波の放射条件とその変分法的取り扱い(第2報)

正員 一色 浩*

Wave Radiation Conditions and Their Variational Treatment

(The 2nd Report)

by Hiroshi Isshiki, *Member*

Summary

In the previous paper, the wave radiation conditions in wave problems, their introduction into the variational principles and the simple numerical results are discussed, and the effectiveness of the new radiation conditions and the variational principles were shown.

In the present paper, the numerical results for one-dimensional water wave problems not included in the previous paper are given. As expected in advance, the region required for the numerical solution is reduced drastically as compared with that required by the Sommerfeld-type formulation. Furthermore, the amplitude of the diverging wave is obtained in the process of the variational solution.

Two-dimensional water wave problems are discussed briefly.

1. 緒 言

前報では、波動問題における波の放射条件、それを組み入れた変分原理を論じた。いわゆる Sommerfeld 型の放射条件の外に、局所波の項まで導入した新たな放射条件を示し、Isshiki の放射条件と名づけた。さらに、それを変分原理に導入して、Isshiki 型の変分原理を得た。

一方、数値計算については、棒の曲げ波という簡単な問題を例としてその有効性を示したが、水波の問題には触れなかった。そこで、本報では、1次元水波（表面波であるので、波動としては1次元であるが、境界値問題としては2次元）の問題について数値計算を行った結果を述べる。

2次元水波の問題については、1次元水波の問題の

延長として、波の放射条件を含む境界値問題を定式化した。境界値問題の変分問題への変換については、紙数の制約により省略している。また、一様流のあるような場合および初期値問題については、今後の課題としたい。

2. 1次元水波問題に対する数値計算

2.1 1次元放射問題

第1報の§3で述べた1次元波動問題の例として、まず Fig. 1 に示されるような簡単な波の放射問題を考えてみる。水槽の左端に造波機が置かれていて、この造波

Fig. 1 Wave generated by a piston-type wave maker.

*日立造船(株) 技術研究所

原稿受理 平成12年7月10日

秋季講演会において講演 平成12年11月16, 17日

機が起こす波動の問題である。

このような簡単な問題を取り上げるのは、精度チェックのために必要な解析解の存在を前提とするからである。

この問題の正解は、速度ポテンシャル $\phi(x, z)$ を

$$\phi(x, z) = \alpha_0 \exp(-ik_0^+ x) \cosh k_0^+ (z + h^+) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \exp(-k_n^+ x) \cos k_n^+ (z + h^+) \quad (1)$$

として求めることができる。ここで、 α_n , ($n = 0, 1, \dots$) は積分定数であり、境界条件

$$\phi_x(0, z) = ik_0^+ \alpha_0 \cosh k_0^+ (z + h^+) - \sum_{n=1}^{\infty} k_n^+ \alpha_n \cos k_n^+ (z + h^+) = f_H \quad (2)$$

より

$$\beta_0 = -ik_0^+ \alpha_0 = \frac{\int_{-h}^0 f_H \cosh k_0^+ (z + h^+) dz}{\int_{-h}^0 \cosh^2 k_0^+ (z + h^+) dz} = \frac{4f_H \sinh k_0^+ h^+}{(\sinh 2k_0^+ h^+ + 2k_0^+ h^+)} \quad (3a)$$

$$\beta_n = k_n^+ \alpha_n = \frac{\int_{-h}^0 f_H \cos k_n^+ (z + h^+) dz}{\int_{-h}^0 \cos^2 k_n^+ (z + h^+) dz} = -\frac{4f_H \sin k_n^+ h^+}{(\sin 2k_n^+ h^+ + 2k_n^+ h^+)} \quad (3b)$$

により与えられる。

まず、Sommerfeld 型の変分原理に基づく数値計算法について述べる。参考文献 1) の (9.2.12) 式で与えられる Isshiki-Sommerfeld-Dirichlet の変分原理は、この問題に対しては

$$\Pi_{ISD}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_0^{x_0^+} \int_{-h^+}^0 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz + \frac{\omega^2}{2g} \int_0^{x_0^+} \phi^2(x, 0) dx - \int_{-h^+}^0 \phi(0, z) f_H dz - \frac{ik_0^+}{2} \int_{-h^+}^0 \phi^2(x_0^+, z) dz = \text{stationary} \quad (4)$$

で与えられる。

古典的な Ritz 法を用いることにすると、近似解を

$$\phi(x, z) = \sum_{0 \leq m+n \leq M} a_{mn} f_m(x) g_n(z) = \sum_{i=0}^{(M+1)(M+2)/2} a_i f_{m(i)}(x) g_{n(i)}(z) \quad (5a)$$

$$f_m(x) = x^m, \quad g_n(z) = z^n \quad (5b)$$

$$\begin{cases} i = [0 + 1 + 2 + \dots + (m+n)] + m \\ = (m+n)(m+n+1)/2 + m \\ m(i) = i - p(p+1)/2, \quad n(i) = p - m(i), \\ \max_p [i - p(p+1)/2 \geq 0] \end{cases} \quad (5c)$$

