2-D-6-4 サイクリック一対比較法の提案 (6)
- 完全一対比較との関係 -

長 沢 伸 也 (立命館大学経営学部)

Proposal of "Cyclic Paired Comparisons" (6)

- Relation to Complete Paired Comparisons -

Shin'ya Nagasawa (Fac. of Bus. Admin., Ritsumeikan Univ.)

1. 緒 言

Schefféの一対比較法は、代表的な統計的官能検査手法であるが、試料が多くなると実験の実施が困難になる。そこで本研究^{1), 2)}では、試料数と同数回の一対比較を行うだけで全試料の序列付けと分散分析ができる「サイクリック一対比較法」を提案している。本報では完全一対比較との関係について検討する。

2. サイクリック一対比較法の解析方法

表1のように一対比較を行った場合を考える。前報³⁾と同様、構造式(1)を仮定する。

$$x_{ijk} = (\alpha_i - \alpha_j) + (\alpha_{ik} - \alpha_{jk}) + (\delta + \delta_k) + \varepsilon_{ijk} \quad (1)$$

表1のデータを線形模型で表し $x = A\theta + e$ とおく。ただし、 x は観測ベクトル、 A は計画行列、 θ は未知母数、 e は誤差項を表す。

表1 「サイクリック一対比較法」によるデータ

(a) サイクル系列C₁のデータ

i \ j	1	2	3	4	5
1		X ₁₂₁			
2			X ₂₃₁		
3				X ₃₄₁	
4					X ₄₅₁
5	X ₅₁₁				

(b) サイクル系列C₂のデータ

i \ j	1	2	3	4	5
1			X ₁₃₂		
2				X ₂₄₂	
3					X ₃₅₂
4	X ₄₁₂				
5		X ₅₂₂			

(c) サイクル系列C₃のデータ

i \ j	1	2	3	4	5
1				X ₁₄₃	
2					X ₂₅₃
3	X ₃₁₃				
4		X ₄₂₃			
5			X ₅₃₃		

(d) サイクル系列C₄のデータ

i \ j	1	2	3	4	5
1					X ₁₅₄
2	X ₂₁₄				
3		X ₃₂₄			
4			X ₄₃₄		
5				X ₅₄₄	

(e) サイクル系列の合計

i \ j	1	2	3	4	5	計
1		X ₁₂₁	X ₁₃₂	X ₁₄₃	X ₁₅₄	X _{1..}
2	X ₂₁₄		X ₂₃₁	X ₂₄₂	X ₂₅₃	X _{2..}
3	X ₃₁₃	X ₃₂₄		X ₃₄₁	X ₃₅₂	X _{3..}
4	X ₄₁₂	X ₄₂₃	X ₄₃₄		X ₄₅₁	X _{4..}
5	X ₅₁₁	X ₅₂₂	X ₅₃₃	X ₅₄₃		X _{5..}
計	X _{..1}	X _{..2}	X _{..3}	X _{..4}	X _{..5}	X _{...}}

$$\mathbf{x} = [x_{121} \ x_{231} \ x_{341} \ x_{451} \ x_{511} \ \cdots \ x_{153} \ x_{213} \ x_{323} \ x_{433} \ x_{543}]^T \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\theta = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_{11} \ \alpha_{12} \ \alpha_{13} \ \alpha_{14} \ \alpha_{21} \ \alpha_{22} \ \alpha_{23} \ \alpha_{24} \ \alpha_{31} \ \alpha_{32} \ \alpha_{33} \ \alpha_{34} \ \alpha_{41} \ \alpha_{42} \ \alpha_{43} \ \alpha_{44} \ \alpha_{51} \ \alpha_{52} \ \alpha_{53} \ \alpha_{54} \ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_{121} \ \varepsilon_{231} \ \varepsilon_{341} \ \varepsilon_{451} \ \varepsilon_{511} \ \cdots \ \varepsilon_{153} \ \varepsilon_{213} \ \varepsilon_{323} \ \varepsilon_{433} \ \varepsilon_{543}]^T \quad (5)$$

