船体構造設計最適化への応答曲面法の適用性検討

正員 荒井 誠*

正員 鈴木 竜浩**

正員 清水 泰斗***

On the Application of Response Surface Methodology to the Optimization of Ship Structural Design

by Makoto Arai, *Member*
Taito Shimizu, *Member*

Tatsuhiko Suzuki, *Member*

Summary

In this paper, the applicability of response surface methodology (RSM) to the design of ship structures is examined. One of the principal features of RSM is to rationally minimize the number of response evaluations by using the technique of experimental design. RSM also allows easy estimation of the change of response associated with the change of the design parameters on the obtained response surface. This is particularly effective in ship structural designs wherein trade-offs between design parameters are everyday occurrences. However, before RSM is applied to the actual design, the degree of the approximate polynomial equation that represents the response surface, and the necessary number of response evaluations, etc., must be examined. Thus, the optimization of the transverse bulkhead structure of a crude oil tanker is performed as an example of the application of RSM, wherein the method's effectiveness together with the results of above-mentioned basic examinations are shown.

1. 緒 言

船体構造設計のもっとも重要な命題の一つに、構造部材の効果的配置や経済的な寸法の探索がある。すなわち設計者は、必要な性能を有し、最も合理的な構造を見出す必要がある。しかしながら、船体構造は複雑で、要求される性能も多様なため、最適な構造設計の探索は容易ではない。実際には既存の船舶を参考に設計者自身の知識・経験に基づいた修正を加えて新造船の設計を行う場合が多いと考えられる。

一方、近年の計算機利用技術の発展に伴い、遺伝アル

ゴリズム等の組み合わせ最適化問題を扱う手法が考案されているが、一組の設計変数に対応した応答の評価に労力や時間がかかる場合には最適解の探索は極めて難しい。例えば、模型実験や大規模な構造解析を要する場合などである。

そこで本論文では、化学プロセスの最適化等に応用されて成果を上げている応答曲面法^{1),2),3)}に着目し、船体構造設計へのこの方法の適用性について検討を行った。応答曲面法の特徴は、実験計画の手法を用いることにより、応答の近似解である応答曲面を求めるのに必要な試行錯誤（探索）数を合理的に最小限に抑える点にある。また、得られた応答曲面を用いて、設計条件の変更に対する応答の変化を容易に推定する事ができる。このため船体構造設計のように、多様な要求を同時に考慮しつつ設計を最適化する必要がある問題に極めて有効と考えられる。

* 横浜国立大学工学部

* (財)日本海事協会

*** 横浜国立大学大学院（防衛片技術研究本部）

ところで、応答曲面法を実際の船体構造設計に適用するに当たっては、近似多項式の次数や、近似応答曲面を求めるために必要な設計変数の組み合わせ総数（実験点数）等について検討しておく必要がある。そこで本論文では、油槽船横隔壁構造を例に取り上げ、応答曲面法の有効性を確認するとともに、応答曲面法を適用する際に注意すべき点について種々検討した結果を報告する。

2. 応答曲面法

本研究で着目した応答曲面法の応答曲面とは n 個の設計変数 $x_i (i=1, \dots, n)$ と予想される応答 y との関係を近似する曲面であり、次式で表すことが出来る。

$$y = f(x_1, \dots, x_n) + \varepsilon \quad (1)$$

ここで、 ε は誤差である。応答曲面法においては、近似関数の種類に制約はないが、取り扱いの容易さから多項式を用いて、最小2乗法により近似応答曲面を求める場合が多い。

最小2乗法とは真の関数形状が不明な場合に近似関数を仮定し、それを求めていく手法である。線形関数、または線形化変換可能な関数を近似関数に用いるならば最小2乗法によって、統計学的に近似関数の形を定めることが可能である。例として、 n 個の設計変数の2次多項式で応答の近似ができると仮定すると、応答を表す式は(2)式のようになる。