として、(5) 式を (4) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Pi_{ISD}[\phi] &\approx \Pi_{ISD}(a_0, a_1, \dots) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{(M+1)(M+2)/2} \sum_{j=0}^{(M+1)(M+2)/2} A_{ij} a_i a_j - \sum_{i=0}^{(M+1)(M+2)/2} B_i a_i \\ &= \text{stationary} \end{aligned} \quad (6)$$

という多変数関数の停留値問題になる。ここで

$$\begin{aligned} A_{ij} = & - \left[\frac{m(i)m(j)}{m(i)-1+m(j)-1+1} (x_0^+)^{m(i)-1+m(j)-1+1} \right. \\ & \cdot \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^+)^{n(i)+n(j)+1} \\ & + \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} \\ & \cdot \left. \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^+)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \right] \\ & + \frac{\omega^2}{g} \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} [z^{n(i)+n(j)}]_{z=0} \\ & - ik_0^+ (x_0^+)^{m(i)+m(j)} \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^+)^{n(i)+n(j)+1} \end{aligned} \quad (7a)$$

$$B_i = [x^{m(i)}]_{x=0} \frac{-1}{n(i)+1} (-h^+)^{n(i)+1} f_H \quad (7b)$$

とする。(6) 式の停留条件は

$$\sum_{j=0}^{(M+1)(M+2)/2} A_{ij} a_j = B_i, \quad (i = 0, 1, \dots, (M+1)(M+2)/2) \quad (8)$$

で与えられる。

Fig. 2 Numerical results obtained by Isshiki-Sommerfeld-Dirichlet's variational principle

(8) 式を解いて得た結果 ($z = 0$ 上の ϕ の値) の一例を

Fig. 2 に示す。計算条件は、 $k^+ = 1.0$, $h^+ = 1.0$, $f_H = 1.0$, $x_o^+ = 6.0$, $M = 7$ である。波の放射境界を約 1 波長のところに取っている。図中、phic_extc および phis_extc とあるのは $z = 0$ 上の ϕ の正解 (解析解) の実部および虚部を表わし、phic_appr および phis_appr とあるのは数値解の実部および虚部を表わす。

つぎに、第 1 報の (44) 式で与えられる Isshiki-Dirichlet の変分原理を用いる数値計算法について述べる。この変分原理は、この場合には

$$\begin{aligned} \Lambda_{ID}[\phi, a_n^+] = & -\frac{1}{2} \int_0^{x_o^+} \int_{-h^+}^0 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ & + \frac{\omega^2}{2g} \int_0^{x_o^+} \phi^2(x, 0) dx - \int_{-h^+}^0 \phi(0, z) f_H dz \\ & - \frac{ig^2}{2\omega^2} e^{-2k_o^+ x_o^+} k_o^+ \frac{\|\cosh k_o^+ (z + h^+)\|^2}{\cosh^2 k_o^+ h^+} (a_0^+)^2 \\ & - \frac{g^2}{2\omega^2} \sum_{n=1}^N e^{-2k_n^+ x_o^+} k_n^+ \frac{\|\cos k_n^+ (z + h^+)\|^2}{\cos^2 k_n^+ h^+} (a_n^+)^2 \\ & + \frac{g}{\omega} k_o^+ a_0^+ e^{-k_o^+ x_o^+} \int_{-h^+}^0 \phi(x_o^+, z) \frac{\cosh k_o^+ (z + h^+)}{\cosh k_o^+ h^+} dz \\ & - \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N k_n^+ a_n^+ e^{-k_n^+ x_o^+} \int_{-h^+}^0 \phi(x_o^+, z) \frac{\cos k_n^+ (z + h^+)}{\cos k_n^+ h^+} dz \\ = & stationary \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

(5) 式で与えられる近似解をこの変分問題に代入すると

$$\begin{aligned} \Lambda_{ID}[\phi, a_n^+] \approx & \Lambda_{ID}(a_0, a_1, \dots, a_0^+, a_1^+, \dots) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} \sum_{j=0}^{M_{\max}-1} A_{ij} a_i a_j \\ & + \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} \sum_{j=0}^N B_{ij} a_i a_j^+ + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij} a_i^+ a_j^+ \\ & - \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} D_i a_i - \sum_{i=0}^N E_i a_i^+ = stationary \end{aligned} \quad (10)$$

