原 著

多群モデルにおけるすべての平均相違に関する閉検定手順 Closed Testing Procedures for Pairwise Comparisons in Multi-Sample Models

白石高章

Taka-aki Shiraishi

南山大学情報理工学部

Faculty of Information Sciences and Engineering, Nanzan University

e-mail:marble@nanzan-u.ac.jp

Under the assumptions of the continuous distribution and equality of variance, we consider multiple comparisons tests for the differences among mean responses in k samples. Closed testing procedures are superior to the Tukey-Kramer type multiple tests which are single-step procedures in many cases. The closed testing procedure more powerful than the Tukey-Welsch test and the REGW test is proposed under the usual normality. Furthermore the nonparametric closed testing procedure is discussed based on ranks. Last the proposed nonparametric closed testing procedure is illustrated with data regarding sarcoidosis from the assay of serum angiotensin-converting enzyme (SACE).

Key words: Multiple comparisons tests, Tukey-Kramer test, Nonparametric rank tests, Family-wise error rate, Asymptotic theory.

1. はじめに

分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較検定法が, Tukey (1953) と Kramer (1956) によって提案され, 現在ではテューキー・クレーマー (Tukey-Kramer) 法とよばれている. 2 群間の t 検定統計量を $t_{ii'}$ とするとき, $\max_{i < i'} |t_{ii'}|$ の分布が, スチューデント化された範囲の $\sqrt{2}$ 倍の統計量の分布によって下から抑えられることを, Hayter (1984) は示した. 長年正しいとされていた $\max_{i < i'} |t_{ii'}|$ の正確な分布は, 実際は $\max_{i < i'} |t_{ii'}|$ の分布を上から抑える分布であることを, 白石 (2006) は証明した. 白石 (2006) は, これらの不等式と数値積分を利用して, Tukey-Kramer 法の保守度を調べることできた.

正規分布の下でのテューキー・クレーマー型多重比較検定を発展させた手法として, 永田・吉田 (1997) で紹介されているテューキー・ウェルシュの方法と丹後・小西 (2010) で紹介されている REGW 法が閉検定手順として知られている. これらの閉検定手順よりも一様に検出力が高い閉検定手順を提案する. 閉検定手順が正当であるための条件としてシダック (Šidák) の不等式をあけて

表 1. k 群モデル

群	サイズ	データ	平均	分布関数
第 1 群	n_1	$X_{11}, \dots, X_{1n_1}$	μ_1	$F(x - \mu_1)$
第 2 群	n_2	$X_{21}, \dots, X_{2n_2}$	μ_2	$F(x - \mu_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
第 k 群	n_k	$X_{k1}, \dots, X_{kn_k}$	μ_k	$F(x - \mu_k)$

総標本サイズ: $n \equiv n_1 + \dots + n_k$ (すべての観測値の個数) $\mu_1, \dots, \mu_k$ はすべて未知パラメータとする.

いる教本が多いが、正則条件が明確でない。このため、この論文には、正当性(validity)の正則条件を明解にするために、補題 1 とその証明を与えている。補題 1 を利用すれば、テューキー・ウェルシュの方法も REGW 法も閉検定手順として正当であることが解る。補題 1 は Kimball (1951) の定理を拡張したものである。

テューキー・クレーマー法は、正規分布の下でのパラメトリック法であるが、このパラメトリック法に対応して、分布に依らないノンパラメトリック多重比較検定法として、スティール(Steel (1960)), ドウウス(Dwass (1960))によって、2 群間のウィルコクソンの順位和に基づく多重比較検定法が提案された。全体順位を使う順位統計量に基づくノンパラメトリック多重比較検定法をダン(Dunn (1964))が提案しているが、Oude Voshaar (1980) と Hsu (1996) は、ダンの方法が多重比較検定になっていないことを指摘している。ノンパラメトリック多重比較では、全体順位ではなく 2 群間の中での順位を使う方法が正しい。すべての母平均差に対して、2 群間の中での順位を使う分布に依存しないノンパラメトリック同時信頼区間の理論が白石 (2006) によって構築された。

正規分布の下での閉検定手順と同様に、2 群間のウィルコクソンの順位和に基づくノンパラメトリック閉検定手順を提案し、漸近理論を構築する。

最後に、提案したノンパラメトリック閉検定手順を使って、肉芽種病のデータを解析する。

2. モデルの設定と多重比較検定の定義

ある要因 A があり、 k 個の水準 $A_1, \dots, A_k$ を考える。水準は群ともよばれる。水準 A_i における標本の観測値 $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ は第 i 標本または第 i 群とよばれ、平均が μ_i である同一の連続型分布関数 $F(x - \mu_i)$ をもつとする。すなわち、

$$P(X_{ij} \leq x) = F(x - \mu_i), \quad E(X_{ij}) = \mu_i.$$

$f(x) \equiv F'(x)$ とおくと、 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0$ が成り立つ。さらにすべての X_{ij} は互いに独立であると仮定する。総標本サイズを $n \equiv n_1 + \dots + n_k$ とおく。標本とその平均、分布関数を表 1 に載せている。

k 個の水準の平均パラメータのすべての比較を考える。

1 つの比較のための検定は

$$\text{帰無仮説 } H_{(i,i')} : \mu_i = \mu_{i'} \text{ vs. 対立仮説 } H_{(i,i')}^A : \mu_i \neq \mu_{i'}$$

となる。帰無仮説のファミリーを,

$$\mathcal{H} \equiv \{H_{(1,2)}, H_{(1,3)}, \dots, H_{(1,k)}, H_{(2,3)}, \dots, H_{(2,k)}, \dots, H_{(k-1,k)}\}$$

