シェッフェの一対比較法の改良 (3) —データの分解と誤差の検討—

長沢 伸也 (亜細亜大学経営学部)

Improvement of Modified Scheffé's Method for Paired Comparisons (3)
—Decomposition of Data and Diagnostics of Error—
Shin'ya Nagasawa (Asia Univ., Fac. of Bus. Admin.)

Schefféの一対比較法 (各変法を含む) は、評点のデータに構造式を仮定して各要因効果を推定し分散分析を行う代表的な統計的官能検査手法である。しかし、一般にこの手法では、データを分解し誤差を求めて検討が行われることがない。そこで本報では、構造式に基づきデータを分解し誤差を求め、データや構造式の妥当性を評価する方法を提案する。

Schefféの原法では、構造式 (1) が仮定されるので、表 1 のデータに対する観測ベクトル x を式 (2)、計画行列 A を式 (3) で表すと、未知母数 θ の最小 2 乗解は $A^T A \theta = A^T x$ より式 (4) となり、各要因の平方和は表 2 になる。

浦変法では、構造式 (5) が仮定されるので、同様に母数を推定し式 (5) に基づき表 3 (a) のデータを分解すると同 (b) - (g) のようになる。Scheffé法では $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ が仮定されているので ε の分布形や外れ値の有無によりデータや構造式の妥当性を評価することができる。

なお本研究は平成 4 年度文部省科学研究費奨励研究 (No.04730056) の補助を受けている。

$$x_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j) + \gamma_{ij} + \delta + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$x^T = [x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{21} \ x_{23} \ x_{24} \ x_{31} \ x_{32} \ x_{34} \ x_{41} \ x_{42} \ x_{43}] \quad (2)$$

$$A = [A_1, A_2, A_3]$$

表 1 Schefféの一対比較法によるデータ

$i \setminus j$	1	2	3	4	計
1		x_{12}	x_{13}	x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	x_{21}		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3	x_{31}	x_{32}		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}		$x_{4\cdot}$
計	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$x_{\cdot 3}$	$x_{\cdot 4}$	$x_{\cdot \cdot}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{14} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{24} \\ \gamma_{34} \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{1\cdot} - x_{\cdot 1})/8 \\ (x_{2\cdot} - x_{\cdot 2})/8 \\ (x_{3\cdot} - x_{\cdot 3})/8 \\ (x_{4\cdot} - x_{\cdot 4})/8 \\ (x_{12} - x_{21})/2 - (\alpha_1 - \alpha_2) \\ (x_{13} - x_{31})/2 - (\alpha_1 - \alpha_3) \\ (x_{14} - x_{41})/2 - (\alpha_1 - \alpha_4) \\ (x_{23} - x_{32})/2 - (\alpha_2 - \alpha_3) \\ (x_{24} - x_{42})/2 - (\alpha_2 - \alpha_4) \\ (x_{34} - x_{43})/2 - (\alpha_3 - \alpha_4) \\ x_{\cdot \cdot}/12 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$x_{ijk} = (\alpha_i - \alpha_j) + (\alpha_{ik} - \alpha_{jk}) + \gamma_{ij} + (\delta + \delta_k) + \varepsilon_{ijk} \quad (5)$$

表 2 構造式 (1) による各要因の平方和

$$\begin{aligned} S\alpha &= x^T A_1 \hat{\theta}_1 = \Sigma (x_{i\cdot} - x_{\cdot i})^2 / 8 \\ S\gamma &= x^T [A_1, A_2] \hat{\theta}_{12} - x^T A_1 \hat{\theta}_1 \\ &= \Sigma \Sigma (x_{ij} - x_{ji})^2 / 2 - S\alpha \\ S\delta &= x^T A \hat{\theta} - x^T [A_1, A_2] \hat{\theta}_{12} = x_{\cdot \cdot}^2 / 12 \\ S\varepsilon &= x^T x - x^T A \hat{\theta} = S_T - S\alpha - S\gamma - S\delta \\ S_T &= x^T x = \Sigma \Sigma x_{ij}^2 \end{aligned}$$