という多変数関数の停留値問題になる。ここで

$$\begin{aligned} A_{ij} = & - \left[\frac{m(i)m(j)}{m(i)-1+m(j)-1+1} (x_o^+)^{m(i)-1+m(j)-1+1} \right. \\ & \cdot \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^+)^{n(i)+n(j)+1} \\ & + \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_o^+)^{m(i)+m(j)+1} \\ & \cdot \left. \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^+)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \right] \\ & + \frac{\omega^2}{g} \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_o^+)^{m(i)+m(j)+1} \left[z^{n(i)+n(j)} \right]_{z=0} \end{aligned}$$

$$\text{for } i, j = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} B_{i0} = & (x_o^+)^{m(i)} \frac{g}{\omega} k_o^+ (\cos k_o^+ x_o^+ - i \sin k_o^+ x_o^+) \rho_o^+(n(i), 0) \\ & \text{for } i = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \text{ and } j = 0 \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} B_{ij} = & -(x_o^+)^{m(i)} \frac{ig}{\omega} k_j^+ e^{-k_j^+ x_o^+} \rho_o^+(n(i), j) \\ & \text{for } i = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \text{ and } j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} C_{00} = & -\frac{g^2}{\omega^2} (\sin 2k_o^+ x_o^+ + i \cos 2k_o^+ x_o^+) \\ & \cdot \frac{(\sinh 2k_o^+ h^+ + 2k_o^+ h^+)}{4 \cosh^2 k_o^+ h^+} \end{aligned} \quad (11d)$$

$$\begin{aligned} C_{ii} = & -\frac{g^2}{\omega^2} e^{-2k_i^+ x_o^+} \frac{(\sin 2k_i^+ h^+ + 2k_i^+ h^+)}{4 \cos^2 k_i^+ h^+} \\ & \text{for } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (11e)$$

$$C_{ij} = 0 \quad \text{for } i \neq j \text{ and } i, j = 0, 1, \dots, N \quad (11f)$$

$$\begin{aligned} D_i = & \left[x^{m(i)} \right]_{x=0} \frac{-1}{n(i)+1} (-h^+)^{n(i)+1} f_H \\ & \text{for } i = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \end{aligned} \quad (11g)$$

$$E_i = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N \quad (11h)$$

とする。ここで

$$\begin{aligned} \rho_o^+(i, n) = & \int_{-h^+}^0 z^i \frac{\cos k_n^+ (z + h^+)}{\cos k_n^+ h^+} dz \\ = & \sum_{r=0}^{[i/2]} (-1)^r \frac{i!}{(i-2r)!} \frac{1}{(k_n^+)^{2r+1}} \left[\frac{z^{i-2r} \sin k_n^+ (z + h^+)}{\cos k_n^+ h^+} \right]_{-h^+}^0 \\ & - \sum_{r=1}^{[(i+1)/2]} (-1)^r \frac{i!}{(i-(2r-1))!} \frac{1}{(k_n^+)^{2r}} \\ & \cdot \left[\frac{z^{i-(2r-1)} \cos k_n^+ (z + h^+)}{\cos k_n^+ h^+} \right]_{-h^+}^0 \end{aligned} \quad (12)$$

とする。停留条件を求めると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{M_{\max}} A_{ij} a_j + \sum_{j=0}^N B_{ij} a_j^+ = & D_i \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, M_{\max} \\ \sum_{j=0}^{M_{\max}} B_{ji} a_j + \sum_{j=0}^N C_{ij} a_j^+ = & E_i \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (13)$$

となる。

(13) 式を解いて得た結果 ($z = 0$ 上の ϕ の値) の一例を Fig. 3 に示す。計算条件は、 $k^+ = 1.0$, $h^+ = 1.0$, $f_H = 1.0$, $x_o^+ = 0.3$, $M = 5$, $N = 2$ である。Fig. 2 の時は $x_o^+ = 6.0$ (約 1 波長) であったものが $x_o^+ = 0.3$ と大幅に縮小されている。図中、phic_extc および phis_extc とあるのは $z = 0$ 上の ϕ の正解 (解析解) の実部および虚部を表わし、phic_appr および phis_appr とあるのは数値解の実部および虚部を表わす。また、phic_asymp および phis_asymp は、数値解の一部として求

まった漸近解の実部および虚部を表わす。正解と数値解が重なっていて区別できないが、これは数値解の精度が高いことを示す。

Fig. 3 Numerical results obtained by Isshiki-Dirichlet's variational principle

Isshiki-Dirichlet の原理を用いると発散波が解の一部として求まる。Table 1 に正解と近似解の比較を示す。

Table 1 Amplitude of the diverging wave

	$\text{Re}[a_0^+]$	$\text{Im}[a_0^+]$
App. Sol.	0.359371	0.00000
Exact Sol.	0.359371	0.00000

2.2 1次元散乱問題

つぎに、Fig. 4 に示されるような、散乱問題を考える。

Fig. 4 Reflection and transmission due to sudden change of water depth

この問題の正解は、速度ポテンシャルを

$$\phi(x, z) = \begin{cases} \frac{ig}{\omega} A^+ e^{ik_0^+ x} \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \\ 0 \end{cases}$$

$$+ \frac{ig}{\omega} a_0^+ e^{ik_0^+ x} \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} + \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N a_n^+ e^{ik_n^+ x} \frac{\cos k_n^+(z+h^+)}{\cos k_n^+ h^+} \quad \text{in } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}, -h^+ \leq z \leq 0 \quad (14)$$

として求めることができる。ここで、 A^+ は入射波の振幅、 a_n^+ ($n=0, 1, \dots$) は積分定数であり、接合条件

$$\phi^+(0, z) = \phi^-(0, z), \quad -h^- < z < 0 \quad (15a)$$

$$\phi_x^+(0, z) = \begin{cases} \phi_x^-(0, z), & -h^- < z < 0 \\ 0, & -h^+ < z < -h^- \end{cases} \quad (15b)$$

