにより判別した跳躍 (□印)、周期分岐の発端である 2 周期分岐 (△印)、カオス状態 (○印) を安定領域図 (Fig. 2) の上に示す。

安定領域図においては周波数 $\Omega=0.85$ 辺りで安定限界の振幅が大きく低下しているが、この領域を正規共振不安定領域と呼ぶことにする。この領域を境にして安定限界が左側すなわち周波数が小さい側は滑らかなのに対して、右側すなわち周波数が大きい側では安定限界が複雑なフラクタルな様相を呈している。

これは、左側領域では、不安定への移行は変位に跳躍等のヒステリシス現象が見られる範囲で、いわゆる fold 分

Fig. 7 Bifurcation diagrams [loading stage: P_{90} , $\Omega=0.43$]

岐の起こる限界として安定限界が得られ、その周期分岐図は例えば Fig. 6(d) のように跳躍現象の生起を表す。また、右側領域では、2.3(2)で述べているように、周期分岐からカオス状態を経て不安定に至っており、不安定限界は近似的にはいわゆる flip 分岐の発生する限界として得られるためである。

非正規共振による不安定領域 $\Omega=0.43$ においても同様に周期分岐 (Fig. 7) および波形・相平面 (Fig. 8) による動的挙動の分析を行ったが、周期倍分岐からカオスになり不安定に至る現象には、 $\Omega=0.9$ の場合と大きな差異はない。ただ、非正規共振 ($1/2, 1/3, 1/4, \dots$, 分数倍) の特徴としては一周期の波形の中に 2 つの振幅が存在しており、相平面では軌道が交わっており、カオスに至る際にはメビウスの帯も現れている。

Fig. 8 Phase portraits and responses to excitation force [loading stage: P_{90} , $\Omega=0.43$]

3. 従動力が作用する円形アーチ構造の擾乱による支配方程式

薄肉シェルの運動方程式を簡易化した Duffing 方程式に基づく動的挙動を2.において調べたが、一般に水圧のような従動力が作用する形態抵抗構造は、支配方程式の複雑さが違うために、その動的挙動は極めて複雑な様相を呈することが予測される。このため、形態抵抗構造の中で最も単純な構造例である円形アーチが擾乱のある従動力を受ける場合について解析する。

3.1 円形アーチの大変形に関する方程式

接線方向の従動力 X および法線方向の従動力 Z を受ける円弧アーチの大変形解析には、埋め込み曲線座標系を用いた薄肉シェル構造の平衡方程式 (A.1) から変換し、変位で表した次の平衡方程式⁶⁾を用いる。なお、Fig. 9 に示すように、アーチの軸に対し接線方向の変位を u 、法線方向の変位を w とする。

$$\begin{aligned} \frac{D}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} w \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= -X \quad (3) \\ -\frac{K}{r^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{D}{2r^4} \left[-2r^2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} - 2r^2 w + 2r \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right. \\ &+ 2r \frac{\partial u}{\partial \varphi} w + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + r \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \\ &\left. - 2rw \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - rw^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} w^2 + w^3 \right] = -Z \quad (4) \end{aligned}$$

ここに、 r はアーチの曲率半径、 φ は極座標における周角度であり、 D, K はそれぞれアーチの引張剛性、曲げ剛性である。

数値解析は、荷重増分 $\Delta X, \Delta Z$ に対する変位増分 $\Delta u, \Delta w$ として、(3)~(4)式を増分式に改めて変位制御型の荷重増分法を用いる。

3.2 円形アーチの擾乱による運動方程式

アーチの動的不安定現象を調べるために、擾乱を脈動荷

Fig. 9 Circular arch definition in monoclinically convected coordinates

重と仮定して Small Vibration Method を用いる。

動的変位を u^*, w^* とすれば、その運動方程式は大変形時の平衡方程式 (3), (4) の微小変動分の式に、荷重項を擾乱 (脈動荷重) $Z^* \sin \omega \cdot t$ に置き換え、さらに慣性項を考慮して次式⁶⁾となる。ここに、 Z^* は擾乱の大きさであり、 ω は円振動数 (rad/sec) である。

