FEM 用 1 次元流力弾性要素について

正員 坪 郷 尚 *

Hydroelastic Element for a Beam Floating on Shallow Water in Waves

by Takashi Tsubogo, Member

Summary

In this paper we propose the FEM using a dynamic displacement function for the hydroelastic problem of a beam floating on shallow water in waves. Our dynamic displacement function consists of the Stoker's solution having 6 unknown coefficients, it means that each element needs 6 nodal data. What new nodal data are is derived by the Weighted Residual Method. This hydroelastic FEM gives stably calculating results in even high frequencies by dividing the beam into smaller elements. Numerical results show that: Wave response of relatively rigid beam is smaller than one of flexible beam. Wave response of floating beams have regular peak values but which are not resonance. Curvature at the central part of the beams have the upper limited value which relates to the bending rigidity.

1. 緒 言

Stoker¹⁾ は浅水上に浮かぶ梁の波浪応答の問題を取り上げ、梁部分の支配方程式 (6 階の常微分方程式) を導くとともにその解を示している。大楠と難波²⁾ は Stoker の方法を無限に長い板に適用し、波動の屈折、臨界波入射角、応答値と反射波の関係などを示している。他方で、藤久保³⁾ は弾性床上の梁の振動問題 (4 階の常微分方程式) に対して、その斉次解を変位関数に用いる動的な有限要素を提案している。本研究では浅水上に浮かぶ梁の波浪応答の問題に対して、藤久保らのアイデアを拡張した 1 次元流力弾性梁要素を提案する。すなわち変位関数には Stoker の解を用いる。ところで Stoker の解は 6 つの未定係数を含むが、これは 1 つの要素に 6 つの節点データが必要なことを意味している。節点の変位、回転角に続く第 3 の“変位”は流速で

あり、対応する“力”は速度ポテンシャルである。このことは、梁に作用する力の釣合の式に対して、重み付き残差法を適用することにより導かれる。以下では、まず 1 次元流力弾性梁要素を紹介し、続いてこの要素を用いた、ポンツーン型 VLFS の波浪応答解析例を示す。

2. 問題の設定

線形長波理論および梁の微小撓み理論の適用範囲内で、浅水上に浮かぶ梁の波浪応答の問題について考える。梁の剛性は必ずしも一様ではなく、長さ方向に分布しているものとする。Figure 1 に示すように一定水深 h の水面上に梁が浮いており、水平方向に x 軸を、鉛直上方に z 軸をとることにする。 $-h \leq z \leq \zeta$ を流体が占めていて、 $z = 0$ が静止水

Fig. 1 Coordinate system and notation

* 大阪府立大学大学院工学研究科

面を表すものとする。単位振幅の入射波が $+x$ 方向に波数 k_0 で進行して来るとする。長波理論での流場の支配方程式は、連続の式・Euler の運動方程式を変形して、以下のように表される^{1,2)};

$$h\nabla^2\phi + \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$p = -\rho g z - \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (2)$$

ここで $\phi(x, t)$ は速度ポテンシャルであり、 $\zeta(x, t)$ は水面あるいは梁の変位を表す。 $z = \zeta$ での圧力の条件は以下のように表される;

$$p = 0 \quad \text{in } |x| \geq L/2 \quad (3)$$

$$p = \nabla^2 \left(\frac{EI(x)}{B} \nabla^2 \zeta \right) \quad \text{in } |x| \leq L/2 \quad (4)$$

ここで $L, B, EI(x)$ はそれぞれ、梁の長さ、幅、曲げ剛性を表す。定常振動問題を考え、以下のように時間項を分離することにする:

$$\phi(x, t) = \frac{g}{i\omega} \Phi(x) e^{-i\omega t} \quad (5)$$

$$\zeta(x, t) = Z(x) e^{-i\omega t} \quad (6)$$

これらを式 (1) と圧力の条件 (3)(4) に代入すると、以下の式を得る:

$$Z = -\frac{1}{k_0^2} \nabla^2 \Phi, \quad k_0 \equiv \omega / \sqrt{gh} \quad (7)$$

$$\Phi = Z \quad \text{in } |x| \geq L/2 \quad (8)$$

$$\Phi = Z + \nabla^2 \left(\frac{1}{k_p^4} \nabla^2 Z \right) \quad \text{in } |x| \leq L/2 \quad (9)$$

$$k_p \equiv \left(\frac{\rho g B}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (10)$$

