シェッフェの一对比較法の改良 (5) - 不完全一对比較の影響 -

長 沢 伸 也 (立命館大学経営学部)

Improvement of Modified Scheffé's Method for Paired Comparisons (5)

- Effects of Incomplete Paired Comparisons -

Shin'ya Nagasawa (Fac. of Bus. Admin., Ritsumeikan Univ.)

1. 緒 言

Schefféの一对比較法 (各変法を含む) は、代表的な統計的官能検査手法である。しかし、この手法では、全ての組合せの一对比較が行われる必要があり、一对比較が不完全で欠測が生じた場合の解析方法は示されていない。このため前報^{1), 2)}では、Scheffé法における不完全一对比較データの解析方法を示した。本報では、不完全一对比較の影響を検討する。

2. 順序比較の場合 (Schefféの原法)

(a) 完全一对比較データの場合

Schefféの原法では次の構造式が仮定される。

$$x_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j) + \gamma_{ij} + \delta + \varepsilon_{ij}$$

したがって、未知母数 $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}, \gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{34}, \delta)^T$ の最小

二乗解は正規方程式より以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_i = (x_{i..} - x_{..i})/8$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = (x_{ij.} - x_{ji.})/2 - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

$$\hat{\delta} = x_{...}/12$$

(b) x_{13}, x_{31} が欠測の場合

同様に、未知母数は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_1 = (3x_{1.} - 3x_{.1} - x_{3.} + x_{.3})/16$$

$$\hat{\alpha}_2 = (x_{2.} - x_{.2})/8$$

$$\hat{\alpha}_3 = (3x_{3.} - 3x_{.3} - x_{1.} + x_{.1})/16$$

$$\hat{\alpha}_4 = (x_{4.} - x_{.4})/8$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = (x_{ij.} - x_{ji.})/2 - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

$$\hat{\delta} = x_{...}/10$$

(c) $x_{13}, x_{14}, x_{31}, x_{41}$ が欠測の場合

同様に、未知母数は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_1 = (4x_{12} - 4x_{21} + x_{2.} - x_{.2})/8$$

表 1 一对比較データ (順序比較の場合)

(a) 完全一对比較データ

i \ j	1	2	3	4	計
1		x_{12}	x_{13}	x_{14}	$x_{1.}$
2	x_{21}		x_{23}	x_{24}	$x_{2.}$
3	x_{31}	x_{32}		x_{34}	$x_{3.}$
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}		$x_{4.}$
計	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$	$x_{.4}$	$x_{..}$

(b) 不完全一对比較データ (x_{13} が欠測)

i \ j	1	2	3	4	計
1		x_{12}		x_{14}	$x_{1.}$
2	x_{21}		x_{23}	x_{24}	$x_{2.}$
3		x_{32}		x_{34}	$x_{3.}$
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}		$x_{4.}$
計	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$	$x_{.4}$	$x_{..}$

(c) 不完全一对比較データ (x_{13}, x_{14} が欠測)

i \ j	1	2	3	4	計
1		x_{12}			x_{12}
2	x_{21}		x_{23}	x_{24}	$x_{2.}$
3		x_{32}		x_{34}	$x_{3.}$
4		x_{42}	x_{43}		$x_{4.}$
計	x_{21}	$x_{.2}$	$x_{.3}$	$x_{.4}$	$x_{..}$

(d) 不完全一对比較データ (x_{13}, x_{24} が欠測)

i \ j	1	2	3	4	計
1		x_{12}		x_{14}	$x_{1.}$
2	x_{21}		x_{23}		$x_{2.}$
3		x_{32}		x_{34}	$x_{3.}$
4	x_{41}		x_{43}		$x_{4.}$
計	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$	$x_{.4}$	$x_{..}$

$$\hat{\alpha}_2 = (x_{2\cdot} - x_{\cdot 2})/8$$

$$\hat{\alpha}_3 = (4x_{3\cdot} - 4x_{\cdot 3} - 4x_{12} + 4x_{21} - x_{2\cdot} + x_{\cdot 2})/24$$

$$\hat{\alpha}_4 = (4x_{4\cdot} - 4x_{\cdot 4} - 4x_{12} + 4x_{21} - x_{2\cdot} + x_{\cdot 2})/24$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = (x_{ij} - x_{ji})/2 - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

$$\text{ただし、}\hat{\gamma}_{12}=0$$

$$\hat{\delta} = x_{\cdot\cdot}/8$$

(d) $x_{13}, x_{24}, x_{31}, x_{42}$ が欠測の場合

同様に、未知母数は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_1 = (3x_{1\cdot} - 3x_{\cdot 1} - x_{3\cdot} + x_{\cdot 3})/16$$