このとき θ の最小二乗解は以下のようになる。

$$\alpha_1 = (x_{1\cdots} - x_{\cdots 1})/10 + (x_{231} - x_{451} + x_{352} - x_{242} + x_{423} - x_{533} + x_{544} - x_{324})/20$$

$$\alpha_2 = (x_{2\cdots} - x_{\cdots 2})/10 + (x_{341} - x_{511} + x_{412} - x_{352} + x_{533} - x_{143} + x_{154} - x_{434})/20$$

$$\alpha_3 = (x_{3\cdots} - x_{\cdots 3})/10 + (x_{451} - x_{121} + x_{522} - x_{412} + x_{143} - x_{253} + x_{214} - x_{544})/20$$

$$\alpha_4 = (x_{4\cdots} - x_{\cdots 4})/10 + (x_{511} - x_{231} + x_{132} - x_{522} + x_{253} - x_{313} + x_{324} - x_{154})/20$$

$$\alpha_5 = (x_{5\cdots} - x_{\cdots 5})/10 + (x_{121} - x_{341} + x_{242} - x_{132} + x_{313} - x_{423} + x_{434} - x_{214})/20$$

$$\alpha_{11} = (2x_{121} - 2x_{511} + x_{231} - x_{451})/5 - \alpha_1$$

$$\alpha_{12} = (2x_{132} - 2x_{412} + x_{352} - x_{242})/5 - \alpha_1$$

$$\alpha_{13} = (2x_{143} - 2x_{313} + x_{423} - x_{533})/5 - \alpha_1$$

$$\alpha_{14} = (2x_{154} - 2x_{214} + x_{544} - x_{324})/5 - \alpha_1$$

$$\alpha_{21} = (2x_{231} - 2x_{121} + x_{341} - x_{511})/5 - \alpha_2$$

$$\alpha_{22} = (2x_{242} - 2x_{522} + x_{412} - x_{352})/5 - \alpha_2$$

$$\alpha_{23} = (2x_{253} - 2x_{423} + x_{533} - x_{143})/5 - \alpha_2$$

$$\alpha_{24} = (2x_{214} - 2x_{324} + x_{154} - x_{434})/5 - \alpha_2$$

$$\alpha_{31} = (2x_{341} - 2x_{231} + x_{451} - x_{121})/5 - \alpha_3$$

$$\alpha_{32} = (2x_{352} - 2x_{132} + x_{522} - x_{412})/5 - \alpha_3$$

$$\alpha_{33} = (2x_{313} - 2x_{533} + x_{143} - x_{253})/5 - \alpha_3$$

$$\alpha_{34} = (2x_{324} - 2x_{434} + x_{214} - x_{544})/5 - \alpha_3$$

$$\alpha_{41} = (2x_{451} - 2x_{341} + x_{511} - x_{231})/5 - \alpha_4$$

$$\alpha_{42} = (2x_{412} - 2x_{242} + x_{132} - x_{522})/5 - \alpha_4$$

$$\alpha_{43} = (2x_{423} - 2x_{143} + x_{253} - x_{313})/5 - \alpha_4$$

$$\alpha_{44} = (2x_{434} - 2x_{544} + x_{324} - x_{154})/5 - \alpha_4$$

$$\alpha_{51} = (2x_{511} - 2x_{451} + x_{121} - x_{341})/5 - \alpha_5$$

$$\alpha_{52} = (2x_{522} - 2x_{352} + x_{242} - x_{132})/5 - \alpha_5$$

$$\alpha_{53} = (2x_{533} - 2x_{253} + x_{313} - x_{423})/5 - \alpha_5$$

$$\alpha_{54} = (2x_{544} - 2x_{154} + x_{434} - x_{214})/5 - \alpha_5$$

$$\delta_k = (x_{12k} + x_{23k} + x_{34k} + x_{45k} + x_{51k})/5 - \delta$$

$$\delta = x_{\cdots \cdots}/20$$

3. 完全一対比較との関係

被験者 1 名が完全一対比較を行った場合を考える。浦の変法として構造式 (6) を仮定する。

$$x_{ij} = (\alpha_i - \alpha_j) + \gamma_{ij} + \delta + \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

このとき θ の最小二乗解は以下のようになる。

$$\alpha_i = (x_{i\cdots} - x_{\cdots i})/10$$

$$\gamma_{ij} = (x_{ij} - x_{ji})/2 - (\alpha_i - \alpha_j)$$

$$\delta = x_{\cdots \cdots}/20$$

複数の被験者が異なるサイクル系列で比較した場合は組合せ効果の代わりに主効果の個人差が、1 人の場合は主効果の系列差が求まる。

4. 結 言

以上、サイクリック一対比較法について完全一対比較との関係を検討した。完全一対比較と同数回の比較をサイクリック一対比較法で行うと、交互作用項が求められ有用である。

1) 長沢伸也：人間工学、第29巻特別号 (1993)

2) 長沢伸也：人間工学、第30巻特別号 (1994)

3) 長沢伸也：人間工学、第31巻特別号 (1995)