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{D}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} w^* + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} w^* \right) &= 0 \quad (5) \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{K}{r^4} \frac{\partial^4 u^*}{\partial \varphi^4} - \frac{D}{2r^4} \left[-2r^2 \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} - 2r^2 w^* \right. \\ &+ 2r \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} + 2r \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} + 2r \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} w^* \\ &+ 2r \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} w^* + \left(\frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} \\ &+ 2r \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \\ &- 2rw^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} - 2rw^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} - 2rw^* w^* + \left(\frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \right)^2 w^* \\ &+ 2 \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} w^* \\ &\left. + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} w^2 + 2w^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \varphi^2} + 3w^2 w^* \right] = Z^* \sin \omega \cdot t \quad (6) \end{aligned}$$

3.3 数値計算

平衡方程式 (3), (4) および運動方程式 (5), (6) を数値的に解くために Galerkin 法を適用して定式化し、荷重時の擾乱による動的挙動は Runge-Kutta-Gill 法を用いて解いて調べる。

円形アーチの支持条件は両端ヒンジとし、Galerkin 法適用のための試行関数としては次式を用いる。

$$u = \sum_{m=1}^N U_m \sin \left[\frac{(m+1)\pi\varphi}{\alpha} \right], \quad w = \sum_{m=1}^N W_m \sin \left[\frac{m\pi\varphi}{\alpha} \right] \quad (7)$$

ここに、 α はアーチの開き角である。また、 U_m, W_m は変位の展開係数であり、大たわみ計算では増分量の係数 $\Delta U_m, \Delta W_m$ および動的挙動の計算では U_m^*, W_m^* を用いる。

また、円形アーチは一定法線荷重および擾乱による形状変化に追従して剛性の変化を生じるために、運動方程式では大変形の増分方程式における剛性係数に、擾乱による剛性変化の補正項を加えて計算した。

4. 擾乱による円形アーチ構造のカオスの挙動

ここでは散逸の影響がない純循環系のカオス現象を問題の対象として、運動方程式に減衰項を含まない (5), (6) を用いて、円形アーチが擾乱のある従動力を受ける場合について解析する。

4.1 擾乱による安定領域と周期分岐

(1) 従動力による大変形

開き角 60° 、細長比 100 の正方形断面をもつ鋼製 (ヤン

グ率 $1.96 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 密度 $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ の円形アーチを計算対象として解析し, その荷重と変位の関係を Fig. 10(a) に示し, アーチの変形状態を Fig. 10(b) 示す. この円形アーチでは飛び移り不安定現象が起こり, その静的な臨界荷重 $Z_{\max}$ を 100% として, これに対する荷重比 $x\%$ を受ける載荷状態を P_x と表す.

ここでは, 従動荷重が臨界荷重 P_{100} に達しなくても擾乱のもつ周波数と振幅によっては不安定になることが起こり得るので, P_{40} と P_{70} における擾乱による動的挙動から不安定への移行時の現象把握を行う.

(2) 安定領域図

擾乱のもつ円振動数 $\omega \text{ (rad/sec)}$ と荷重振幅 Z^* は運動方程式の制御パラメータであり, これらによる安定性を表わす $\omega-Z^*$ 平面上の安定領域図を求めてみる. 計算は, 1 周期を 20 等分し, 初期条件は静止状態の $w^*(0)=\varepsilon$, $\dot{w}^*(0)=0$ (ε は極小値) として, Runge-Kutta-Gill 法を用いた. 数値的に大変形時の円形アーチの運動状態がアーチの断面高さ以上の場合に不安定と判断した.

P_{40} , P_{70} および P_{90} における安定領域図を Fig. 11 に示すが, 特に P_{70} において不安定領域が幅轉する周波数 $\omega=$

4250 の周辺を拡大した安定領域図も併せて示している. この図から, 安定領域と不安定領域の境界は自己相似的な形状をしていることがわかる.