$$\hat{\alpha}_2 = (3x_{2\cdot} - 3x_{\cdot 2} - x_{4\cdot} + x_{\cdot 4})/16$$

$$\hat{\alpha}_3 = (3x_{3\cdot} - 3x_{\cdot 3} - x_{1\cdot} + x_{\cdot 1})/16$$

$$\hat{\alpha}_4 = (3x_{4\cdot} - 3x_{\cdot 4} - x_{2\cdot} + x_{\cdot 2})/16$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = (x_{ij} - x_{ji})/2 - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

$$\hat{\delta} = x_{\cdot\cdot}/8$$

3. 往復比較の場合（芳賀の変法）

(a) 完全一対比較データの場合

芳賀の変法では次の構造式が仮定される。

$$x_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j) + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

未知母数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14},$

$\gamma_{23}, \gamma_{24}, \gamma_{34}, \delta$ は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_i = (x_{i\cdot} - x_{\cdot i})/4$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = x_{ij} - x_{ji} - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

(b) x_{13} が欠測の場合

同様に、未知母数は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_1 = (3x_{1\cdot} - x_{3\cdot})/8$$

$$\hat{\alpha}_2 = x_{2\cdot}/4$$

$$\hat{\alpha}_3 = (3x_{3\cdot} - x_{1\cdot})/8$$

表2 一対比較データ（往復比較の場合）

(a) 完全一対比較データ

$i \setminus j$	1	2	3	4	計
1		x_{12}	x_{13}	x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	$-x_{21}$		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3	$-x_{31}$	$-x_{32}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	$-x_{41}$	$-x_{42}$	$-x_{43}$		$x_{4\cdot}$

(c) 不完全一対比較データ（ x_{13}, x_{14} が欠測）

$i \setminus j$	1	2	3	4	計
1		x_{12}			x_{12}
2	$-x_{21}$		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3		$-x_{32}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4		$-x_{42}$	$-x_{43}$		$x_{4\cdot}$

$$\hat{\alpha}_4 = x_{4\cdot}/4$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = x_{ij} - x_{ji} - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

(c) x_{13}, x_{14} が欠測の場合

同様に、未知母数は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_1 = (4x_{12} + x_{2\cdot})/4$$

$$\hat{\alpha}_2 = x_{2\cdot}/4$$

$$\hat{\alpha}_3 = (4x_{3\cdot} - 4x_{12} - x_{2\cdot})/12$$

$$\hat{\alpha}_4 = (4x_{4\cdot} - 4x_{12} - x_{2\cdot})/12$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = x_{ij} - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

$$\text{ただし、}\gamma_{12}=0$$

(d) x_{13}, x_{24} が欠測の場合

同様に、未知母数は以下のように求まる。

$$\hat{\alpha}_1 = (3x_{1\cdot} - x_{3\cdot})/8$$

$$\hat{\alpha}_2 = (3x_{2\cdot} - x_{4\cdot})/8$$

$$\hat{\alpha}_3 = (3x_{3\cdot} - x_{1\cdot})/8$$

$$\hat{\alpha}_4 = (3x_{4\cdot} - x_{2\cdot})/8$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = x_{ij} - (\hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}_j)$$

4. 結 言

以上、Schefféの一対比較法において一対比較が不完全で欠測が生じた場合の影響を検討した。欠測の対が複数の場合には各行各列で欠測が重ならない方が好ましいことがわかる。浦の変法や中屋の変法も同様に解析できる。なお本研究は平成6年度文部省科学研究費重点領域研究(No.06212223)の補助を受けている。

1)長沢伸也：人間工学、第29巻特別号(1993)

2)長沢伸也：人間工学、第30巻特別号(1994)

(b) 不完全一対比較データ（ x_{13} が欠測）

$i \setminus j$	1	2	3	4	計
1		x_{12}		x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	$-x_{21}$		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3		$-x_{32}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	$-x_{41}$	$-x_{42}$	$-x_{43}$		$x_{4\cdot}$

(d) 不完全一対比較データ（ x_{13}, x_{24} が欠測）

$i \setminus j$	1	2	3	4	計
1		x_{12}		x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	$-x_{21}$		x_{23}		$x_{2\cdot}$
3		$-x_{32}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	$-x_{41}$		$-x_{43}$		$x_{4\cdot}$