とおく。便宜上、一様性の帰無仮説を

$$H_0: \mu_1 = \dots = \mu_k \quad (1)$$

とする。

定数 α ($0 < \alpha < 1$) をはじめに決める。

$\mathbf{X} \equiv (X_{11}, \dots, X_{1n_1}, \dots, X_{k1}, \dots, X_{kn_k})$ の実現値 $\mathbf{x}$ によって、任意の $H_a \in \mathcal{H}$ に対して H_a を棄却するかしないかを定める検定方式を $\phi_a(\mathbf{x})$ とする。

$\boldsymbol{\mu} \equiv (\mu_1, \dots, \mu_k)$ とおく。すべての $1 \leq i < i' \leq k$ に対して、 $\mu_i \neq \mu_{i'}$ のときは、有意水準は関係しないので、

$$\begin{aligned} \Theta_0 &\equiv \{\boldsymbol{\mu} \mid 1 \text{ つ以上の帰無仮説 } H_{(i,i')} \text{ が真}\} \\ &= \{\boldsymbol{\mu} \mid \text{ある } i < i' \text{ に対して } \mu_i = \mu_{i'}\} \end{aligned}$$

とおき、 $\boldsymbol{\mu} \in \Theta_0$ とする。このとき、正しい帰無仮説 $H_{(i,i')}$ は 1 つ以上ある。また、確率は $\boldsymbol{\mu}$ に依存するので、確率測度を $P_{\boldsymbol{\mu}}(\cdot)$ で表わす。

このとき、すべての $\boldsymbol{\mu} \in \Theta_0$ に対して

$$P_{\boldsymbol{\mu}}(\text{正しい帰無仮説のうち少なくとも 1 つが棄却される}) \leq \alpha \quad (2)$$

を満たす検定方式 $\{\phi_a(\mathbf{x})\}$ を、 $\mathcal{H}$ に対する水準 α の多重比較検定法とよんでいる。(2) の左辺を、($\boldsymbol{\mu}$ を固定したときの) 第 1 種の過誤の確率またはタイプ I FWER (type I familywise error rate) とよぶ。また、(2) の右辺の α は全体としての有意水準である。すべての $\boldsymbol{\mu} \in \Theta_0$ に対して (2) が成り立つことは、

$$\sup_{\boldsymbol{\mu} \in \Theta_0} ((2) \text{ の左辺}) \leq \alpha$$

と同値である。すなわち、タイプ I FWER の上限が α 以下である必要がある。

3. テューキー・クレーマー (Tukey-Kramer) の方法

パラメトリック手法を紹介する。 $F(x)$ を正規分布 $N(0, \sigma^2)$ の分布関数とする。分散 σ^2 は未知とする。このとき、多重比較検定と同時推定を行うために、分布関数 $TA(t)$, $TB(t)$ を紹介する。

$$\begin{aligned} TA(t) &\equiv k \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \{\Phi(x) - \Phi(x - \sqrt{2} \cdot ts)\}^{k-1} d\Phi(x) \right] g(s) ds, \\ TB(t) &\equiv \sum_{j=1}^k \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{\lambda_{ni}} \cdot x}{\sqrt{\lambda_{nj}}} \right) - \Phi \left(\frac{\sqrt{\lambda_{ni}} \cdot x}{\sqrt{\lambda_{nj}}} - \frac{\sqrt{\lambda_{ni} + \lambda_{nj}} \cdot ts}{\sqrt{\lambda_{nj}}} \right) \right\} d\Phi(x) \right] g(s) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $\lambda_{ni} \equiv n_i/n$ ($i = 1, \dots, k$),

$$g(s) \equiv \frac{m^{m/2}}{\Gamma(m/2) 2^{(m/2-1)}} s^{m-1} \exp(-ms^2/2) = \frac{mse^{-s^2} c^{(m/2-1)}}{\Gamma(m/2)}, \quad (4)$$

$$c \equiv ms^2 e^{-s^2}/2, \quad m \equiv n - k$$

とする.

α を与え,

$$\text{方程式 } TA(t) = 1 - \alpha \text{ を満たす } t \text{ の解を } ta(k, m; \alpha) \quad (5)$$

とおく.

帰無仮説 $H_{(i,i')}$ と対立仮説 $H_{(i,i')}^A$ の多重比較検定について述べる.

$\bar{X}_{i\cdot}$ を第 i 群の標本平均とし,

$$V_E \equiv \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2$$

とおき,

$$T_{ii'} \equiv \frac{\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{i'\cdot}}{\sqrt{V_E \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}} \right)}} \quad (1 \leq i < i' \leq k)$$

とおく. (1) の一様性の帰無仮説 H_0 の下での確率測度を $P_0(\cdot)$ とする. このとき, Hayter (1984) と白石 (2006) により, すべての $t > 0$ に対して, 不等式

$$TA(t) \leq P_0 \left(\max_{1 \leq i < i' \leq k} |T_{ii'}| \leq t \right) \leq TB(t) \quad (6)$$

が成り立つことが解り,

$$n_1 = \cdots = n_k \quad (7)$$

のとき (6) 式の等号が成り立つことが解る.

[Tukey-Kramer の多重比較検定]

{帰無仮説 $H_{(i,i')}$ vs. 対立仮説 $H_{(i,i')}^A \mid 1 \leq i < i' \leq k$ } に対する水準 α の多重比較検定は,

1. $i < i'$ となるあるペア i, i' に対して $|T_{ii'}| > ta(k, m; \alpha)$ ならば, 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却し, 対立仮説 $H_{(i,i')}^A$ を受け入れ, $\mu_i \neq \mu_{i'}$ と判定する.
2. $i < i'$ となるあるペア i, i' に対して $|T_{ii'}| < ta(k, m; \alpha)$ ならば, 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却しない. □

$$P_0 \left(\max_{1 \leq i < i' \leq k} |T_{ii'}| \leq t \right) = 1 - \alpha$$

を満たす t の解を $te(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha)$ とし, $TB(t) = 1 - \alpha$ を満たす t の解を $tb(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha)$ とする. このとき, (6) より,

$$tb(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha) \leq te(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha) \leq ta(k, m; \alpha)$$