P_{40} の安定領域図では $\omega=2400, 4350$ に大きな共振によ

Fig. 10 Deformed configurations of a circular arch with increasing load

Fig. 11 Stability regions of the disturbed equilibrium in an excitation force field of a circular arch under various loads

る不安定域が見られ、その共振モードは、 $\omega=2400$ では軸方向振動 ($m=1, 2$) と曲げ振動 ($m=2, 4$) が連成した逆対称モードおよび $\omega=4350$ では曲げ振動 ($m=2, 4$) が主体の逆対称モードである。

一方、 P_{70} の安定領域図では $\omega=1850, 4250$ に大きな共振による不安定域が見られ、その共振モードは、 $\omega=1850$ では軸方向振動 ($m=1, 3$) と曲げ振動 ($m=1, 3$) が連成した対称モードおよび $\omega=4250$ では曲げ振動 ($m=1, 3$) が主体の対称モードである。また、 P_{90} では $\omega=1250, 4200$ に大きな共振による不安定域が見られ、その際の共振モードは P_{70} と同じである。以降、軸方向振動と曲げ振動が連成する共振域を“連成共振域”および曲げ振動が主体の共振域を“曲げ共振域”と呼ぶ。

このように、作用する従動荷重の大きさが増加すると、不安定を生起する周波数は漸次減少すると共に、変形によるアーチの曲率変化により形態抵抗が変わり、不安定が起る最小荷重の応答モードが変化する。特に、負荷によりアーチの中央部が押し下げられる“M”字形の変形のため圧縮剛性が減少し、曲げが主体の $\omega=4300$ 前後の振動よりも、曲げと軸方向の振動が連成する方の応答モードの変化が大きい。

擾乱は種々の周波数が合成した“ゆらぎ”であることが

多いが、作用する従動荷重の大きさが増加するに伴い応答する周波数が分岐により多様化することが考えられる。

(3) 周期分岐図

擾乱のもつ周波数を固定して、制御パラメータとして荷重振幅を変化させた場合の周期分岐図を求め、1周期ごとの変位応答の様子を調べた。計算では、荷重振幅をゼロから徐々に増加させて、各振幅において過渡応答が無くなり定常応答になっていると見られる800周期目から1000周期目までの変位応答を、1周期ごとの不連続な値としてプロットした。なお、各振幅において、計算開始時の荷重振幅を微小な $Z^*/P_{\max}=10^{-6}$ の静止状態の $w^*(0)=\varepsilon, \dot{w}^*(0)=0$ (ε は極小値) を初期条件とし、以後は前ステップの最終状態を初期条件とする、周期分岐の様子を明確に示すことができる方法を用いた。

ここで例として、40%静的荷重状態 P_{40} で共振域の前後の周波数 $\omega=2300$ (前域)、2500 (後域) および 4250 (前域)、4450 (後域) の周期分岐図を Fig. 12 に示し、さらに70%静的荷重状態 (P_{70}) で共振域の前後の周波数 $\omega=1750$ (前域)、1900 (後域) および 4150 (前域)、4400 (後域) の周期分岐図を Fig. 13 に示す。何れも、荷重振幅が増加すると、周期倍分岐が重複して起きて分岐の集積の後に、逆分岐 (サブ・クリティカル分岐) が始まっ

Fig. 12 Bifurcation diagrams [loading stage: P_{40}]

て非周期運動のカオス状態に到った後に、大規模な跳躍が起きている。この現象は2.で述べた薄肉シェルの場合には共振前域では跳躍が起こる fold 分岐であるのとは異なり、共振後域では周期分岐からカオス状態を経て不安定になる現象は基本的には同じである。

しかし、Fig. 14(a)に示す P_{70} における $\omega=4150$ の周期分岐図の部分拡大図から明らかに、擾乱の荷重振幅が極めて小さい段階から応答周期は一つではなくて多数の周期を含んでおり、各周期がさらに分岐するためにカオス状態の非周期運動へ移行し易い。このことが、従動力が作

Fig. 13 Bifurcation diagrams [loading stage: P_{70}]

Fig. 14 Details of bifurcation diagrams [loading stage: P_{70} , $\omega=4150$ rad/s]

用する形態抵抗構造のように、支配方程式が複雑である構造の動的挙動は極めて複雑な様相を呈することを決定づける。ただし、周期分岐図の部分拡大図 Fig. 14(b)の紋様を見ると、周期は常に周期倍分岐の集積とその逆分岐だけ

ではなく、突然に周期運動が現れて出来る窓（ウィンドウ）が存在する可能性もある。

Fig. 15に P_{70} , $\omega=4400$ における変動変位の展開係数 W_m^* の周期分岐図を示すが、荷重振幅の増加とともに、主

Fig. 15 Bifurcation diagrams on various response modes [loading stage: P_{70} , $\omega=4400$ rad/s]