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (2)$$

この近似多項式を求めるためには係数 β_i を定める必要がある。そのためには最低限、係数の数以上の設計変数の組み合わせと、それに対応する応答が必要となる。まず、2次の項 $(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, \dots)$ を $x_m = x_1^2$ 等と置き換えて線形表示する。また線形表示式における変数の数を p 、変数と応答の組み合わせの総数、すなわち実験点の数を k とするならば、(2)式は(3)式のように変換できる。

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (3)$$

ここで、

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{Bmatrix}, \quad \beta = \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{Bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kp} \end{bmatrix}$$

である。行列 X の要素 x_{ij} は設計変数 $x_j (j=1, \dots, p)$ の第 i 番目の実験 $(i=1, \dots, k)$ における値である。

応答曲面法では未知係数ベクトル β を求めるために前述のように最小2乗法を用いるが、その場合の β の最小2乗推定量（最尤推定量） b は次式で表すことができる。

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (4)$$

ここで b の各成分の分散が b の期待値 β に対して小さければ、精度のよい近似が可能となる。そこで、 b の各成分の分散および共分散を表す行列（ b の分散共分散行列） $V(b)$ を求めると(5)式で表せる。

$$V(b) = V(Cy) = C V(y) C^T = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (5)$$

ここで $C = (X^T X)^{-1} X^T$ また σ^2 は応答 y の誤差分散である（ $V(y) = \sigma^2 I$ 、 I は単位行列）。

(5)式をみると b の分散共分散行列は σ^2 と $(X^T X)^{-1}$ で表されることがわかる。 σ^2 は前述のとおり誤差分散であるので応答に関連するが、もう一方の $(X^T X)^{-1}$ は設計変数の組み合わせのみで決まる。そこで、 $(X^T X)^{-1}$ の各成分の最小化ができれば、相対的に b の分散共分散行列の各成分も小さくなり、 b は期待値 β に近くなる。これが実験計画法の考え方である。

ところで、近年の計算機及びその利用技術の発達を受けて、計算機を用いた実験計画法が提案されている。計算機を用いた実験計画法では、あらかじめ多数の設計変数の組み合わせを用意しておき、その中から最適基準と呼ばれる評価基準を用いて最適な設計変数の組み合わせを選び出すものである。最適基準はこれまでも幾つか提案されており、それぞれアルファベットを用いて命名され、特にA最適基準とD最適基準が有名である。²⁾ どちらの基準も次式で表すモーメント行列を考える。

$$M = X^T X / k \quad (6)$$

A最適基準はこのモーメント行列の逆行列の対角成分の和(trace)に着目し、これを最小化することを目的とした最適基準で次のように表される。

$$\text{Min}[\text{trace}(\mathbf{M}^{-1})] \quad (7)$$

すなわち、A 最適基準では対角成分だけを考慮し、応答曲面の近似式の係数の共分散は考慮しない。このため、A 最適基準を用いた実験計画では共分散の絶対値が大きい場合が存在する。一方の D 最適基準はモーメント行列の行列式を最大化することを目的とした基準で(8)式のように表される。

$$\text{Max} |\mathbf{M}| \quad (8)$$

また、各設計変数の範囲を-1～1 に正規化した場合はモーメント行列を修正した次の(9)式で示される D_{eff} (D-efficiency) を用いて評価を行う。³⁾

$$D_{\text{eff}} = \left(\frac{|\mathbf{X}^T \mathbf{X}|}{k^p} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

すなわち

$$\text{Max} |D_{\text{eff}}| \quad (10)$$

となる設計変数の組み合わせを探索する。

一般に逆行列の各成分には、その行列の行列式の逆数がかかけられる。D 最適基準はモーメント行列 $\mathbf{M}$ の行列式を最大化することで、 $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ 行列の全成分を相対的に最小化している。すなわち、D 最適基準はモーメント行列の対角成分だけではなく共分散成分も考慮した最適化がなされているため、より良好な基準と考えられる。本論文でも D 最適基準を用いることとした。