が成り立つ. (6) 式の両側の関数 $TA(t)$, $TB(t)$ は積分範囲が単純な 2 重積分であるので, 精度保証された数値積分が可能であるが, (7) が成り立たない場合は, (6) 式の真ん中の確率は複雑な積分領域の $k+1$ 次元の多重積分でしか表現できない. このため近似のよい $te(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha)$

を求めることができない. Tukey-Kramer の多重比較検定法は保守的になるが, 白石 (2006) は,

$$1 < \max\{n_i \mid i = 1, \dots, k\} / \min\{n_i \mid i = 1, \dots, k\} \leq 2$$

ならば, $tb(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha)$ の値が $ta(k, m; \alpha)$ の値に近いことを精度保証された数値計算で示し, $ta(k, m; \alpha)$ を $te(k, m, \lambda_{n1}, \dots, \lambda_{nk}; \alpha)$ の近似とみなせ, 保守性の度合いは小さいことが解った.

$TA(t)$ に関連した分布として

$$A(t) \equiv k \int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi(x) - \Phi(x - \sqrt{2} \cdot t)\}^{k-1} d\Phi(x) \quad (8)$$

とおく.

(8) の $A(t)$ に対して,

$$A(t) = 1 - \alpha \text{ を満たす } t \text{ の解を } a(k; \alpha) \quad (9)$$

とする. すなわち, $a(k; \alpha)$ は分布 $A(t)$ の上側 100 α % 点である. このとき, $n \rightarrow \infty$ として, $\sqrt{V_E} \xrightarrow{P} \sigma$ であるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} TA(t) = A(t)$$

である. これにより,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ta(k, m; \alpha) = a(k; \alpha)$$

が成り立つ.

4. ノンパラメトリック法

分布関数 $F(x)$ は未知でもかまわないとする. 2 群間の標本観測値の中で順位をつける順位検定が, スティール・ドゥワスによって提案されている. 以下に紹介する.

$n_i + n_{i'}$ 個の観測値 $X_{i1}, \dots, X_{in_i}, X_{i'1}, \dots, X_{i'n_{i'}}$ を小さい方から並べたときの $X_{i\ell}$ の順位を, $R_{i\ell}^{(i, i')}$ とする. $N_{ii'} \equiv n_i + n_{i'}$ とおき,

$$\hat{T}_{ii'} \equiv \sum_{\ell=1}^{n_i} R_{i\ell}^{(i, i')} - \frac{n_i(N_{ii'} + 1)}{2}$$

とおく. このとき, 白石 (2003) の定理 6.2 より, (1) の H_0 の下での $\hat{T}_{ii'}$ の平均と分散は

$$E_0(\hat{T}_{ii'}) = 0, \quad V_0(\hat{T}_{ii'}) = \frac{n_i n_{i'} (N_{ii'} + 1)}{12}$$

で与えられる. ここで,

$$\hat{Z}_{ii'} \equiv \frac{\hat{T}_{ii'}}{\sigma_{ii'n}}, \quad \sigma_{ii'n} \equiv \sqrt{\frac{n_i n_{i'} (N_{ii'} + 1)}{12}}$$

とおく. 漸近理論において

$$(\text{条件 1}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n} = \lambda_i > 0 \quad (i = 1, \dots, k). \quad \square$$

を仮定する. このとき, 白石 (2008) の命題 1 より, $t > 0$ に対して,

$$A(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_0 \left(\max_{1 \leq i < i' \leq k} |\hat{Z}_{ii'}| \leq t \right) \leq B(t) \quad (10)$$

が成り立ち,

$$\lambda_i = \frac{1}{k} \quad (1 \leq i \leq k) \quad \text{すなわち} \quad n_1 = \cdots = n_k$$

のとき (10) 式の等号が成り立つ. ただし,

$$B(t) \equiv \sum_{j=1}^k \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left\{ \Phi \left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \cdot x \right) - \Phi \left(\sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \cdot x - \sqrt{\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_j}} \cdot t \right) \right\} d\Phi(x)$$

とする.

[漸近的なシングルステップ多重比較順位検定]

(条件 1) を満たすと仮定する. このとき, (10) の左側の不等式より, $\{\text{帰無仮説 } H_{(i,i')} \text{ vs. 対立仮説 } H_{(i,i')}^A \mid 1 \leq i < i' \leq k\}$ に対する水準 α の漸近的な多重比較検定は,

1. $i < i'$ となるあるペア i, i' に対して $|\hat{Z}_{ii'}| > a(k; \alpha)$ ならば, 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却し, 対立仮説 $H_{(i,i')}^A$ を受け入れ, $\mu_i \neq \mu_{i'}$ と判定する.
2. $i < i'$ となるあるペア i, i' に対して $|\hat{Z}_{ii'}| < a(k; \alpha)$ ならば, 帰無仮説 $H_{(i,i')}$ を棄却しない.

□

(10) の不等式と Shiraishi (2007) の Table 1 より, $1 < \max\{\lambda_i : i = 1, \dots, k\} / \min\{\lambda_i : i = 1, \dots, k\} \leq 2$ ならば, 保守性の度合いは小さいことが解る.