Fig. 16 Phase portraits and Poincaré sections [loading stage: P_{70} , $\omega=1750$ rad/s]

モード $m=1, 3$ は周期的運動からカオス状態となり跳躍に到り、一方他モード $m=2, 4$ は跳躍時に応答周期が集約した周期運動となっている。

4.2 円形アーチの動的挙動と不安定

周期分岐からカオスに到り不安定になるまでの概念的な過程を4.1で述べたが、安定領域図の自己相似性も含めた複雑な形状を理解するためには、制御パラメータ Z^* が大きくなるに従って動的挙動が変化し不安定になる過程を詳しく調べる必要がある。これには Z^* の変化に応じた

$(w^*, \dot{w}^*)$ の相平面および相空間の軌道を面で切ってその切り口で軌道の一週ごとの変化を眺めるポアンカレ断面を描いて判断する。なお、ポアンカレ断面の位相をズラして累積したものが相平面である。

ここでは70%静的荷重状態 (P_{70}) における連成共振域の前後の周波数 $\omega=1750$ (連成共振前域), 1900 (連成共振後域) について10000周期目までを計算し、その相平面とポアンカレ断面をFig. 16およびFig. 17に示す。また、各位相における応答と変位応答をFig. 18およびFig. 19

Fig. 17 Phase portraits and Poincaré sections [loading stage: P_{70} , $\omega=1900$ rad/s]

Fig. 18 Responses of phase modes and displacement to excitation force
[loading stage: P_{70} , $\omega=1750$ rad/s]

に示す。なお、ポアンカレ断面は位相 $t=nT$ (周期 $T=2\pi/\omega$) の位置のもので、相平面の変位速度には時間ステップ毎の変動増分を用いた。

さらに、70%静的荷重状態 (P_{70}) における曲げ共振域の前後の周波数 $\omega=4150$ (曲げ共振前域)、4400 (曲げ共振後域) についての相平面とポアンカレ断面を Fig. 20 および Fig. 21 に示し、各位相における応答と変位応答を Fig. 22 および Fig. 23 に示す。

各相平面とポアンカレ断面 (“P 断面” と略す) は、荷重振幅 Z^* が大きくなり不安定に到るまでの 5 段階を示しているが、途中の状態の知見も加えて判断すると、その推移は次のようになる。

(a) 連成共振前域 ($P_{70}, \omega=1750$ rad/s)

①相平面は、7つの円環よりなる P 断面が円に内接して回転しているが、しだいに円環の厚みが増して円周上を回転するようになる。

Fig. 19 Responses of phase modes and displacement to excitation force
[loading stage: P_{70} , $\omega=1900$ rad/s]

Fig. 20 Phase portraits and Poincaré sections
[loading stage: P_{70} , $\omega=4150$ rad/s]

- ② P断面は 5000 周期以上になると円から 3 本の螺旋から成る 7 本の渦が発生し、相平面では軌道円の径が大きくなる。従って、変位応答が増幅し始める。
- ③ 軌道円に対し P 断面の径が大きくなり、螺旋状の渦はしだいに細くなる。
- ④ P 断面の径が大きくなり続けて中心に空洞を生じ、渦の巻きが端より逆向きになり始める。
- ⑤ P 断面では渦の巻きが逆転して端部から不鮮明になり、

さらに巨大化して発散する。これは P 断面の周りが乱れ、従って変動振幅の包絡線が複雑になり、次第に全体に広がり非周期運動となり不安定に移行することを見わけている。

(b) 連成共振後域 (P_{70} , $\omega=1900$ rad/s)

- ① 相平面は、螺旋よりなる円環が円に内接して回転しているが、しだいに円環が大きくなって円軌道上を回転するようになる。

Fig. 21 Phase portraits and Poincaré sections
[loading stage: P_{70} , $\omega=4400$ rad/s]

Fig. 22 Responses of phase modes and displacement to excitation force
[loading stage: P_{70} , $\omega=4150$ rad/s]

Fig. 23 Responses of phase modes and displacement to excitation force
[loading stage: P_{70} , $\omega=4400$ rad/s]