表3 「浦の変法」によるデータ(評価者3人)

(a) データ x_{ijk}

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		0 0 1	-1 -2 -1	-1 -2 -1
2	3 0 1		0 -2 0	0 -2 -2
3	3 2 2	1 1 1		-1 -1 -1
4	3 3 2	3 3 1	1 1 0	

(b) 主効果の比 $\omega_i - \omega_j$

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		-0.58 -0.58 -0.58	-1.62 -1.62 -1.62	-2.29 -2.29 -2.29
2	0.58 0.58 0.58		-1.04 -1.04 -1.04	-1.71 -1.71 -1.71
3	1.62 1.62 1.62	1.04 1.04 1.04		-0.67 -0.67 -0.67
4	2.29 2.29 2.29	1.71 1.71 1.71	0.67 0.67 0.67	

(c) 組合せ効果 γ_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		0.08 0.08 0.08	-0.38 -0.38 -0.38	0.29 0.29 0.29
2	-0.08 -0.08 -0.08		0.21 0.21 0.21	-0.12 -0.12 -0.12
3	0.38 0.38 0.38	-0.21 -0.21 -0.21		-0.17 -0.17 -0.17
4	-0.29 -0.29 -0.29	0.12 0.12 0.12	0.17 0.17 0.17	

(d) 順序効果 δ

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		0.44 0.44 0.44	0.44 0.44 0.44	0.44 0.44 0.44
2	0.44 0.44 0.44		0.44 0.44 0.44	0.44 0.44 0.44
3	0.44 0.44 0.44	0.44 0.44 0.44		0.44 0.44 0.44
4	0.44 0.44 0.44	0.44 0.44 0.44	0.44 0.44 0.44	

(e) 主効果×個人 $\omega_{ik} - \omega_{jk}$

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		-0.67 0.33 0.33	-0.12 -0.38 0.50	-0.21 -0.46 0.67
2	0.67 -0.33 -0.33		0.54 -0.71 0.17	0.46 -0.79 0.33
3	0.12 0.38 -0.50	-0.54 0.71 -0.17		-0.08 -0.08 0.17
4	0.21 0.46 -0.67	-0.46 0.79 -0.33	0.08 0.08 -0.17	

(f) 順序×個人 δ_k

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		0.47 -0.28 -0.19	0.47 -0.28 -0.19	0.47 -0.28 -0.19
2	0.47 -0.28 -0.19		0.47 -0.28 -0.19	0.47 -0.28 -0.19
3	0.47 -0.28 -0.19	0.47 -0.28 -0.19		0.47 -0.28 -0.19
4	0.47 -0.28 -0.19	0.47 -0.28 -0.19	0.47 -0.28 -0.19	

(g) 誤差 ε_{ijk}

$i \setminus j$	1	2	3	4
1		0.25 0.00 0.92	0.21 0.21 0.25	0.29 0.29 0.08
2	0.92 -0.33 0.58		-0.62 -0.62 0.42	0.46 0.46 -0.75
3	-0.04 0.46 0.25	-0.21 -0.71 0.08		-1.00 -0.25 -0.58
4	-0.12 0.38 0.42	0.71 0.21 -0.75	-0.83 -0.08 -0.92	

表4 表3 (a)のデータからの分散分析表

要因	平方和	自由度	分散	F
主 効 果	76.083	3	25.361	55.10
主効果×個人	7.167	6	1.194	2.60
組合せ効果	1.917	3	0.639	1.39
順 序 効 果	7.111	1	7.111	15.45
順序×個人	4.056	2	2.028	4.41
誤 差	9.666	21	0.460	
計	106.000	36		

註) $F(1, 21; 0.05) = 4.32$, $F(2, 21, 0.05) = 3.47$
 $F(3, 21; 0.05) = 3.07$, $F(6, 21; 0.05) = 2.57$