5. 閉検定手順

$\mathcal{U} \equiv \{(i, i') \mid 1 \leq i < i' \leq k\}$ とおく. 帰無仮説のファミリー $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \{H_{(i,i')} \mid 1 \leq i < i' \leq k\} = \{H_v \mid v \in \mathcal{U}\}$$

と表現できる. $\mathcal{H}$ の要素の仮説 $H_{(i,i')}$ の論理積からなるすべての集合は

$$\overline{\mathcal{H}} = \left\{ \bigwedge_{v \in V} H_v \mid \emptyset \subsetneq V \subset \mathcal{U} \right\}$$

で表され, $\overline{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ の閉包とよんでいる. 論理積 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ についての詳しい説明は, 中内伸光 (2002) を参照すること. $\bigwedge_{v \in \mathcal{U}} H_v$ は (1) の一様性の帰無仮説 H_0 となる. さらに $\emptyset$ でない $V \subset \mathcal{U}$ に対して

$$\bigwedge_{v \in V} H_v : \text{任意の } (i, i') \in V \text{ に対して, } \mu_i = \mu_{i'}$$

は k 個の母平均に関していくつかが等しいという仮説となる. $I_1, \dots, I_J$ ($I_j \neq \emptyset, j = 1, \dots, J$) を添え字 $\{1, \dots, k\}$ の互いに素な部分集合の組とし, 同じ I_j ($j = 1, \dots, J$) に含まれる添え字をもつ母平均は等しいという帰無仮説を $H(I_1, \dots, I_J)$ で表す. このとき, $\emptyset$ でない任意の $V \subset \mathcal{U}$ に対して, ある自然数 J と上記のある $I_1, \dots, I_J$ が存在して,

$$\bigwedge_{v \in V} H_v = H(I_1, \dots, I_J) \quad (11)$$

が成り立つ.

$\emptyset$ でない $V_0 \subset \mathcal{U}$ に対して, すべての帰無仮説 H_v ($v \in V_0$) が真のとき, 1 つ以上の帰無仮説 H_v ($v \in V_0$) を棄却する確率が α 以下となる検定方式が水準 α の多重比較検定である. この定義の V_0 に対して, 帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V_0} H_v$ に対する水準 α の検定の棄却域を A とし, 帰無仮説 H_v に対する水準 α の検定の棄却域を B_v とすると, 帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V_0} H_v$ の下で,

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_{v \in V_0} B_v\right)\right) \leq P(A) \leq \alpha \quad (12)$$

が成り立つ.

閉検定手順は, 特定の帰無仮説を $H_{v_0} \in \mathcal{H}$ としたとき, $v_0 \in V$ を満たすすべての $V (\subset \mathcal{U})$ に対して帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ の検定が水準 α で棄却された場合に, 多重比較検定として H_{v_0} を棄却する方式である.

5.1 正規母集団での手順

(12) より, 閉検定手順による多重比較検定のタイプ I FWER が α 以下となる. $T(I_j) \equiv \max_{i < i', i, i' \in I_j} |T_{ii'}|$ ($j = 1, \dots, J$) とおき, 水準 α の帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ に対する検定方法を具体的にいくつか論述することができる.

(I) 検出力の高い閉検定手順

$\#(A)$ を集合 A の要素の個数とし, (11) の右辺の表現 $H(I_1, \dots, I_J)$ に対して, M, ℓ_j ($j = 1, \dots, J$) を

$$M \equiv M(I_1, \dots, I_J) \equiv \sum_{j=1}^J \ell_j, \ell_j \equiv \#(I_j) \quad (13)$$

とする. (3) の $TA(t)$ に対応して,

$$TA(t|\ell) \equiv \ell \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \{\Phi(x) - \Phi(x - \sqrt{2} \cdot ts)\}^{\ell-1} d\Phi(x) \right] g(s) ds,$$

とおく. ただし, $g(s)$ は (4) で定義したものとする. (5) の表記の方法より, $TA(t|\ell) = 1 - \alpha$ を満たす t の解は, $ta(\ell, m; \alpha)$ である.

(a) $J \geq 2$ のとき, $\ell = \ell_1, \dots, \ell_J$ に対して

$$\alpha(M, \ell) \equiv 1 - (1 - \alpha)^{\ell/M} \quad (14)$$

で $\alpha(M, \ell)$ を定義する. $1 \leq j \leq J$ となるある整数 j が存在して $ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) < T(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ を棄却する.

(b) $J = 1$ ($M = \ell_1$) のとき, $ta(M, m; \alpha) < T(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ を棄却する.

(a), (b) の方法で, $(i, i') \in V \subset \mathcal{U}$ を満たすすべての V に対して, $\bigwedge_{v \in V} H_v$ が棄却されるとき, 多重比較検定として, $H_{(i, i')}$ を棄却する. $\square$

(b) の検定の有意水準が α であることは自明であるので, (a) の検定の有意水準は α であることを次の補題 1 を使って示す.

補題 1 $f_1(x), f_2(x) \geq 0$ で, $f_1(x), f_2(x)$ は連続な単調増加関数とする. X を 0 以上の値をと
Jpn J Biomet Vol.32, No.1, 2011

る連続型分布に従う確率変数とし, $E|f_1(X)|, E|f_2(X)| < \infty$ を仮定する. このとき,

$$E\{f_1(X)f_2(X)\} \geq E\{f_1(X)\}E\{f_2(X)\}$$

が成り立つ. $f_1(x), f_2(x)$ が連続な狭義の単調増加関数ならば, 上記の不等号は $>$ である.

証明 X の密度関数を $g_X(x)$ とする.

$$\begin{aligned} IT &\equiv E\{f_1(X)f_2(X)\} - E\{f_1(X)\}E\{f_2(X)\} \\ &= \int_0^\infty f_1(x)[f_2(x) - E\{f_2(X)\}]g_X(x)dx \end{aligned}$$

とおく. このとき, $f_2(x)$ が単調増加関数で連続より, $f_2(x_0) = E\{f_2(X)\}$ となる $x_0 > 0$ が存在する.