式 (7)(8) の解は以下の様における;

$$\Phi = e^{ik_0 x} + R e^{-ik_0 x} \quad \text{in } x \leq -L/2 \quad (11)$$

$$\Phi = T e^{ik_0 x} \quad \text{in } x \geq L/2 \quad (12)$$

ここで式 (11) の右辺第 1 項は単位振幅の入射波を表し、 R と T はそれぞれ、波上側反射波と波下側透過波の複素振幅比 (入射波振幅に対する) とする。よって Φ や Z は無次元量である。他方、式 (9) を式 (7) に代入すると下式のようになる:

$$Z = -\frac{1}{k_0^2} \left\{ \nabla^2 Z + \nabla^4 \left(\frac{1}{k_p^4} \nabla^2 Z \right) \right\} \quad (13)$$

3. 重み付き残差法による弱定式化

以下では式 (9) の弱解について考える。残差を以下のようにおく;

$$\text{残差} = Z + \nabla^2 \left(\frac{1}{k_p^4} \nabla^2 Z \right) - \Phi \quad (14)$$

ここで Z や Φ は近似解を意味している。重み関数を δZ とし、微分方程式 (9) を解く問題を以下の弱形式を解く問題に置き換える:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left\{ Z + \nabla^2 \left(\frac{1}{k_p^4} \nabla^2 Z \right) - \Phi \right\} \delta Z dx = 0 \quad (15)$$

梁を $n-1$ 個の要素に分割する。このとき、各々の要素内では剛性が一様であるものとする。

$$\int_{-L/2}^{L/2} = \int_{x_1(-L/2)}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n(=L/2)} \quad (16)$$

部分積分を繰り返すと、例えば $x_1 \leq x \leq x_2$ の積分は以下のように変形できる;

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ Z + \frac{1}{k_p^4} \nabla^4 Z - \Phi \right\} \delta Z dx = \\ \left[\frac{-F}{\rho g B} \delta Z \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{-M}{\rho g B} \delta \left(\frac{dZ}{dx} \right) \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{\Phi}{k_0^2} \delta \left(\frac{d\Phi}{dx} \right) \right]_{x_1}^{x_2} \\ + \int_{x_1}^{x_2} Z \delta Z dx + \frac{1}{k_p^4} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 Z}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 Z}{dx^2} \right) dx \\ - \frac{1}{k_0^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Phi}{dx} \delta \left(\frac{d\Phi}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (17)$$

ここで式 (7) と以下の関係を用いた:

$$F = -\frac{dM}{dx}, \quad M = EI \frac{d^2 Z}{dx^2} \quad (18)$$

要素の弱形式 (17) の形から $Z, dZ/dx, d\Phi/dx$ を“節点変位”に選ぶことにする。

4. 変位関数と要素剛性マトリックス

要素内では剛性が一様と考えているので式 (13) の解は以下のように表される^{1,2)};

$$Z = \sum_{j=1}^6 C_j e^{ik_j x} \quad \text{in the element} \quad (19)$$

ここで C_j は未定係数であり、 k_j は以下のように表される (複合同順)^{4,5)};

$$k_j = \begin{cases} \pm k & \text{for } j = 1, 2 \\ \pm i(k_p^4 + k^4)^{\frac{1}{4}} e^{i\gamma/2} & \text{for } j = 3, 4 \\ \pm i(k_p^4 + k^4)^{\frac{1}{4}} e^{-i\gamma/2} & \text{for } j = 5, 6 \end{cases} \quad (20)$$

$$\tan \gamma \equiv \frac{2}{k^2} \sqrt{k_p^4 + \frac{3}{4}k^4}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \quad (21)$$

ここで k は以下の分散関係式の実根である:

$$k_0 = k \sqrt{1 + \frac{k^4}{k_p^4}} = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \quad (22)$$