D 最適基準を用いることにより、効率的に応答曲面の近似式を求めることができるが、得られた近似多項式が適切かどうかの判定には次式で表される自由度調整済み決定係数 R_{ad}^2 が使用される。

$$R_{\text{ad}}^2 = 1 - \frac{\text{SSE} / (n - k - 1)}{S_{yy} / (n - 1)} \quad (11)$$

自由度調整済み決定係数は不必要な変数が追加された場合、値が低下するので、近似式の評価に有効である。

ここで、 S_{yy} (Total Sum of Squares) は応答 y の平均値まわりの変動で次式で表される。

$$S_{yy} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 / n \quad (12)$$

また、 SSE (Square Sum of Errors) は残差平方和で次のように表すことができる。

$$\text{SSE} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (13)$$

さらに、近似多項式中の各係数の有意性の評価は t 検定で行うことができる。この t 検定では次式の t 値によって係数の有意性を判別する。

$$t = b_j / (\text{standard error of } b_j) \quad (14)$$

この値が t 分布表で与えられる判別値より大きければ、係数は有意であると判断される。

以上、応答曲面法の基礎理論を簡単にまとめた。応答曲面法は明確な理論体系をもち、また、近似の精度を統計学の手法により明瞭に評価できる。この点で、経験係数的な要素の導入が避けられない遺伝的アルゴリズム等の最適化手法に比べ取り扱い易いと言える。

3. 隔壁構造の最適化

3.1 最適化の手順

応答曲面法を用いて最適化を行う具体的な手順は、前章の理論を基に、次のようになる。

1. 最適化に対応する応答の近似多項式を想定する。
2. 設計変数の組み合わせ(実験点)を多数用意する。
3. D最適基準を用いて、精度のよい近似式作成に有効な実験点を選択する。
4. 3で選択された実験点に対する応答を実験や解析等により求める。
5. 3で選択された実験点、および4で得られた応答から最小2乗法を用いて近似多項式を求める。
6. 5で得られた近似多項式の精度を確認する。
7. 6で問題があれば1に戻り、応答の近似多項式を変更して、上記の手順を繰り返す。
8. 6で問題がなければ、応答の近似多項式からニュートン法などの最適値探索手法を用いて最適解を求める。

実際の問題に本手法を適用するにあたり重要になるのが、応答曲面を表す近似多項式の次数や項数及び実験点の数である。そこで、本論文では油槽船の隔壁構造を例に上記の手法の適用上の検討課題について調べる。

3.2 検討モデル

検討モデルとして Fig.1 に示すような油層船センタータンクの横隔壁構造を想定し、構造重量最小化を目的とした最適設計を行う。

Fig.1 T.B.H.D. model

設計変数として縦防撓材の本数 n_{vs} (センターラインを挟み両舷分) と水平桁材の本数 n_{hg} を考え、それぞれを等間隔に配置する。隔壁の板厚や骨材の形状は縦防撓材や水平桁材の間隔から日本海事協会鋼船規則⁴⁾により評価することとした。ただし、縦防撓材、水平桁材の断面形状は日本海事協会鋼船規則で定められる必要断面係数を満足する最適形状 (重量最小断面) を文献5の方法で計算することとした。なお、縦防撓材、水平桁材の端部には実績船の設計を参考にした肘板を設ける。

以上、本研究における、独立変数は n_{vs} 及び n_{hg} のみであり、横隔壁構造の総重量 W を目的関数として最適化を行う。

3.3 近似の影響の検討

応答曲面に用いる近似多項式に次数の制限は無い。しかしながら、不必要に近似多項式の次数や項数を増やすならば、計算負荷の増大のみならず、近似の不安定化を招く恐れが強い。従って、実用上最も重要な意味をもつ極値周辺において低次の多項式で応答の傾向を精度よく把握できることを確認できれば、応答曲面法の工学的有効性としては十分と考えられる。