ここで

$$\begin{aligned} IT &= - \int_0^{x_0} f_1(x)[E\{f_2(X)\} - f_2(x)]g_X(x)dx + \int_{x_0}^\infty f_1(x)[f_2(x) - E\{f_2(X)\}]g_X(x)dx \\ &= -IT_1 + IT_2 \end{aligned}$$

である.

$$\int_0^\infty [f_2(x) - E\{f_2(X)\}]g_X(x)dx = 0$$

より

$$\begin{aligned} JT &\equiv - \int_0^{x_0} [f_2(x) - E\{f_2(X)\}]g_X(x)dx \\ &= \int_{x_0}^\infty [f_2(x) - E\{f_2(X)\}]g_X(x)dx \end{aligned}$$

が成り立つ. $f_1(x) \geq 0$ が単調増加関数より,

$$IT_1 \leq f_1(x_0)JT, \quad IT_2 \geq f_1(x_0)JT$$

これは, $IT = IT_2 - IT_1 \geq 0$ を意味している. □

補題 1 は, Kimball (1951) の定理を拡張して与えている.

定理 1 (a) の検定の有意水準は α である.

証明 一般性を失うことなく $\sigma^2 = 1$ とする. $g(s)$ は $\sqrt{V_E}$ の密度関数である. このとき, $V_E, \sqrt{V_E} \cdot T(I_1), \dots, \sqrt{V_E} \cdot T(I_J)$ は互いに独立より,

$$\begin{aligned} P_0(T(I_j) \leq ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \dots, J) \\ &= \int_0^\infty P_0\left(T(I_j) \leq ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \dots, J \mid \sqrt{V_E} = s\right) \cdot g(s)ds \\ &= \int_0^\infty P_0\left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \dots, J \mid \sqrt{V_E} = s\right) \cdot g(s)ds \\ &= \int_0^\infty \left\{ \prod_{j=1}^J P_0\left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j))\right) \right\} \cdot g(s)ds \end{aligned} \quad (15)$$

が導かれる.

$$f_1(s) \equiv P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_1) \leq s \cdot ta(\ell_1, m; \alpha(M, \ell_1)) \right),$$

$$f_2(s) \equiv \prod_{j=2}^J P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) \right)$$

とおき、補題 1 を適用すると、

$$(15) \geq \int_0^\infty P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_1) \leq s \cdot ta(\ell_1, m; \alpha(M, \ell_1)) \right) \cdot g(s) ds$$

$$\cdot \int_0^\infty \prod_{j=2}^J P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) \right) \cdot g(s) ds$$

を得る。以下帰納法的に

$$(15) \geq \prod_{j=1}^J \int_0^\infty P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) \right) \cdot g(s) ds \quad (16)$$

が導かれる。Hayter (1984) の定理を使って

$$P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) \right) \geq A(s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) | \ell_j)$$

の関係より、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty P_0 \left(\sqrt{V_E} \cdot T(I_j) \leq s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) \right) \cdot g(s) ds \\ & \geq \int_0^\infty A(s \cdot ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) | \ell_j) g(s) ds \\ & = TA(ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) | \ell_j) \\ & = 1 - \alpha(M, \ell_j) \\ & = (1 - \alpha)^{\ell_j/M} \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。ただし、(8) の $A(t)$ に対応して、

$$A(t | \ell) \equiv \ell \int_{-\infty}^\infty \{\Phi(x) - \Phi(x - \sqrt{2} \cdot t)\}^{\ell-1} d\Phi(x) \quad (18)$$

とおく。(16), (17) を使って、

$$\begin{aligned} & P_0(\text{ある } j \text{ が存在して, } T(I_j) > ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j))) \\ & = 1 - P_0(T(I_j) \leq ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \dots, J) \\ & \leq 1 - \prod_{j=1}^J \left\{ (1 - \alpha)^{\ell_j/M} \right\} \\ & = \alpha \end{aligned} \quad (19)$$

が成り立つ。ここで、帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ に対する (a) の検定は、有意水準 α である。 $\square$

定理 1 より、(I) は水準 α の多重比較検定である。

永田・吉田 (1997) で紹介されているテューキー・ウェルシュの方法と丹後・小西 (2010) で紹介されている REGW 法は正規分布論の閉検定手順としてよく使われる。これら 2 つの方法に沿って
Jpn J Biomet Vol.32, No.1, 2011

た手法を紹介する. このために, $I (I \subset \{1, \dots, k\})$ に含まれる添え字をもつ母平均は等しいという帰無仮説を $H(I)$ で表し, $\iota \equiv \#(I)$ とおく. さらに, $k \geq 4$ とし,

$$\alpha^*(\iota) \equiv \begin{cases} 1 - (1 - \alpha)^{\iota/k} & (2 \leq \iota \leq k-2) \\ \alpha & (\iota = k-1, k) \end{cases} \quad (20)$$

によって $\alpha^*(\iota)$ を定義する.

(II) テューキー・ウェルシュの方法

$$c_\iota \equiv \begin{cases} \max\{ta(\iota, m; \alpha^*(\iota)), c_{\iota-1}\} & (3 \leq \iota \leq k) \\ ta(2, m; \alpha^*(2)) & (\iota = 2) \end{cases}$$

とき, $c_\iota < T(I)$ ならば帰無仮説 $H(I)$ を棄却する. この方法で $i, i' \in I$ を満たすすべての I に対して $H(I)$ が棄却されるとき, 多重比較検定として, $H_{(i, i')}$ を棄却する. $\square$

(III) REGW 法

$ta(\iota, m; \alpha^*(\iota)) < T(I)$ ならば帰無仮説 $H(I)$ を棄却する. この方法で $i, i' \in I$ を満たすすべての I に対して $H(I)$ が棄却されるとき, 多重比較検定として, $H_{(i, i')}$ を棄却する. $\square$

帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ に対する (II), (III) の検定方式の有意水準が α であることを, 補題 1 を使って (19) と同様の方法によって示せる.

