児童期における内包量概念の形成過程について

藤 村 宣 之*

FORMATION PROCESS OF INTENSIVE QUANTITY CONCEPTS IN SCHOOL AGE CHILDREN

Nobuyuki FUJIMURA

The purpose of this study was to investigate the formation process of two intensive quantity concepts, velocity and thickness, in children. The subjects were 120 elementary school children from fourth to sixth grades, and 42 secondary school children in the first grade. Two kinds of comparison tasks were administered: Which one is faster between two objects? or Which one is thicker between the two? Moreover, three kinds of logical operation tasks were administered. The results showed that the concept formation of velocity preceded that of thickness, that in this process there were four stages which progressed as getting older, and also that some errors were caused by some imperfectness of logical operation. Those stages were especially expressed by some typical patterns of strategies, and errors on each stage were represented by some specific strategies.

Key words: intensive quantity, concept formation, strategies, error analysis, developmental progress.

問 題

内包量(intensive quantity)とは、速度、密度、濃度などのように2つの外延量(extensive quantity:合併による加法性の成り立つ量)の商によって表わされる量のことである。例えば速度は、距離/時間という形で距離と時間という2つの外延量から決定される。ここで時間のよう分母にくる量は土台(外延)量、距離のように分子にくる量は全体(外延)量と呼ばれる。

この内包量は算数教育では小学校5年生の後半に「単位量あたり」として扱われるが、子どもにとってその理解は難しく、つまづきを多く生み出す単元の1つであることが大井(1982)小田切(1986)などにより指摘されている。一方で内包量は事物の質を表わす量である点、関数概念等の形成の基礎となる点などから算

数・数学教育において大きな意義を持ち、この点で内包量におけるつまづきは算数・数学教育において克服すべき1つの重大な問題であるといえる。

それでは子どもにとって内包量はなぜ、どのような点で難しいのか。子ども自身は内包量をどのように考えるのか。それらの問題を認知発達の視点から解明することにより、この重要な概念の獲得を促す指導に1つの示唆を与えることが本論文の目指すところである。

内包量概念の形成について操作構造の発達の一側面としてとらえたのがPiaget, J.である。Piaget(1970)は『発生的認識論』において、形式的操作期(11,12歳～)のはじまりを特徴づけるものとして、「操作の操作」という論理操作構造の特質に対応させて、「重さや力と、空間的大きさとの間の2次的な新しい関係」すなわち密度や圧力、仕事といった概念の成立を挙げた。またPiaget & Inhelder(1966)は同時期に出現する比の概念の1つとして、速度や確率などについて述べている。このようにPiagetは具体的操作から形式的操作へと

* 京都大学大学院教育学研究科(Faculty of Education, Kyoto University)

いう論理操作構造の発達を考え、それとの対応から速度や密度などの概念の出現を示した。

これに対して Piaget の述べた発達段階を踏まえながらも、個々の概念に関する処理方略の変化から発達をとらえようとしたのが Siegler, R. S.らの認知心理学者である。Siegler (1976), Siegler & Vago (1978) は天秤課題やコップにおける水の占有度課題にみられる比例概念 (proportionality concept) の発達について、Siegler & Richards (1979) は速度等の概念の発達について処理方略に着目した研究を行い、それぞれ前操作期から形式的操作期にかけての3ないし4段階のルール(方略)の高次化を示した。Siegler (1981)によれば一般的なルールの高次化は次のようにまとめられる。

ルールⅠ：優位次元のみにもとづいて判断する。

ルールⅡ：優位次元の値が異なるときは優位次元のみにもとづいて判断するが、等しいときは下位次元を考える。

ルールⅢ：両次元を考慮するが、一方で優位次元の値が他方で下位次元の値が大きいときは葛藤を解決するような一貫した公式をもたない。

ルールⅣ：両次元を考慮し、それらを組合わせる適切な公式を知っている。

また Noelting (1980) はジュース課題という濃度の比較課題を用いて割合概念 (ratio concept) の発達過程を分析し、課題の質によって表現される8つの段階を示した。各段階は一方の量の比較による判断(段階O, I A ~ I C), 倍数関係にもとづく判断 (II A, II B), 同値類の構成と演算にもとづく判断 (III A, III B) として特徴づけられる。