そこで本論文では(15)式、(16)式のような2次式または3次式で応答曲面を近似した場合の計算精度を確認する。

$$W = \beta_0 + \beta_1 n_{vs} + \beta_2 n_{hg} + \beta_3 n_{vs}^2 + \beta_4 n_{vs} n_{hg} + \beta_5 n_{hg}^2 + \varepsilon \quad (15)$$

$$W = \beta_0 + \beta_1 n_{vs} + \beta_2 n_{hg} + \beta_3 n_{vs}^2 + \beta_4 n_{vs} n_{hg} + \beta_5 n_{hg}^2 + \beta_6 n_{vs}^3 + \beta_7 n_{vs}^2 n_{hg} + \beta_8 n_{vs} n_{hg}^2 + \beta_9 n_{hg}^3 + \varepsilon \quad (16)$$

また未知係数 β_i を求めるために必要な設計変数の組み合わせ (以下、これを実験点と呼ぶ) の数については、一般に近似多項式の係数の数の2倍程度必要とされているが、確認のため、実験点数を未知係数総数の2倍及び4倍としてその影響を調べる。本論文では多項式の次数と実験点数に対し、次のCASE1~4の組み合わせを考え応答曲面を求める。なお、検討範囲内の全ての n_{vs} と n_{hg} の組み合わせを総当りで評価した結果 (以下、これをExact solutionと呼ぶ) をCASE5として、CASE1~4の結果の精度確認に使用する。

CASE1: 2次多項式で実験点12点による近似。

CASE2: 2次多項式で実験点24点による近似。

CASE3: 3次多項式で実験点20点による近似。

CASE4: 3次多項式で実験点40点による近似。

CASE5: 総当りでの評価。

なお、 n_{vs} 及び n_{hg} の範囲は $15 \leq n_{vs} \leq 60$, $1 \leq n_{hg} \leq 15$

とする。この範囲の設計変数の組み合わせは $46 \times 15 = 690$ 通りとなる。CASE1~4に対しては、それらの組み合わせの中からD最適基準を用いて近似式作成に有効な実験点を定め、対応する応答を計算した後、最小2乗法を用いて近似応答曲面を求めた。なお、係数の有意性を判断した結果、CASE1,3,4では有意でないと判定された係数が存在した。それらを削除して求めた β_i の組をTable1に示す。

Table 1 Least square estimations of each coefficient

Coff.	CASE 1		CASE 2	
	Least square estimation	t-value	Least square estimation	t-value
β_0	94.019186	20.64	105.636170	25.93
β_1	-	-	-0.517336	-2.59
β_2	-4.476604	-3.30	-6.160000	-12.77
β_3	0.007190	3.69	0.012406	4.79
β_4	-0.061158	-4.36	-0.055510	-7.79
β_5	0.275720	3.60	0.376450	13.32
R_{adj}^2	0.937185	-	0.972555	-
Coff.	CASE 3		CASE 4	
	Least square estimation	t-value	Least square estimation	t-value
β_0	129.596590	23.63	132.215120	33.91
β_1	-2.736792	-5.35	-2.878200	-8.74
β_2	-9.426821	-10.35	-9.322768	-14.49
β_3	0.076930	5.16	0.080223	8.75
β_4	-0.143416	-10.26	-0.155986	-14.03
β_5	1.240112	11.01	1.251627	16.00
β_6	-	-	-	-
β_7	-0.000523	-3.92	-0.000544	-6.69
β_8	0.005758	6.58	0.006577	9.76
β_9	-0.044881	-10.41	-0.046298	-14.97
R_{adj}^2	0.992018	-	0.995247	-

CASE1~4、及び総当りで求めたCASE5の結果をFig.2~Fig.6に示す。

Fig.2 Hull steel weight (ton):CASE1
(Degree of approximate polynomial:2,
Number of evaluation points:12)

Fig.5 Hull steel weight (ton):CASE4
(Degree of approximate polynomial:3,
Number of evaluation points:40)

Fig.3 Hull steel weight (ton):CASE2
(Degree of approximate polynomial:2,
Number of evaluation points:24)

Fig.6 Hull steel weight (ton):CASE5
(Exact solution)