閉検定手順 (I) から (III) において, $T(I_j)$, $T(I)$ のかわりにそれぞれ

$$T_S(I_j) = \sum_{i \in I_j} n_i (\bar{X}_i - \bar{X}_{I_j})^2 / V_E,$$

$$T_S(I) = \sum_{i \in I} n_i (\bar{X}_i - \bar{X}_I)^2 / V_E$$

を使っても閉検定手順が行える. ただし,

$$\bar{X}_I \equiv \sum_{i \in I} n_i \bar{X}_i / \sum_{i \in I} n_i$$

とする. この場合, (I) の検出力の高い閉検定手順においては, $ta(\ell_j, m; \alpha(M, \ell_j)) < T(I_j)$, $ta(M, m; \alpha) < T(I_1)$ をそれぞれ $F_m^{\ell_j-1}(\alpha(M, \ell_j)) < T_S(I_j)$, $F_m^{M-1}(\alpha) < T_S(I_1)$ に置き換えればよい. ただし, 自由度 (m_1, m_2) の F 分布の上側 $100\alpha\%$ 点を $F_{m_2}^{m_1}(\alpha)$ とする. また, (II) のテューキー・ウェルシュの方法と (III) の REGW 法においては, $ta(\iota, m; \alpha^*(\iota))$ を $F_m^{\iota-1}(\alpha^*(\iota))$ に置き換えればよい.

$\ell_j = \iota = \ell$ のとき

$$1 - (1 - \alpha)^{\ell/M} \geq 1 - (1 - \alpha)^{\ell/k}$$

の関係により, (I) の閉検定手順の帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ に関する棄却域が (II) と (III) の棄却域を含むことになり, (I) の閉検定手順が, テューキー・ウェルシュの方法や REGW 法よりも一様に検出力が高いこととなる.

5.2 ノンパラメトリック手順

$\widehat{Z}(I_j) \equiv \max_{i < i', i, i' \in I_j} |\widehat{Z}_{ii'}|$ ($j = 1, \dots, J$) とおき, 水準 α の帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ に対する漸近的な検定方法を具体的にいくつか論述することができる.

(IV) 検出力の高い閉検定手順

M, ℓ_j ($j = 1, \dots, J$) を (13) で定義したものとする. (9) の表記の方法より, (18) の $A(t|\ell)$ に対して, $A(t|\ell) = 1 - \alpha$ を満たす t の解は, $a(\ell; \alpha)$ である.

(A) $J \geq 2$ のとき, $\ell = \ell_1, \dots, \ell_J$ に対して, $\alpha(M, \ell)$ を (14) で定義したものとする. $1 \leq j \leq J$ となるある整数 j が存在して $a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)) < \widehat{Z}(I_j)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ を棄却する.

(B) $J = 1$ ($M = \ell_1$) のとき, $a(M; \alpha) < \widehat{Z}(I_1)$ ならば帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ を棄却する.

(A), (B) の方法で, $(i, i') \in V$ を満たすすべての V に対して, $\bigwedge_{v \in V} H_v$ が棄却されるとき, 多重比較検定として, $H_{(i, i')}$ を棄却する. $\square$

(B) の検定の有意水準が漸近的に α であることは自明であるので, (A) の検定の有意水準は漸近的に α であることを示す.

定理 2 (条件 1) の下で, (A) の検定の有意水準は漸近的に α である.

証明 $\widehat{Z}(I_1), \dots, \widehat{Z}(I_J)$ は互いに独立より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(\widehat{Z}(I_j) \leq a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \dots, J) = \prod_{j=1}^J \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(\widehat{Z}(I_j) \leq a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j))) \right\} \quad (21)$$

を得る. (10) の左側の不等式を使って,

$$\begin{aligned} (21) &\geq \prod_{j=1}^J A(a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)) | \ell_j) \\ &= \prod_{j=1}^J (1 - \alpha(M, \ell_j)) \\ &= \prod_{j=1}^J \{(1 - \alpha)^{\ell_j/M}\} \\ &= 1 - \alpha \end{aligned} \quad (22)$$

を得る. (22) を使って,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(\text{ある } j \text{ が存在して, } \widehat{Z}(I_j) > a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j))) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P_0(\widehat{Z}(I_j) \leq a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)), j = 1, \dots, J) \\ &\leq \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, (A) の検定は, 有意水準 α である. $\square$

定理 2 より, (IV) は水準 α の漸近的な多重比較検定である.

テューキー・ウェルシュの方法と REGW 法は正規分布論の閉検定手順である. これら 2 つの

方法に沿った順位手法を紹介する. このために, $I (I \subset \{1, \dots, k\})$ に含まれる添え字をもつ母平均は等しいという帰無仮説を $H(I)$ で表し, $i \equiv \#(I)$ とおく. さらに, $k \geq 4$ とし, (20) によって $\alpha^*(i)$ を定義する.

(V) テューキー・ウェルシュの順位手法

$$c_i \equiv \begin{cases} \max\{a(i; \alpha^*(i)), c_{i-1}\} & (3 \leq i \leq k) \\ a(2; \alpha^*(2)) & (i = 2) \end{cases}$$

とおき, $c_i < \hat{Z}(I)$ ならば帰無仮説 $H(I)$ を棄却する. この方法で $i, i' \in I$ を満たすすべての I に対して $H(I)$ が棄却されるとき, 漸近的な多重比較検定として, $H_{(i, i')}$ を棄却する. $\square$

(VI) REGW 順位手法

$a(i; \alpha^*(i)) < \hat{Z}(I)$ ならば帰無仮説 $H(I)$ を棄却する. この方法で $i, i' \in I$ を満たすすべての I に対して $H(I)$ が棄却されるとき, 漸近的な多重比較検定として, $H_{(i, i')}$ を棄却する. $\square$

$\{X_{ij} \mid j = 1, \dots, n_i, i \in I\}$ の中での $X_{ij'}$ の順位を $R_{ij'}(I)$ とする. 閉検定手順 (IV) から (VI) において, $\hat{Z}(I_j)$, $\hat{Z}(I)$ のかわりにそれぞれ

$$Z_R(I_j) \equiv \frac{12}{n(I_j)\{n(I_j) + 1\}} \sum_{i \in I_j} n_i \left(\bar{R}_{i \cdot}(I_j) - \frac{n(I_j) + 1}{2} \right)^2,$$

$$Z_R(I) \equiv \frac{12}{n(I)\{n(I) + 1\}} \sum_{i \in I} n_i \left(\bar{R}_{i \cdot}(I) - \frac{n(I) + 1}{2} \right)^2$$