より決まる。(14) 式を(15) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{ig}{\omega} A^+ \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} + \frac{ig}{\omega} a_0^+ \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} + \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N a_n^+ \frac{\cos k_n^+(z+h^+)}{\cos k_n^+ h^+} \\ = \frac{ig}{\omega} a_0^- \frac{\cosh k_0^-(z+h^-)}{\cosh k_0^- h^-} + \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N a_n^- \frac{\cos k_n^-(z+h^-)}{\cos k_n^- h^-} \end{aligned} \quad \text{for } -h^- \leq z \leq 0 \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{ig}{\omega} A^+ ik_0^+ \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} - \frac{ig}{\omega} a_0^+ ik_0^+ \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \\ - \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N a_n^+ k_n^+ \frac{\cos k_n^+(z+h^+)}{\cos k_n^+ h^+} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{ig}{\omega} a_0^- ik_0^- \frac{\cosh k_0^-(z+h^-)}{\cosh k_0^- h^-} + \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N a_n^- k_n^- \frac{\cos k_n^-(z+h^-)}{\cos k_n^- h^-} & \text{for } -h^- < z < 0 \\ 0 & \text{for } -h^+ < z < -h^- \end{cases} \quad (16b)$$

となる。(16a) 式の両辺に $\cosh k_0^-(z+h^-)$ および $\cos k_m^-(z+h^-)$ を掛けて $-h^- < z < 0$ で積分することと、(16b) 式の両辺に $\cosh k_0^+(z+h^+)$ および $\cos k_m^+(z+h^+)$ を掛けて $-h^+ < z < 0$ で積分することにより、連立一次方程式

$$\sum_{n=0}^N P_{mn}^+ a_n^+ + \sum_{n=0}^N P_{mn}^- a_n^- = R_m \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, N \quad (17a)$$

$$\sum_{n=0}^N Q_{mn}^+ a_n^+ + \sum_{n=0}^N Q_{mn}^- a_n^- = S_m \quad \text{for } m = 0, 1, \dots, N \quad (17b)$$

を得る。係数行列の具体的な内容は省略する。

まず、Sommerfeld 型の変分原理を適用する。参考文献 1) の(9.2.12) 式で与えられる Isshiki-Sommerfeld

-Dirichlet の変分原理は、この問題に対しては

$$\begin{aligned} \Pi_{ISD}[\phi] = & -\frac{1}{2} \int_0^{x_0^+} \int_{-h^+}^0 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ & -\frac{1}{2} \int_{x_0^-}^0 \int_{-h^-}^0 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ & + \frac{\omega^2}{2g} \int_0^{x_0^+} \phi^2(x, 0) dx + \frac{\omega^2}{2g} \int_{x_0^-}^0 \phi^2(x, 0) dx \\ & - \frac{ik_0^+}{2} \int_{-h^+}^0 \phi^2(x_0^+, z) dz - \frac{ik_0^-}{2} \int_{-h^-}^0 \phi^2(x_0^-, z) dz \\ & - \frac{2g}{\omega} k_0^+ \int_{x_0^+}^0 \phi A^+ e^{ik_0^+ z} \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} dz \\ = & stationary \end{aligned} \quad (18)$$

となる。

近似解として、(5)式の形のものを用いる。この問題の場合には、 a_{mn} は $m \geq 1$ のとき、 $x \geq 0$ および $x \leq 0$ で独立とする方が、 $x \geq 0$ における不連続を表わすのに適していると考えられるが、以下においては $x \geq 0$ および $x \leq 0$ で同じ値としている。このことは、解の精度に制約を与える可能性があるが、計算が面倒になるので同じ値としている。

(5)式を(18)式に代入すると

$$\begin{aligned} \Pi_{ISD}[\phi] \approx & \Pi_{ISD}(a_0, a_1, \dots) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} \sum_{j=0}^{M_{\max}-1} A_{ij} a_i a_j - \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} B_i a_i = stationary \end{aligned} \quad (19)$$

という多変数関数の停留値問題を得る。ここで

$$\begin{aligned} A_{ij} = & - \left[\frac{m(i)m(j)}{m(i)-1+m(j)-1+1} (x_0^+)^{m(i)-1+m(j)-1+1} \right. \\ & \cdot \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^+)^{n(i)+n(j)+1} \\ & + \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} \\ & \cdot \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^+)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \\ & + \frac{-m(i)m(j)}{m(i)-1+m(j)-1+1} (x_0^-)^{m(i)-1+m(j)-1+1} \\ & \cdot \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^-)^{n(i)+n(j)+1} \\ & + \frac{-1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^-)^{m(i)+m(j)+1} \\ & \cdot \left. \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^-)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \right] \\ & + \frac{\omega^2}{g} \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} \left[z^{n(i)+n(j)} \right]_{z=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\omega^2}{g} \frac{-1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^-)^{m(i)+m(j)+1} \left[z^{n(i)+n(j)} \right]_{z=0} \\ & - ik_0^+ (x_0^+)^{m(i)+m(j)} \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^+)^{n(i)+n(j)+1} \\ & - ik_0^- (x_0^-)^{m(i)+m(j)} \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^-)^{n(i)+n(j)+1} \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} B_i = & \frac{2g}{\omega} k_0^+ (\cos k_0^+ x_0^+ + i \sin k_0^+ x_0^+) (x_0^+)^{m(i)} \\ & \cdot \rho_0^+(n(i), 0) A^+ \end{aligned} \quad (20b)$$