本研究では要素内の変位関数を式 (19) とする. 要素端節点変位 $\{u^e\}_l$ と未定係数 C_j の関係は, 例えば $x_1 \leq x \leq x_2$ に対応する要素では以下になる:

$$\left. \begin{aligned} u_1^e &\equiv Z(x_1) = \sum_{j=1}^6 e^{ik_j x_1} C_j \\ u_2^e &\equiv \frac{dZ}{dx} \Big|_{x=x_1} = \sum_{j=1}^6 ik_j e^{ik_j x_1} C_j \\ u_3^e &\equiv \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=x_1} = \sum_{j=1}^6 ik_j \left(1 + \frac{k_j^4}{k_p^4}\right) e^{ik_j x_1} C_j \\ u_4^e &\equiv Z(x_2) = \sum_{j=1}^6 e^{ik_j x_2} C_j \\ u_5^e &\equiv \frac{dZ}{dx} \Big|_{x=x_2} = \sum_{j=1}^6 ik_j e^{ik_j x_2} C_j \\ u_6^e &\equiv \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=x_2} = \sum_{j=1}^6 ik_j \left(1 + \frac{k_j^4}{k_p^4}\right) e^{ik_j x_2} C_j \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これをまとめて以下のようにマトリックス表記する.

$$\{u^e\}_l = \sum_{j=1}^6 [A]_{lj} C_j \quad \text{in the element} \quad (24)$$

これより C_j は要素端節点変位 $\{u^e\}_l$ を用いて表すことができる:

$$C_j = \sum_{l=1}^6 [A^{-1}]_{jl} \{u^e\}_l \quad \text{in the element} \quad (25)$$

重み関数は以下のようになる:

$$\delta Z = \sum_{j=1}^6 e^{ik_j x} [A^{-1}]_{jl} \delta \{u^e\}_l \quad \text{in the element} \quad (26)$$

要素の弱形式 (17) は以下のように表される;

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ Z + \frac{1}{k_p^4} \nabla^4 Z - \Phi \right\} \delta Z dx = \sum_{l_1, l_2=1}^6 \left(-\{f^e\}_{l_2} + [K^e]_{l_2 l_1} \{u^e\}_{l_1} \right) \delta \{u^e\}_{l_2} \quad (27)$$

$$\{f^e\} \equiv \left\{ \frac{-F_1}{\rho g B}, \frac{-M_1}{\rho g B}, \frac{\Phi_1}{k_0^2}, \frac{F_2}{\rho g B}, \frac{M_2}{\rho g B}, \frac{-\Phi_2}{k_0^2} \right\}^T \quad (28)$$

ここで $[K^e]_{l_2 l_1}$ は要素剛性マトリックスである:

$$[K^e]_{l_2 l_1} \equiv \sum_{j_1, j_2=1}^6 \left[1 + \frac{k_{j_1}^2 k_{j_2}^2}{k_p^4} + \frac{k_{j_1} k_{j_2}}{k_0^2} \left(1 + \frac{k_{j_1}^4}{k_p^4} \right) \left(1 + \frac{k_{j_2}^4}{k_p^4} \right) \right] \times [A^{-1}]_{j_1 l_1} [A^{-1}]_{j_2 l_2} \int_{x_1}^{x_2} e^{i(k_{j_1} + k_{j_2})x} dx \quad (29)$$

式中の積分項は以下のように計算できる:

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{i(k_{j_1} + k_{j_2})x} dx = \begin{cases} \frac{2 \sin \left\{ (k_{j_1} + k_{j_2}) \frac{\Delta x}{2} \right\}}{k_{j_1} + k_{j_2}} e^{i(k_{j_1} + k_{j_2})x_m} & \text{for } k_{j_1} + k_{j_2} \neq 0 \\ \Delta x & \text{for } k_{j_1} + k_{j_2} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1, \quad x_m \equiv \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (31)$$

5. 全体剛性方程式

式 (27) 中の添字を全体自由度の番号 $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ に付け換える: 全体自由度の番号 $\bar{l}_1$ は要素番号 e と要素端節点変位番号 l_1 が指定されると一意に決まる. 以上の手続きが式 (16) 中の他の全ての要素に対しても実行される. 式 (16) の積分和を実行するとき, 式 (2) で表される流体圧以外の外力が作用しない場合は, 式 (17) あるいは (28) より, 梁の自由端を除く全ての節点で要素端節点力は打ち消しあう. その結果, 重み付き残差式 (15) は以下のようにマトリックス表記できる;

$$\sum_{\bar{l}_1, \bar{l}_2=1}^{3n} \left(-\{f\}_{\bar{l}_2} + [K]_{\bar{l}_2 \bar{l}_1} \{u\}_{\bar{l}_1} \right) \delta \{u\}_{\bar{l}_2} = 0 \quad (32)$$

$$\{f\} =$$

$$\left\{ \frac{-F_1}{\rho g B}, \frac{-M_1}{\rho g B}, \frac{\Phi_1}{k_0^2}, 0, 0, \dots, 0, \frac{F_n}{\rho g B}, \frac{M_n}{\rho g B}, \frac{-\Phi_n}{k_0^2} \right\}^T \quad (33)$$