② P断面は5000周期以上になると円環の内部が埋まり、相平面では軌道円の径が大きくなる。この後、しだいに外周の渦が発達し、変位応答が増幅し始める。

③ 軌道円に対しP断面の径が大きくなり、渦は巨大化して、変位応答がさらに増幅する。

④ P断面の渦の巻きが端部より逆になり、さらに逆転して向きが替わる縮れ状態となる。

⑤ 渦巻きの端部が乱れて無秩序状態になり発散する。これは擾乱による運動が非周期性をもつことを意味する。

(c) 曲げ共振前域 (P_{70} , $\omega=4150$ rad/s)

① 相平面は、薄い断面の円環よりなるP断面が円に内接して回転しているが、しだいに円環の厚みが増して円周上を回転するようになる。

② P断面が増大して軌道円の半分以上になり、多数の渦がまくようになり、端部では渦巻き方向が反転する。

③ P断面は渦中央部が空洞化し、最終的には円環に向かう。

④ 相平面は完全に円環になるが、これは非周期性を持つ部位が内から外へ入れ替わる過渡状態と考えられる。

⑤ P断面の円環は再度分散して外周が不鮮明になり、非周期運動となり発散する。

(d) 曲げ共振後域 (P_{70} , $\omega=4400$ rad/s)

① 相平面は、薄い断面の円環よりなるP断面が円に内接して回転しているが、しだいに円環の厚みが増して円周上を回転するようになる。

② 相平面が巨大化し、P断面が軌道円に比べ小さくなって複数の線から構成されるフレアができる。

③ P断面の外周にフレアが発達する。

④ 円軌道に対して渦巻くP断面が大きくなり、P断面は中央から外へ複数の渦を巻く。

⑤ 渦の幅が広がり無秩序な状態となり、非周期性をもつ運動となる。

以上の事象を纏めると次のことがいえる。

- 不安定に到る現象は、周期分岐までの挙動は擾乱の周波数により極めて異なるが、相平面では渦巻きが巨大化して外周より不鮮明化し、従って変動振幅の包絡線が複雑になり、次第に全体に広がり非周期運動となり発散する。

- 何れの共振前域でも、P断面が比較的幾何学的な形状をなし、非周期運動の中にも共振後域に比べ周期性がある程度保たれている。一方、共振後域はP断面の点が拡散して不鮮明に見えて周期がズレる度合が大きく、激しい非周期運動を起こしている。

5. 結 言

非保存力学系の問題における動的不安定現象の把握のために、純循環系の例として、擾乱のある従動力を受ける円形アーチ構造について安定領域図を求め、その安定限界の近傍で現出するカオスの挙動を周期分岐図、相平面等により調べた。これにより次のことが明らかになった。

- 円形アーチに作用する荷重振幅が増加すると、周期倍分岐が重複して起きて分岐の集積の後に、逆分岐が始まって非周期運動のカオス状態に到った後に、大規模な跳躍が起きる。

- 擾乱の荷重振幅が極めて小さい段階から応答周期は一つではなくて多数の周期を含んでおり、各周期がさらに分岐するためにカオス状態の非周期運動へ移行し易い。

- 3) 不安定が起こる時点では、相平面では渦巻きが巨大化して外周より不鮮明化し、変動振幅の包絡線が複雑になり、次第に全体に広がり非周期運動となり発散する。
- 4) 共振前域では、非周期運動の中にも共振後域に比べ周期性がある程度保たれている。

参 考 文 献

- 例えば, J. M. T. Thompson, H. B. Stewart: 非線形力学とカオス, オーム社, (1988) E. Atlee Jackson: 非線形力学の展望 I, 共立出版, (1994)
- 菅信, 田口晴邦: 斜め追波中の船の転覆について (第2報 転覆現象におけるカオスとフラクタル), 日本造船学会論文集, 第168号 (1990), pp. 211-220.
- 菅信, 田口晴邦: 斜め追波中の船の転覆について (第3報 非対称転覆方程式におけるカオスとフラクタル), 日本造船学会論文集, 第169号 (1991), pp. 1-13.
- Fukuchi, N., George, T., Shinoda, T.: Dynamic Instability Analysis of Thin Shell Structures Subjected to Follower Forces (1st Report) The Shell Governing Equations in Monoclinically Convected Coordinates, Journal of the Society of Naval Architects of Japan Vol.170 (1991), pp. 439-447.
- Fukuchi, N., George, T., Shinoda, T.: Dynamic Instability Analysis of Thin Shell Structures Subjected to Follower Forces (2nd Report) Numerical Solutions and Some Theoretical Concepts, Journal of the Society of Naval Architects of Japan Vol.171 (1992), pp. 597-609
- 福地, 岡田, 平野: 従動荷重を受ける円形アーチの擾乱による動的挙動と安定性解析, 西部造船会報, 第94号 (1997), pp. 133-141