である。停留条件を求めると

$$\sum_{j=0}^{M_{\max}-1} A_{ij} a_j = B_i, \quad (i = 0, 1, \dots, M_{\max}-1) \quad (21)$$

となる。

Fig. 5 Numerical results obtained by Isshiki-Sommerfeld-Dirichlet's variational principle

(21)式を解いて得た結果 ($z=0$ 上の ϕ の値) の一例を Fig. 5 に示す。計算条件は、 $k^+ = 1.0$, $A^+ = 1.0$, $h^+ = 1.0$, $h^- = 0.75$, $x_0^+ = -x_0^- = 6.0$, $M = 9$ である。図中、 phic_exact および phis_exact とあるのは $z=0$ 上の ϕ の正解 (解析解) の実部および虚部を表わし、 phic_appr および phis_appr とあるのは数値解の実部および虚部を表わす。近似解の精度が十分に出ないのは、 a_{mn} を $m \geq 1$ のとき、 $x \geq 0$ および $x \leq 0$ で独立としていないためであろう。

つぎに、第1報の(44)式で与えられる Isshiki-Dirichlet の変分原理を用いる数値計算法について述べる。この変分原理は、この場合には

$$\Lambda_m[\phi, a_n^+] = -\frac{1}{2} \int_0^{x_0^+} \int_{-h^+}^0 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{x_0}^0 \int_{-h}^0 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dx dz \\
& + \frac{\omega^2}{2g} \int_0^{x_0^+} \phi^2(x, 0) dx + \frac{\omega^2}{2g} \int_{x_0}^0 \phi^2(x, 0) dx \\
& - \frac{ig^2}{2\omega^2} e^{-2ik_0^+ x_0^+} k_0^+ \frac{\|\cosh k_0^+(z+h^+)\|^2}{\cosh^2 k_0^+ h^+} (a_0^+)^2 \\
& - \frac{g^2}{2\omega^2} \sum_{n=1}^N e^{-2k_n^+ x_0^+} k_n^+ \frac{\|\cos k_n^+(z+h^+)\|^2}{\cos^2 k_n^+ h^+} (a_n^+)^2 \\
& - \frac{ig^2}{2\omega^2} e^{2ik_0^- x_0^-} k_0^- \frac{\|\cosh k_0^-(z+h^-)\|^2}{\cosh^2 k_0^- h^-} (a_0^-)^2 \\
& - \frac{g^2}{2\omega^2} \sum_{n=1}^N e^{2k_n^- x_0^-} k_n^- \frac{\|\cos k_n^-(z+h^-)\|^2}{\cos^2 k_n^- h^-} (a_n^-)^2 \\
& - \frac{ig^2}{\omega^2} k_0^+ \frac{\|\cosh k_0^+(z+h^+)\|^2}{\cosh^2 k_0^+ h^+} A^+ a_0^+ \\
& - \frac{g}{\omega} k_0^+ A^+ e^{ik_0^+ x_0^+} \int_{-h^+}^0 \phi(x_0^+, z) \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} dz \\
& + \frac{g}{\omega} k_0^+ a_0^+ e^{-ik_0^+ x_0^+} \int_{-h^+}^0 \phi(x_0^+, z) \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} dz \\
& - \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N k_n^+ a_n^+ e^{-k_n^+ x_0^+} \int_{-h^+}^0 \phi(x_0^+, z) \frac{\cos k_n^+(z+h^+)}{\cos k_n^+ h^+} dz \\
& + \frac{g}{\omega} k_0^- a_0^- e^{ik_0^- x_0^-} \int_{-h^-}^0 \phi(x_0^-, z) \frac{\cosh k_0^-(z+h^-)}{\cosh k_0^- h^-} dz \\
& - \frac{ig}{\omega} \sum_{n=1}^N k_n^- a_n^- e^{k_n^- x_0^-} \int_{-h^-}^0 \phi(x_0^-, z) \frac{\cos k_n^-(z+h^-)}{\cos k_n^- h^-} dz a_n^- \\
& = \text{stationary} \quad (22)
\end{aligned}$$