ここで $[K]_{\bar{l}_2 \bar{l}_1}$ は全体剛性マトリックスであり要素剛性マトリックス $[K^e]_{l_2 l_1}$ の足し合わせで構成される. 重み付き残差式 (32) において仮節点変位 $\delta \{u\}_{\bar{l}_2}$ が任意であることから離散化された平衡方程式が得られる:

$$\{f\}_{\bar{l}_2} = \sum_{\bar{l}_1=1}^{3n} [K]_{\bar{l}_2 \bar{l}_1} \{u\}_{\bar{l}_1} \quad (34)$$

Table 1 Numerical data for computations of pontoon-type floating structures

	VL300	VL15
$L \times B$	300m×60m	15m×3m
$k_p L/2$	5.048	12.98

6. 境界条件

梁の自由端の条件は $F = 0, M = 0$ であるから、式 (33) において $F_1 = M_1 = F_n = M_n = 0$ とする。また $x = \pm L/2$ でそれぞれ速度ポテンシャルが滑らかに連続する条件 (水平方向の力学的条件と運動学的条件) は、式 (11)(12) からそれぞれ R と T を消去すると以下のように表される:

$$\frac{\Phi}{k_0^2} = -\frac{1}{ik_0^3} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{2}{k_0^2} e^{ik_0 x} \quad \text{at } x = -L/2 \quad (35)$$

$$-\frac{\Phi}{k_0^2} = -\frac{1}{ik_0^3} \frac{d\Phi}{dx} \quad \text{at } x = L/2 \quad (36)$$

すなわち、 $1/(ik_0^3)$ を $[K]_{33}$ と $[K]_{(3n)(3n)}$ に追加し、 $x = x_1$ での節点力 Φ_1/k_0^2 を $2\exp(ik_0 x_1)/k_0^2$ に、 $x = x_n$ での節点力 $-\Phi_n/k_0^2$ を 0 にする。

7. FEM 計算例

本報で提案した FEM を用いた波浪応答解析例を示す。Table 1 に示す VL300 と VL15 を例として取りあげる。幾つかの計算の結果、高周波域においても要素分割を増やせば安定した結果が得られることがわかった。長波近似を用いて高周波の場合を計算することは実用的には意味のないことであるが、現象自体が高周波側で不連続に変わらないとすると、長波近似による外挿がどのようになっているか知っておくことは意味のあることであろう。計算には水深 h の値を用いていない (すなわち $k_0 h$ の値は任意である) が、現実的な水深を想定すると長波近似の適用範囲を超えるであろう、そのような周波数域が以下で示す結果には含まれていることを断っておく。

Figure 2 は VL300 と VL15 で周波数応答を比較したものである。上の図は原点での撓み振幅、下の図は原点での曲率の振幅である。同じスケールで比べた場合、相対的に剛な VL300 の方が応答値は小さいといえる。

Figure 3 は VL300 の周波数応答で横軸には式 (22) による k を用いてまとめている。上の図は透過波振幅の 2 乗、中の図は原点と波入射部での撓み振幅、下の図は原点での曲率の振幅である。大楠と難波が指摘しているように、完全透過状態が、概ね;

のときに起こり、このとき応答値が大きくなっている²⁾。

Figure 4 は VL15 の周波数応答で横軸には式 (22) による k を用いてまとめている。Figure 3 と 4 より、ポンツーン型 VLFS では波浪応答の極大値は存在するが、共鳴現象はおきかないものと予想される。Figure 3 と 4 で曲率の周波数応答を比べると、浮体中央部での曲率の大きさには上限があり、概ね;

$$|\nabla^2 Z(0)| \leq \frac{k_p^2}{\sqrt{3}} \quad (38)$$

となっている。また高周波側での極大値の大きさはほぼ一定となっている。このことは、浮体の変形の波長が短くなってもその分、撓みの大きさが波長の 2 乗で小さくなっていることを意味する。