Fig.4 Hull steel weight (ton):CASE3
(Degree of approximate polynomial:3,
Number of evaluation points:20)

この結果を見ると、2次多項式近似と3次多項式近似の応答曲面はかなり異なっている。総当り評価での応答曲面と比較すると3次多項式近似のほうが精度がよい。ただし、総当り評価では構造重量が60tonを下回る事は無かったため、Fig.6には60tonの等高線はない。

このように近似多項式の次数によって相異が生じた理由としては、設計変数の変域が比較的大いので、2次多項式では精度不足となったためと考えられる。また実験点数の違いとしては、実験点数が増せば最適値周辺の精度が上がるが、影響はさほど大きくないことが分かった。

以上、設計変数の変域が広い場合には応答を2次多項式で近似することには無理があることが分かったため、次に極値付近を拡大して近似式の精度を調べる。設計変

数 n_{vs} 及び n_{hg} の範囲を $30 \leq n_{vs} \leq 60$, $5 \leq n_{hg} \leq 15$ とした場合の応答曲面を Fig.7~9 に示す。ただし、先程の検討で、実験点総数は未知係数の 2 倍で十分であることが確認されたので、今回の検討では以下の組み合わせで検討を行った。

CASE6 : 2 次多項式で実験点 12 点による近似

CASE7 : 3 次多項式で実験点 20 点による近似

CASE8 : 総当りで評価

Fig.7 Hull steel weight(ton):CASE6
(Degree of approximate polynomial:2,
Number of evaluation points:12)

Fig.8 Hull steel weight(ton):CASE7
(Degree of approximate polynomial:3,
Number of evaluation points:20)

Fig.9 Hull steel weight(ton):CASE8
(Exact solution)

最適値周辺における総当り評価(Fig.9)と 2 次多項式近似(Fig.7)及び 3 次多項式近似(Fig.8)の応答曲面を比較すると、3 次多項式近似のほうが正解（総当り評価）に近い。ピーク値に関しては 2 次多項式近似でも十分に精度はあるものの、極値周辺の応答曲面の傾向を正確に表現するには 3 次多項式近似が有効であると考えられる。

3.4 工作コストを考慮した最適化

3.3 節では縦防撓材と水平桁材の本数による構造重量の最適化を行った。それによると縦防撓材、水平桁材ともに実船の横隔壁構造（同サイズの実船の一例： $n_{vs} = 17$, $n_{hg} = 3$ ）に比べ本数がかかなり多い組み合わせに最適値があるとの結果となった。しかしながら、実際問題として縦防撓材や水平桁材といった骨部材が多いと建造に要する工数が増加し、それによってコストも大きくなるため不利な設計になるはずである。

そこで次に、溶接線長から工作に要するコストを推定し、先ほど求めた構造重量より定まる材料コストと工作コストの合計として隔壁構造の総建造コストを計算して、最適化を行う。まず、構造重量についてはトンあたりの鋼材費用を c_s とする。また工数についてはメートルあたりの溶接費用を c_w とする。

従って、隔壁構造の総建造コストは次式で表される。

$$C = c_s \times W_s + c_w \times L_w \quad (17)$$

ここで、 W_s は隔壁構造の重量である。 L_w は溶接線長で縦防撓材と横桁の本数から決まるとした。

ここで、 c_s および c_w は以下のように仮定する。

$$c_s = 70,000 \text{ yen/ton}, \quad c_w = 2,000 \text{ yen/m}$$

これをもとに総建造コストの最適値を応答曲面法により求める。近似式としては構造重量の最小化において使用した(16)式の関数形(3次多項式)を用いる。各設計変数の範囲は $9 \leq n_{vs} \leq 60$, $1 \leq n_{hg} \leq 15$ とする。

参考として、この範囲の可能性のある組み合わせの中からD最適基準を用いて選び出した実験点をTable 2に示す。

Table 2 Design variables selected by D-optimality

NUMBER	n_{vs}	n_{hg}	NUMBER	n_{vs}	n_{hg}
1	9	1	9	44	15
2	9	6	10	45	1
3	9	10	11	45	12
4	9	15	12	50	5
5	22	5	13	58	7
6	22	15	14	60	1
7	23	12	15	60	11
8	27	1	16	60	15