となる。(5)式を(22)式に代入すると

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ID}[\phi, a_n^*] & \approx \Lambda_{ID}(a_0, a_1, \dots, a_n^+, a_n^-, \dots) \\
& = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} \sum_{j=0}^{M_{\max}-1} A_{ij} a_i^+ a_j^- + \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} \sum_{j=0}^N B_{ij}^+ a_i^+ a_j^- \\
& \quad + \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} \sum_{j=0}^N B_{ij}^- a_i^- a_j^- \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij}^+ a_i^+ a_j^+ + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij}^- a_i^- a_j^- \\
& \quad - \sum_{i=0}^{M_{\max}-1} D_i a_i^+ - \sum_{i=0}^N E_i^+ a_i^+ - \sum_{i=0}^N E_i^- a_i^- \\
& = \text{stationary} \quad (23)
\end{aligned}$$

という多変数関数の停留値問題になる。ここで

$$\begin{aligned}
A_{ij} & = - \left[\frac{m(i)m(j)}{m(i)-1+m(j)-1+1} (x_0^+)^{m(i)-1+m(j)-1+1} \right. \\
& \quad \cdot \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^+)^{n(i)+n(j)+1} \\
& \quad + \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} \\
& \quad \cdot \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^+)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} \\
& \quad \cdot \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^+)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \left. \right] \\
& - \left[\frac{-m(i)m(j)}{m(i)-1+m(j)-1+1} (x_0^-)^{m(i)-1+m(j)-1+1} \right. \\
& \quad \cdot \frac{-1}{n(i)+n(j)+1} (-h^-)^{n(i)+n(j)+1} \\
& \quad + \frac{-1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^-)^{m(i)+m(j)+1} \\
& \quad \cdot \frac{-n(i)n(j)}{n(i)-1+n(j)-1+1} (-h^-)^{n(i)-1+n(j)-1+1} \left. \right] \\
& + \frac{\omega^2}{g} \frac{1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^+)^{m(i)+m(j)+1} \left[z^{n(i)+n(j)} \right]_{z=0} \\
& + \frac{\omega^2}{g} \frac{-1}{m(i)+m(j)+1} (x_0^-)^{m(i)+m(j)+1} \left[z^{n(i)+n(j)} \right]_{z=0} \\
& \text{for } i, j = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \quad (24a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i0}^+ & = (x_0^+)^{m(i)} \frac{g}{\omega} k_0^+ (\cos k_0^+ x_0^+ \mp i \sin k_0^+ x_0^+) \\
& \quad \cdot \rho_0^+(n(i), 0) \\
B_{ij}^+ & = -(x_0^+)^{m(i)} \frac{ig}{\omega} k_j^+ e^{\mp k_j^+ x_0^+} \rho_0^+(n(i), j) \quad \text{for } j \geq 1 \\
& \quad \text{for } \begin{cases} i = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \\ j = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (24b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{00}^+ & = -\frac{g^2}{\omega^2} (\pm \sin 2k_0^+ x_0^+ + i \cos 2k_0^+ x_0^+) \frac{(\sinh 2k_0^+ h^+ + 2k_0^+ h^+)}{4 \cosh^2 k_0^+ h^+} \\
C_{ii}^+ & = -\frac{g^2}{\omega^2} e^{\mp 2k_i^+ x_0^+} \frac{(\sin 2k_i^+ h^+ + 2k_i^+ h^+)}{4 \cos^2 k_i^+ h^+} \quad \text{for } i \geq 1 \\
C_{ij}^+ & = 0 \quad \text{for } i \neq j \\
& \quad \text{for } i, j = 0, 1, \dots, N \quad (24c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_i & = \frac{g}{\omega} k_0^+ (\cos k_0^+ x_0^+ + i \sin k_0^+ x_0^+) (x_0^+)^{m(i)} \\
& \quad \cdot \rho_0^+(n(i), 0) A^+ \\
& \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, M_{\max} - 1 \quad (24d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_0^+ & = \frac{ig^2}{\omega^2} \frac{(\sinh 2k_0^+ h^+ + 2k_0^+ h^+)}{4 \cosh^2 k_0^+ h^+} A^+ \\
E_i^+ & = 0, \quad \text{for } i = 1, \dots, N \\
E_i^- & = 0, \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N \\
& \quad \text{である。停留条件を求めると}
\end{aligned} \quad (24e)$$

$$\sum_{j=0}^{M_{\max}} A_{ij} a_j + \sum_{j=0}^N B_{ij}^+ a_j^+ + \sum_{j=0}^N B_{ij}^- a_j^- = D_i$$

$$\text{for } i = 0, 1, \dots, M_{\max}$$

$$\sum_{j=0}^{M_{\max}} B_{ji}^+ a_j + \sum_{j=0}^N C_{ij}^+ a_j^+ = E_i^+ \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^{M_{\max}} B_{ji}^- a_j + \sum_{j=0}^N C_{ij}^- a_j^- = E_i^- \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, N$$

となる。

(25)式を解いて得た結果 ($z=0$ 上の ϕ の値) の一例を Fig. 6 に示す。計算条件は, $k^+ = 1.0$, $A^+ = 1.0$, $h^+ = 1.0$, $h^- = 0.75$, $x_0^+ = -x_0^- = 0.3$, $M = 5$, $N = 2$ である。Fig. 5 の時は $x_0^+ = x_0^- = 6.0$ ($x > 0$ において