付録 A 薄肉シェルの支配方程式

A.1 薄肉シェルの大変形に関する方程式⁴⁾

従動力による薄肉シェルの大変形挙動を表すために、Fig. 1 に示すようにシェルの中央面に沿って座標軸をとり、変形に追従する埋め込み一般座標系を用いる。大変形の場合の平衡方程式を変位により表すと次式となる。

$$\begin{aligned} & Da^{\alpha\beta\gamma}\{u_{s,\alpha\gamma} - u_{\rho,\alpha}\Gamma_{\gamma\delta}^{\rho} - (u_{\lambda,\delta} + u_{s,\lambda})\Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda} \\ & - (u^3 b_{\gamma\delta})_{,\alpha} + u_{,\gamma}^3 u_{,\delta\alpha}^3 + \frac{1}{2}[(u^3)^2 b_{\gamma}^{\rho} b_{\rho\delta}]_{,\alpha}\} = -p^{\beta} \\ & Da^{\alpha\beta\gamma}\{u_{s,\gamma} b_{\alpha\beta} - u^3 b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \\ & + \frac{1}{2}[b_{\alpha\beta} + u_{,\alpha\beta}^3 + u^3 b_{\beta\alpha}^{\rho} b_{\rho\beta} - u_{,\alpha}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}] \\ & \times (u_{,\gamma}^3 u_{,\delta}^3 + (u^3)^2 b_{\gamma}^{\rho} b_{\rho\delta}) \\ & + [u_{,\alpha\beta}^3 + u^3 b_{\alpha}^{\rho} b_{\rho\beta} - u_{,\beta}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}](u_{,\gamma,\delta} - u^3 b_{\gamma\delta})\} \\ & - Ka^{\alpha\beta\gamma} u_{,\alpha\beta\gamma}^3 = -p^3 \end{aligned} \quad (A.1)$$

ここに、 D はシェルの引張剛性、 K は曲げ剛性であり、 $_{,i}$ は3次元空間の共変微分を意味する。また (u^i, u_i) は反変と共変の変位成分であり、弾性係数テンソルは計量テンソ

ルを $a^{\alpha\beta}$ とすると次式で表される。

$$a^{\alpha\beta\gamma} = \left(\frac{1-\nu}{2}\right)(a^{\alpha\delta} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\delta}) + \nu a^{\alpha\delta} a^{\beta\lambda} \quad (A.2)$$

A.2 擾乱による動的挙動と状態方程式⁴⁾

従動力をうけているシェルが擾乱により振動する場合において、従動力による静的な変形量に () および擾乱による変動量に (*) を添えて表すと、擾乱による動的挙動を表す方程式は次のように表せる。

$$\begin{aligned} & Da^{\alpha\beta\gamma}\{u_{s,\alpha\gamma}^* - u_{\rho,\alpha}^* \Gamma_{\gamma\delta}^{\rho} - (u_{\lambda,\delta}^* + u_{s,\lambda}^*) \Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda} - (u^{*3} b_{\gamma\delta})_{,\alpha} \\ & + u_{,\gamma}^3 u_{,\delta\alpha}^* + u_{,\gamma}^* u_{,\delta\alpha}^3 + (u^3 u^{*3} b_{\rho\delta} b_{\gamma}^{\rho})_{,\alpha}\} = -m \ddot{u}^{* \beta} \\ & Da^{\alpha\beta\gamma}\{[u_{,\gamma,\delta}^* - u^{*3} b_{\gamma\delta} + u_{,\gamma}^3 u_{,\delta}^* + u^3 u^{*3} b_{\rho\delta} b_{\gamma}^{\rho}] \\ & (b_{\alpha\beta} + u_{,\alpha\beta}^3 + u^3 b_{\beta\alpha}^{\rho} b_{\rho\beta} - u_{,\alpha}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}) \\ & + [u_{,\gamma,\delta} - u^3 b_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}(u_{,\gamma}^3 u_{,\delta}^3 + (u^3)^2 b_{\rho\delta} b_{\gamma}^{\rho})] \\ & (u_{,\alpha\beta}^3 + u^{*3} b_{\beta\alpha}^{\rho} b_{\rho\beta} - u_{,\beta}^3 \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho})\} - Ka^{\alpha\beta\gamma} u_{,\alpha\beta\gamma}^* = -m \ddot{u}^{*3} \end{aligned} \quad (A.3)$$