Table 2 の 16 の実験点での総建造コストを計算し、最小2乗法を用いて応答曲面を求めた。未知係数の最小2乗推定量をTable 3、応答曲面をFig.10に示す。ただしFig.10は $9 \leq n_{vs} \leq 30$ の領域のみ示している。

Table 3 Least square estimations of each coefficient

Coff.	Least square estimation	Coff.	Least square estimation
β_0	9152080.800	β_5	89461.110
β_1	-13738.290	β_6	22.328
β_2	-512572.700	β_7	-39.564
β_3	5445.817	β_8	451.120
β_4	12417.860	β_9	3304.820
		R_{adj}^2	0.994491

Fig.10 Total construction cost(10^6 yen) by R.S.M.

Fig.10 により、応答の全体的な傾向がつかめたので、次に、3.3 節同様に最適値周辺を拡大して応答曲面を求めるとFig.11となる。

Fig.11 Total construction cost(10^6 yen) by R.S.M

得られた応答曲面の精度を確認するために、総当りで評価した最適値近傍の総建造コストの等高線をFig.12に示す。また、両者の最適解の比較をTable 4に示す。

Fig.12 Total construction cost(10^6 yen),
Exact solution

Table 4 Comparison of optimum solutions

	Response surface methodology	Exact solution
n_{vs}	14	14
n_{hg}	4	3
Total cost	¥8,625,231	¥8,646,432

最適解を比較すると、 n_{vs} 及び n_{hg} を整数として扱っているため、最適解に対応する水平桁材の本数(n_{hg})に若干の差が出たが、得られた総建造コストの最適値にはほとんど差が無い。なお先にも示したように、同サイズの実績船では、縦防撓材の本数 17 本、水平桁材の本数 3 本であった。実船では隔壁の縦防撓材を縦強度から定まる船体の縦通材の配置に合わせているために本論文の結果と完全には一致しないが、(17)式の工作コストを導入する事で最適解が実船の組み合わせに近づくことが確認できた。

4. 結言

本論文では油槽船隔壁構造を例に、船体構造設計の最適化問題への応答曲面法の適用性を検討し、以下の結果を得た。

- (1) 実験点数は近似多項式の未知係数の数の 2 倍程度で十分である。
- (2) 3 次多項式を用いることによって極値周辺を精度よく近似することが可能である。
- (3) 構造重量のみの最適化で選出される最適解では縦防撓材や水平桁材の本数が実船に比べ多めの組み合わせになるが、工作コストを導入することにより実船の設計に近づく。

以上のように応答曲面法は船体構造設計最適化の有効な手段であることが確認された。今回は解の精度を確認するために応答を容易に評価できる船級協会規則により部材寸法を決定したが、応答を一回毎に FEM で評価するような問題では実験点数を最小限に抑えられる本手法は更に有効と考えられる。これに関しては、次の機会に報告する予定である。

参考文献

- 1) Box, G.E.P. and Draper, N.P. : Empirical Model-building and Response Surface, John Wiley & Sons, (1987).
- 2) Khuri, A.I. and Cornell, J.A. : Response Surface, Design and Analysis, Marcel Dekker, Inc., (1996).
- 3) 轟章 : 応答曲面法による非線形問題の最適化入門, 機械学会講習会 99-73, (1999).
- 4) 日本海事協会 : 日本海事協会鋼船規則 C 編 船体構造及び船体ぎ装, (1997).
- 5) 間野正己, 吉田靖夫 : 船殻設計の理論と実際<3>, 船舶, Vol.55, No.610, pp. 32-39, (1982).
- 6) 荒井誠, 清水泰斗, 鈴木竜浩 : 応答曲面法を用いた油槽船隔壁構造の最適化, 関西造船協会誌第 234 号, (2000).