Fig. 6 Numerical results obtained by Isshiki-Dirichlet's variational principle

約1波長)であったものが $x_0^+ = -x_0^- = 0.3$ と大幅に縮小されている。図中, phic_exact および phis_exact とあるのは $z=0$ 上の ϕ の正解 (解析解) の実部および虚部を表わし, phic_appr および phis_appr とあるのは数値解の実部および虚部を表わす。また, phic_asymp および phis_asymp は, 数値解の一部として求まった漸近解の実部および虚部を表わす。数値解の精度が十分に出ないのは, a_{mn} を $m \geq 1$ のとき, $x \geq 0$ および $x \leq 0$ で独立していないためであろう。

Table 2 Amplitude of diverging wave

	$\text{Re}[a_0^+]$	$\text{Im}[a_0^+]$	$\text{Re}[a_0^-]$	$\text{Im}[a_0^-]$
App. Sol.	0.05	0.01	1.02	-0.01
Exact Sol.	0.10	-0.02	1.07	-0.00

3. 2次元水波に関する波の放射条件と変分原理

2次元水波の問題は基本的には1次元の場合と変わらない。式が複雑になるだけであるので, 本節では細かい議論は避けてポイントだけ述べることにする。

第1報の(29)式に対応する自由表面変位 ζ を

$$\zeta(x, y) = A(\alpha) \exp[ik_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) H_n^{(2)}(k_0 r) e^{in\theta}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^m(\alpha) K_n(k_m r) e^{in\theta} \quad (26)$$

と表わすことにする。ここで, (r, θ, z) は円筒座標で, $H_n^{(2)}$ は第2種のハンケル関数, K_n は変形ベッセル関数である。右辺第1項は x 軸と角度 α をなす方向からの振幅 $A(\alpha)$ の入射波を表わし, 右辺第2項は発散波を表わし, 最後の項は局所波を表わす。 A_n^0 および A_n^m , ($m = 1, 2, \dots$) はそれぞれ発散波および局所波の成分波の振幅である。このとき, 第1報の(30)式と(31)式に対応する速度ポテンシャルおよび r 方向の速度成分は

$$\phi(x, y, z) = \frac{ig}{\omega} A(\alpha) \exp[ik_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

$$\cdot \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$+ \frac{ig}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) H_n^{(2)}(k_0 r) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$+ \frac{ig}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^m(\alpha) K_n(k_m r) e^{in\theta} \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad (27)$$

および

$$u_r(r, \theta, z) = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$= \frac{ig}{\omega} k_0 A(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n'(k_0 r) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$+ \frac{ig}{\omega} k_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) H_n^{(2)'}(k_0 r) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$+ \frac{ig}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} k_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^m(\alpha) K_n'(k_m r) e^{in\theta} \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad (28)$$

となる。

ベッセル関数の漸近展開を使って, 入射波の $r \rightarrow \infty$ における漸近展開を求めると

$$\frac{ig}{\omega} A(\alpha) \exp[ik_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha)] \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$= \frac{ig}{\omega} A(\alpha) \exp[ik_0 r \cos(\theta - \alpha)] \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ig}{\omega} A(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n(k_0 r) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \\
&\approx \frac{ig}{\omega} A(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} \\
&\quad \cdot \cos\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad (29)
\end{aligned}$$

となる。同様に、 ϕ および u_r の $r \rightarrow \infty$ の漸近展開を求めると

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &\approx \frac{ig}{\omega} A(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} e^{in\theta} \\
&\quad \cdot \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \cos\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) e^{in\theta} \\
&\quad + \frac{ig}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) \\
&\quad \cdot \exp\left[-i\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)\right] e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r(r, \theta, z) &\approx -\frac{ig}{\omega} k_0 A(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} \\
&\quad \cdot \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} e^{in\theta} \sin\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \\
&\quad + \frac{g}{\omega} k_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) \\
&\quad \cdot \exp\left[-i\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)\right] e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad (31)
\end{aligned}$$

が求まる。

(30) 式および (31) 式から、前報の (24e) 式に相当する Isshiki-Sommerfeld の放射条件を求めると

$$\begin{aligned}
u_r &\approx -ik_0 \phi \\
&\quad - \frac{g}{\omega} k_0 A(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} \\
&\quad \cdot \exp\left[i\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)\right] e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \\
&\quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (32)
\end{aligned}$$

となる。

したがって、第1報の (23) 式と (24) 式で与えられた境界値問題は、2次元波動の場合には以下の (33) 式と (34) 式で記述される。

Kelvin 条件 $[K]$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w \quad \text{in } \Omega \quad (33a)$$

$$\phi = \frac{ig}{\omega} \zeta \quad \text{on } S_F \quad (33b)$$

Dirichlet 条件 $[D]$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (34a)$$

$$un_x + vn_y + wn_z = f_H \quad \text{on } S_H \quad (34b)$$

$$w = i\omega \zeta \quad \text{on } S_F \quad (34c)$$

$$un_x + wn_z = 0 \quad \text{on } S_B \quad (34d)$$

$$u_r = -ik_0 \phi$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{g}{\omega} k_0 A(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} \\
&\quad \cdot \exp\left[i\left(k_0 r - \frac{(2n+1)\pi}{4}\right)\right] e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \\
&\quad \text{on } S_O \quad (34e)
\end{aligned}$$