Figure 5 は剛性を变化させた VL15 において $k_0 L/2\pi = 14.62$ の波が入射する場合の撓み振幅の浮体長方向の分布の様子である。上の図は浮体端部の剛性が $0.4EI(L/4 \leq |x| \leq L/2)$ で浮体中央部の剛性が $1.6EI(|x| \leq L/4)$ の場合の結果、下の図は浮体端部の剛性が $1.6EI(L/4 \leq |x| \leq L/2)$ で浮体中央部の剛性が $0.4EI(|x| \leq L/4)$ の場合の結果である。図中、点線で示されているのは一様な剛性 EI の場合の結果である。この例では中央部の応答値が低減されたり、あるいは端部の応答値が低減されるなどメリットがあるように見える。

Fig. 2 The comparison of frequency responses between VL300 and VL15: (Top) the deflection amplitudes; and (Bottom) the curvature at origin.

$$kL = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Fig. 3 The frequency responses of VL300 in waves: (Top) transmitted waves; (Middle) deflection at origin and weatherside; and (Bottom) curvature at origin, where k of the abscissa represents a real root of $k_0 = k\sqrt{1 + k^4/k_p^4}$. The maximum values of curvature at origin are approximately $\max |\nabla^2 Z(0)| \approx k_p^2/\sqrt{3}$.

Fig. 4 The frequency responses of VL15 in waves: (Top) transmitted waves; (Middle) deflection at origin and weatherside; and (Bottom) curvature at origin, where k of the abscissa represents a real root of $k_0 = k\sqrt{1 + k^4/k_p^4}$. The maximum values of curvature at origin are approximately $\max |\nabla^2 Z(0)| \approx k_p^2/\sqrt{3}$.

Figure 6 は同じく剛性を変化させた VL15 において $k_0 L/2\pi = 14.62$ の波が入射する場合の曲率の振幅の浮体長方向の分布の様子である。図中、小さい点で示されているのは一様な剛性 EI の場合の結果である。この例では、剛性分布の大きな変化は、曲率に対して、ひいては強度に対してはあまり好ましくないといえる。

8. 結 言

本研究では、浮体構造の剛性分布を取り扱える FEM 用 1 次元流力弾性要素を開発し、これを用いたいくつかの波浪応答解析例を示した。

本要素を用いる場合、高周波域においても要素分割を増やせば安定した結果が得られることがわかった。長波理論の適用範囲を超えるが、長波近似による波浪応答計算の外挿が高周波側でどのようなになっているかを調べた。その結果は以下のとおりである：同じスケールで比べた場合、相対的に剛な浮体の方が応答値は小さいといえる。波浪応答の極大値は存在するが、共鳴現象はおきない。浮体中央部での曲率の大きさには上限があり、概ね $|\nabla^2 Z(0)| \leq k_p^2/\sqrt{3}$ で、極大値の大きさはほぼ一定となっている。

参 考 文 献

- 1) Stoker, J. J.(1957). "Water Waves", Interscience Publisher Inc, New York, pp 414-449.

Fig. 5 The amplitudes of deflection of VL15 in $|x| \leq L/2$ and water surface in $|x| \geq L/2$ at $k_0L/2\pi = 14.62$ with: (Top) flexible stiffness in the ends relative to the central part; and (Bottom) flexible stiffness in the central part relative to the ends, where the dashed line represents the results of the default uniform stiffness EI .

Fig. 6 The amplitudes of curvature of VL15 at $k_0L/2\pi = 14.62$ with: (Top) flexible stiffness in the ends relative to the central part; and (Bottom) flexible stiffness in the central part relative to the ends, where the small dots represent the results of the default uniform stiffness EI .

- 2) 大楠丹, 難波康広: 浮体式人工島の流力弾性挙動の研究, 日本造船学会論文集, 第183号, pp 239-248, 1998.
- 3) 藤久保昌彦, 矢尾哲也, 笈田弘紀: 一次元有限要素モデルによる超大型浮体の波浪中構造応答解析, 日本造船学会論文集, 第179号, pp 349-358, 1996.

- 4) 坪郷尚: ポンツーン型長大浮体の流力弾性挙動に関する基礎的研究, 日本造船学会論文集, 第185号, pp 373-385, 1999.
- 5) 坪郷尚: ポンツーン型円盤浮体の流力弾性挙動に関する基礎的研究, 日本造船学会論文集, 第188号, pp 295-302, 2000.