ここに、 m はシェルの単位面積当たりの質量である。

A.3 簡略化した擾乱による運動方程式⁵⁾

平衡方程式 (A.1) における変位 u_i は次のようにフーリエ級数で表す。

$$u_i = \sum_m \sum_n U_i \phi_i(\theta^1, \theta^2), \quad (m=1, n=1) \quad (A.4)$$

ただし、 θ^1 と θ^2 は主軸方向に対する中央面における角座標である。ここで、支配方程式の簡略化のために第1卓越項 ($m=1, n=1$) のみを取ると、簡略化された平衡方程式は次の形に表される。

$$\left. \begin{aligned} l_{11} u_1 + l_{12} u_2 + l_{13} u_3 + n_1 (u_3)^2 &= 0 \\ l_{21} u_1 + l_{22} u_2 + l_{23} u_3 + n_2 (u_3)^2 &= 0 \\ l_{31} u_1 + l_{32} u_2 + l_{33} u_3 + n_{31} (u_1 u_3) \\ &+ n_{32} (u_2 u_3) + n_{331} (u_3)^2 + n_{332} (u_3)^3 = -p^3 \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

上式は u_3 について代数的に解くことができ、次のように書ける。

$$\Psi_1 u_3 + \Psi_2 (u_3)^2 + \Psi_3 (u_3)^3 = -p^3 \quad (A.6)$$

これらの式中の u_i の係数は付録 B に記してある。荷重成分の p^3 は静水圧による面に対し法線方向の等分布荷重である。この簡略化した平衡方程式は微小振動を表す次式に書き改められる。

$$m \ddot{u}_3^* + k u_3^* + r (u_3^*)^2 + c (u_3^*)^3 = 0 \quad (A.7)$$

ただし、(*) は時間に関する微分である。 u_3 の係数は次の式で与えられる。

$$k = \Psi_1 + 2 \Psi_2 u_3 + 3 \Psi_3 (u_3)^2, \quad r = \Psi_2 + 3 \Psi_3 u_3, \quad c = \Psi_3 \quad (A.8)$$

海洋環境下に設置されるシェルの場合には擾乱や減衰力などが考えられる。ここでは減衰は速度に一次比例とし、擾乱は種々の形のものが考えられるがその主たる励振力は周期的であると考え、三角関数により表現した。以上を考慮して、簡略化した運動方程式は次のように定式化した。

$$m\ddot{u}_3^* + D\dot{u}_3^* + ku_3^* + r(u_3^*)^2 + c(u_3^*) = A \cos \omega t \quad (\text{A.9})$$

付録 B 支配方程式における係数⁵⁾

式 (A.6) の中の係数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{\Psi_1} [l_{31} \Psi_2 - l_{32} \Psi_3] + l_{33} \\ \Psi_2 &= \frac{1}{\Psi_1} [l_{31} \Psi_4 - l_{32} \Psi_5 + n_{31} \Psi_2 - n_{32} \Psi_3] + n_{331} \quad (\text{B.1}) \\ \Psi_3 &= \frac{1}{\Psi_1} [n_{31} \Psi_4 - n_{32} \Psi_5] + n_{332} \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= l_{11} l_{22} - l_{21} l_{12}, \quad \Psi_2 = l_{12} l_{23} - l_{22} l_{13}, \quad \Psi_3 = l_{11} l_{23} - l_{21} l_{13} \\ \Psi_4 &= l_{12} n_2 - l_{22} n_1, \quad \Psi_5 = l_{11} n_2 - l_{21} n_1 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ただし, (B.2) の中の係は l_{ij} , $n_{ij(k)}$ ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$; $k=1, 2$) は Table. 1 に示す。