一方、(27) 式および (28) 式は、第1報の (30) 式および (31) 式に相当するもので、2次元波動の場合の Isshiki の放射条件である。したがって、第1報の (35) 式と (36) 式で与えられた境界値問題は、2次元波動の場合には、下記の (35) 式と (36) 式で与えられる。

Kelvin 条件 $[K_1]$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w \quad \text{in } \Omega \quad (35a)$$

$$\phi = \frac{ig}{\omega} \zeta \quad \text{on } S_F \quad (35b)$$

$$\phi(r_O, \theta, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ig}{\omega} A(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n(k_0 r_O) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \\
&\quad + \frac{ig}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) H_n^{(2)}(k_0 r_O) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \\
&\quad + \frac{ig}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^m(\alpha) K_n(k_m r_O) e^{in\theta} \frac{\cosh k_m(z+h)}{\cosh k_m h} \quad (35c)
\end{aligned}$$

Dirichlet 条件 $[D_1]$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (36a)$$

$$un_x + vn_y + wn_z = f_H \quad \text{on } S_H \quad (36b)$$

$$w = i\omega \zeta \quad \text{on } S_F \quad (36c)$$

$$un_x + wn_z = 0 \quad \text{on } S_B \quad (36d)$$

$$u_r(r_O, \theta, z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ig}{\omega} k_0 A(\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{-in\alpha} J_n'(k_0 r_O) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ig}{\omega} k_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^0(\alpha) H_n^{(2)'}(k_0 r_0) e^{in\theta} \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \\
& + \frac{ig}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty} k_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n A_n^m(\alpha) K_n'(k_m r_0) e^{in\theta} \frac{\cosh k_m(z+h)}{\cosh k_m h}
\end{aligned}
\tag{36e}$$

(33) 式と (34) 式および (35) 式と (36) 式で定義される境界値問題から変分原理を導けばよいが、紙数の制約のため本報では省略する。

4. 結 論

本報では、以下の結論を得た。

- (1) 前報で理論的検討のみを行った 1 次元水波の問題に対する数値計算結果を示した。
- (2) Sommerfeld 型の波放射条件に比べて、新しく導入した Isshiki の波放射条件を用いると、計算対象領域が大幅に縮小されることを示した。
- (3) 一般に、Sommerfeld 型の放射条件よりも Isshiki の放射条件の方が高精度の数値解が得られることが示された。
- (4) Isshiki の放射条件を用いる場合には、発散波の振幅が変分原理の解の一部として、高精度に求まることが示された。

謝 辞

本研究に対して、ご討論を賜った防衛大学の瀬戸秀幸教授に、心から感謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 一色浩, 「変分法」, <http://www.dab.hi-ho.ne.jp/issshiki/>, (2000).
- 2) 一色浩, 波の放射条件とその変分法的取り扱い(第1報), 日本造船学会論文集, 第187号, (2000).
- 3) 一色浩, 永田修一, “水面に浮かぶ弾性平板の運動に関する変分原理”, 関西造船協会誌, 第233号, (2000).
- 4) 一色浩, “造波問題における変分法的取り扱い”, 日本造船学会第2回耐航性シンポジウム, (1977).
- 5) 一色浩, “自由表面を有するポテンシャル流の変分原理について”, 関西造船協会誌, 第166号, (1977).
- 6) K. J. Bai, “A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface”, Univ. of Calif. Berkeley, College of Engineering, Rep. NA 72-2, (1972).
- 7) K. J. Bai & R. W. Yeung, “Numerical Solutions to Free-Surface Flow Problems”, 10th Symposium on Naval Hydrodynamics, (1974).
- 8) 瀬戸秀幸, 山本善之, “有限要素法による定常波動問題の基礎的研究”, 日本造船学会論文集, 第136号, (1974).
- 9) H. Seto & Y. Yamamoto, “Finite Element Analysis of Surface Wave Problems”, Proc. of 1st Int. Conf. on Numerical Naval Hydrodynamics, (1975).
- 10) 瀬戸秀幸: NEW HYBRID ELEMENT METHOD による海洋構造物に働く波力解析, 第2回流れの有限要素法シンポジウム報文集 (1977/8)
- 11) H. Seto: New Hybrid Element Approach to Wave Hydrodynamic Loadings on Offshore Structures, FINITE ELEMENT FLOW PROBLEMS, Proc. of 4th Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems. Univ. of Tokyo Press, (1982/7), pp. 435-442
- 12) 瀬戸秀幸: 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第4報), 日本造船学会論文集, 第144号, (1978), pp. 88-95.
- 13) 瀬戸秀幸: 超大型浮体式構造物における規則波中弾性応答の理論解析(第1報), 日本造船学会論文集, 第184号, (1998).