を使っても閉検定手順が行える. ただし,

$$n(I) \equiv \sum_{i \in I} n_i, \quad \bar{R}_{i \cdot}(I) \equiv \frac{1}{n_i} \sum_{j'=1}^{n_i} R_{ij'}(I)$$

とする. この場合, (IV) の検出力の高い閉検定手順においては, $a(\ell_j; \alpha(M, \ell_j)) < \hat{Z}(I_j)$, $a(M; \alpha) < \hat{Z}(I_1)$ をそれぞれ $\chi_{\ell_j-1}^2(\alpha(M, \ell_j)) < Z_R(I_j)$, $\chi_{M-1}^2(\alpha) < Z_R(I_1)$ に置き換えればよい. ただし, 自由度 ℓ の χ^2 分布の上側 100 $\alpha\%$ 点を $\chi_\ell^2(\alpha)$ とする. また, (V) のテューキー・ウェルシュの方法と (VI) の REGW 法においては, $a(i; \alpha^*(i))$ を $\chi_{i-1}^2(\alpha^*(i))$ に置き換えればよい.

5.1 節で述べた正規理論の場合と同様に, (IV) の閉検定手順の帰無仮説 $\bigwedge_{v \in V} H_v$ に関する棄却域が (V) と (VI) の棄却域を含むことになり, (IV) の閉検定手順が, テューキー・ウェルシュの順位手法や REGW 順位手法よりも一様に検出力が高いこととなる.

6. 解析例

サルコイドーシスは原因不明の肉芽種病である. SACE (serum angiotensin-converting enzyme: 血清アンジオテンシン変換酵素) 分析評価法は活性類肉腫症の診断に有効であると言われている. この統計解析の目的は SACE 値が肉芽種症に関する症状で分類された群 {第 1 群: 病状が重いもしくは進んでいる人, 第 2 群: 病状が安定している人, 第 3 群: 病状が回復した人, 第 4 群: 病気にかかったことのない人} において差異があるかを判定することである. データは, Daniel (1987) の 336 ページに掲載されている等しい群サイズ 400 から, ランダムに, それぞれ, 15, 15, 20, 22

個採ったものを白石 (2008) の表 9 にまとめている.

以下, 計算機を使用し, 群サイズが

$$n_1 = 15, n_2 = 15, n_3 = 20, n_4 = 22$$

である白石 (2008) の表 9 のデータを解析する.

杉山等 (2007) の第 3 章の項目「分布探索による推測法の選択方式」で紹介されている分布探索方式を使うと, データが最も近い分布は, 白石 (2003) 第 5 章に載せられている小さな異常値をもつ混合分布となった. これにより, 順位に基づくノンパラメトリック法を使って解析する. 杉山等 (2007) の第 3 章で紹介されている順位点推定値は,

$$\text{相対処理効果: } \hat{\tau}_1 = 65.032, \hat{\tau}_2 = 4.486, \hat{\tau}_3 = -32.419, \hat{\tau}_4 = -17.927, \text{ 全平均: } \bar{\nu} = 110.2,$$

$$4 \text{ 群の平均: } \hat{\mu}_1 = 175.2, \hat{\mu}_2 = 114.7, \hat{\mu}_3 = 77.8, \hat{\mu}_4 = 92.3$$

となった. 統計量 $\hat{Z}_{ii'}$ の値として

$$\hat{Z}_{12} = 4.666, \hat{Z}_{13} = 5.000, \hat{Z}_{14} = 5.104, \hat{Z}_{23} = 4.833, \hat{Z}_{24} = 4.021, \hat{Z}_{34} = -2.972$$

を得た. 第 4 節で紹介した水準 0.01 の漸近的なシングルステップ多重比較順位検定を使うと,

$$a(4; 0.01) = 3.113 < |\hat{Z}_{12}|, |\hat{Z}_{13}|, |\hat{Z}_{14}|, |\hat{Z}_{23}|, |\hat{Z}_{24}|, \quad a(4; 0.01) > |\hat{Z}_{34}|$$

となり, 帰無仮説 $H_{(3,4)} = H(\{3, 4\})$ だけが棄却されない. このため, (IV) のノンパラメトリック閉検定手順を使って水準 $\alpha = 0.01$ で解析する. 表 2 と表 3 を使って,

- (i) $a(4; \alpha(4, 4)) = 3.113 < 5.104 = \hat{Z}(\{1, 2, 3, 4\})$ より, $M = \ell_1 = 4$ の $H(\{1, 2, 3, 4\})$ は棄却される.
- (ii) $a(2; \alpha(4, 2)) = 2.806 < 4.666 = |\hat{Z}_{12}| = \hat{Z}(\{1, 2\})$ より, $M = 4, \ell_1 = \ell_2 = 2$ の $H(\{1, 2\}, \{3, 4\})$ は棄却される. 同様に, $H(\{1, 3\}, \{2, 4\}), H(\{1, 4\}, \{2, 3\})$ もすべて棄却される.