Table. 1 Coefficients of equation (A.5)

Coefficients of linear terms	Coefficients of nonlinear terms
$l_{11} = -D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 \left[\frac{\pi^2 \Omega_1^2}{4\Omega_1} \frac{\Omega_1}{8} \Gamma_{11}^{(1)} \right] \right.$ $\left. + \mu^{(1)} \mu^{(2)} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\pi^2 \Omega_1^2}{16\Omega_1} \left(\frac{3-\nu}{2} \right) \frac{\Omega_1}{8} \Gamma_{12}^{(1)} \right] \right\}$ $l_{12} = D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 \frac{16\Omega_1^2}{9\pi^2} \Gamma_{11}^{(1)} + \left(\frac{1+\nu}{2} \right) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \left[\frac{8\Omega_1^2}{9\pi^2} \Gamma_{12}^{(1)} - \frac{4}{9} \right] \right\}$ $l_{13} = D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 h_{11} + \mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12} \right\} \frac{\Omega_1}{3}$ $l_{21} = -D \left\{ \left(\mu^{(1)} \mu^{(2)} \right) \left[\left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{4}{9} \frac{16\Omega_1^2}{9\pi^2} \Gamma_{11}^{(1)} \right] \right\}$ $l_{22} = -D \left\{ \left(\mu^{(2)} \right)^2 \frac{\Omega_1}{\Omega_1} + \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \frac{\Omega_1}{4\Omega_1} \right\} \frac{\pi^2}{4}$ $l_{23} = D \left\{ \left(\mu^{(2)} \right)^2 h_{22} + \mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12} \right\} \frac{\Omega_1}{3}$ $l_{31} = D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 h_{11} + \mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12} \right\} \frac{\pi^2}{12\Omega_1}$ $l_{32} = D \left\{ \left(\mu^{(2)} \right)^2 h_{22} + \mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12} \right\} \frac{\pi^2}{12\Omega_1}$ $l_{33} = -D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 \left[\left(\mu^{(1)} \right)^2 + 2\mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12} \right] \frac{\pi^2}{256(\Omega_1 \Omega_2)} \right.$ $\left. + \left(\mu^{(2)} \right)^2 \left[\left(\mu^{(2)} \right)^2 + 2\mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12} \right] \frac{\pi^2}{256(\Omega_1 \Omega_2)} \right\}$	$n_1 = D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_1} \right)^2 + \left(\frac{1-3\nu}{4} \right) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \right\} \frac{\pi^2}{24\Omega_1}$ $n_2 = D \left\{ \left(\mu^{(2)} \right)^2 \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_1} \right)^2 + \left(\frac{1-3\nu}{4} \right) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \right\} \frac{\pi^2}{24\Omega_1}$ $n_{11} = -D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 \left(\frac{2\Omega_1}{\Omega_1} \right)^2 + (1+3\nu) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \right\} \frac{\pi^2}{192\Omega_1(\Omega_2)}$ $n_{12} = -D \left\{ \left(\mu^{(2)} \right)^2 \left(\frac{2\Omega_1}{\Omega_1} \right)^2 + (1+3\nu) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \right\} \frac{\pi^2}{192\Omega_1(\Omega_2)}$ $n_{13} = D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 h_{11}(\Omega_1) + \mu^{(1)} \mu^{(2)} h_{12}(\Omega_1) \right.$ $\left. + h_{22}(\Omega_1) + \left(\mu^{(2)} \right)^2 h_{22}(\Omega_1) \right\} \frac{5\pi^2}{36(\Omega_1 \Omega_2)}$ $n_{12} = -D \left\{ \left(\mu^{(1)} \right)^2 (\Omega_2)^2 - (1-2\nu) \mu^{(1)} \mu^{(2)} \frac{2(\Omega_1 \Omega_2)}{3} \right.$ $\left. + \left(\mu^{(2)} \right)^2 (\Omega_2)^2 \right\} \frac{3\pi^2}{8192(\Omega_1 \Omega_2)}$
Here, Ω_1 and Ω_2 are the subtended half angles in the principal directions.	