表 2. $k = 4$ のとき, ステップワイズ法で検定される帰無仮説 $H(I_1, \dots, I_J)$

M の値	$H(I_1, \dots, I_J)$		
4	$H(\{1, 2, 3, 4\}),$ $H(\{1, 4\}, \{2, 3\})$	$H(\{1, 2\}, \{3, 4\}),$	$H(\{1, 3\}, \{2, 4\}),$
3	$H(\{1, 2, 3\}),$	$H(\{1, 2, 4\}),$	$H(\{2, 3, 4\})$
2	$H(\{1, 2\})$ $H(\{2, 3\})$	$H(\{1, 3\})$ $H(\{2, 4\})$	$H(\{1, 4\})$ $H(\{3, 4\})$

表 3. $\alpha = 0.01$ のときの $a(\ell; \alpha(M, \ell))$ の値

$M \setminus \ell$	2	3	4
4	2.806	3.004	3.113
3	2.712	2.913	
2	2.576		

- (iii) $a(3; \alpha(3, 3)) = 2.913 < 5.000 = \widehat{Z}(\{1, 2, 3\})$ より, $H(\{1, 2, 3\})$ は棄却される. 同様に, $H(\{1, 2, 4\})$, $H(\{2, 3, 4\})$ もすべて棄却される.
- (iv) $a(2; \alpha(2, 2)) = 2.576 < 4.666 = \widehat{Z}(\{1, 2\})$ より, $H(\{1, 2\})$ は棄却される. 同様に, $H(\{1, 3\})$, $H(\{1, 4\})$, $H(\{2, 3\})$, $H(\{2, 4\})$, $H(\{3, 4\})$ もすべて棄却される.

上記の (i)-(iv) より, 表 2 のすべての帰無仮説が棄却され, 水準 $\alpha = 0.01$ の (IV) のノンパラメトリック閉検定手順により, $1 \leq i < i' \leq 4$ となるすべての (i, i') に対して $\mu_i \neq \mu_{i'}$ と結論できる.

7. おしまいに

分散の等しい多群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較検定法は, 正規分布の下で, Tukey (1953) と Kramer (1956) によって提案され, 現在ではテューキー・クレマー (Tukey-Kramer) 法とよばれている. このテューキー・クレマー法の検定統計量の分布は (6) 式のように下から抑える分布 $TA(t)$ と上から抑える分布 $TB(t)$ によって挟まれる. (6) の右側の不等号は等号と書かれた文献があったが, 白石 (2006) が不等号が正しいことを証明した. 現在も等号が正しいように書かれている本が存在する. テューキー・クレマー法は保守的な手法になっているが, (6) の両方の不等式と 2 重積分の精度保証された数値計算によって, 保守度が小さいことを白石 (2006) が示した. 順位に基づく分布に依らない多重比較検定法についても, 漸近的に (6) と同様の不等式 (10) が成り立ち, 順位による漸近的な多重比較検定法の保守度が小さいことを, Shiraishi (2007) と白石 (2008) は示した. また, 全体順位を使う Dunn (1964) の検定法が多くの和書に書かれてきたが, Dunn (1964) の検定法が多重比較検定になっていないことを, Oude Voshaar (1980) と Hsu (1996) が指摘している. ノンパラメトリック多重比較では, 全体順位ではなく 2 群間の中での順位を使う方法が正しい. この論文では, それらのシングルステップ法を基にした閉検定手順について, 正規母集団での手順とノンパラメトリック手順を新たに提案し, Kimball (1951) の定理を拡張した補題 1 を使って, 多重比較検定になっていることを証明した. さらに, 提案した閉検定手順は, テューキー・ウェルシュの方法や REGW 法よりも一様に検出力が高いことを示した.

謝 辞

本論文の修正にあたり, 貴重なご指摘と有益なご助言をいただいた 2 人の査読者に変感謝致します. 本研究は, 日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (C) (課題番号 20540126) 及び 2010 年度南山大学パッヘ研究奨励金 I-A-2 の援助を受けたものである.

参考文献

- Daniel, W. W. (1987). *Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences. Fifth Edition.* Wiley and Sons.
- Dunn, O. J. (1964). Multiple comparisons using rank sums. *Technometrics* **6**. 241–252.
- Hayter, A. J. (1984). A proof of the conjecture that the Tukey-Kramer multiple comparisons procedure is conservative. *Annals of Statistics* **12**. 61–75.

- Hochberg, Y. and Tamhane, A. C. (1987). *Multiple Comparisons Procedures*. Wiley and Sons.
- Hsu, J. C. (1996). *Multiple Comparisons-Theory and Methods*. Chapman and Hall.
- Kimball, A. W. (1951). On dependent tests of significance in the analysis of variance. *Annals of Mathematical Statistics* **22**. 600–602.
- Kramer, C. Y. (1956). Extension of multiple range tests to group means with unequal numbers of replications. *Biometrics* **8**. 75–86.
- 中内伸光 (2002). 数学の基礎体力をつけるためのろんりの練習帳. 共立出版.
- 永田 靖, 吉田道弘 (1997). 統計的多重比較法の基礎. サイエンティスト社.
- Oude Voshaar, J. H. (1980). (k-1)-mean significance levels of nonparametric multiple comparisons procedures. *Ann of Statistics* **8**. 75–86.
- 白石高章 (2003). 統計科学—パラメトリック, ノンパラメトリック, セミパラメトリックの基礎から, Esoft, Excel によるデータ解析まで. 日本評論社.
- 白石高章 (2006). Tukey-Kramer 法に関連した分布の上界. 計算機統計学会 和文誌 **19**. 77–87.
- 白石高章 (2008). 多群モデルにおけるウィルコクソンの順位和に基づくノンパラメトリック同時信頼区間. 応用統計学 **37**. 125–150.
- Shiraishi, T. (2007). Multiple comparisons based on R-estimators in the one-way layout. *Journal of the Japan Statistical Society* **37**, 157–174.
- 杉山高一, 藤越康祝, 杉浦成昭, 国友直人 編集 (2007). 統計データ科学事典. 朝倉書店.
- 丹後俊郎, 小西貞則 編集 (2010). 医学統計学の事典. 朝倉書店.
- Tukey, J. W. (1953). The Problem of Multiple Comparisons. *The Collected Works of John W. Tukey, J. W. (1994), Volume VIII. Multiple Comparisons*. Chapman and Hall.