Siegler, Noelting ら認知心理学者のアプローチは、ある概念に限定してそこでの処理方略ないしルールの高次化から発達を探究したものであり、子どもの状況を客観的にかつある程度詳細に把握できるという点で教育に対する示唆を与える可能性を持つ。しかしながら、概念間の差異やつまずきの質、原因を明らかにし、算数・数学教育における指導法への示唆を引き出すには若干の課題や問題点が考えられる。

まず実験材料として Siegler らは天秤等の具体物を、Noelting はコップ等の図を用いて各概念の形成過程を分析しているが、その結果から算数・数学教育への示唆を得るには内容面で隔たりがあると考えられる。また複数の概念間の差異(領域固有性)を分析する際にも、実験課題としての共通性が少ないため限界が想定される。

次に分析方法について、Siegler の手法では何種類かの比較課題への反応パターンのみからルールを推定するため、概念形成の子細な状況やつまずきの質を細かく分析することが難しい。特にルールⅡからⅣにかけての量的な認識の形成について十分にとらえられていないと考えられる。これについて Wilkening & Anderson (1982) は天秤課題のルールⅢの段階で加法や乗法といった代数的統合ルールが適用されることを示している。また Siegler の手法によれば特に年少児についてどのルールにも分類されない者がみられるが、彼らの思考の質は明らかにされていないと考えられる。一方 Noelting の手法では8種類の比較課題それぞれについて子どもに判断の理由を書かせ、その分析から概念形成の状況を詳細に述べる。またルールⅢに対応する段階での量的な認識をみる課題を設定している(例えば設問ⅡBとして、ジュース2杯と水3杯からなる飲み物とジュース4杯と水6杯からなる飲み物の濃さを比べさせる課題—2量が倍数関係にある課題が含まれている)。しかしながら、ジュース課題特有の課題が多く、他の内包量との差異と連関が把握し難い。

速度、密度、濃度などの概念形成については、それぞれが領域独自に方略を高次化していくという側面とともに、いずれも2つの量の間の関係把握にもとづくという点で論理操作構造の発達に規定されるという側面も考えられる。これに関して Siegler や Noelting の研究では、両者とも課題および方略の分析から Piaget の発達段階との対応が述べられているが、それは具体的に分類や関係づけといった論理操作の課題を同時に実施したうえでの主張ではなく、その点で概念形成と発達段階との対応について検討すべき課題が残されているといえる。

以上より本研究の課題は、方略の高次化という側面を中心にして内包量概念の形成過程について明らかにすることとする。その際に以上の先行研究の成果、課題、問題点を考慮し、次の点に着目して各課題を作成する。

まず概念間の差異や連関を分析し、また教育への示唆を引き出すため、2種類の内包量概念について、数値を表の形で与えるという同一形式の大小比較課題を設定する。内包量について銀林(1975)は、速度、流量、密度、勾配の4つに分類し、さらに密度を分布密度と含有密度(濃度)とに区分している。本研究ではその構造が互いに対照的なものとして、時間一位差型の速度と空間一分布型のなかの含有密度(以下、濃度と表記する)とを取り上げる。また概念に関する真の理解をみるた

めに、各内包量について(土台量1けた)<(全体量2けた)と(土台量2けた)>(全体量1けた)という2タイプの比較課題を作成し、前者を(d)問題(direct)、後者を(i)問題(inverse)と名付ける。さらに概念形成の状態やつまずきの質を分析するため、各比較課題について判断の理由を記述させる。そして概念形成と論理操作構造の発達との関連をみるために、分類や関係把握といった論理操作能力をみる課題を同時に実施する。

以上の点に着目して作成された課題を実施することにより、以下の4点について実証的に明らかにすることが本研究の目的である。各目的について、それに対する仮説とその根拠を示す。

(1) 内包量概念の形成の時期と形態

これに対する仮説は、この概念が11, 12歳頃から形成されはじめること(仮説1-1)、その形成は以下の4つの段階を経てなされ、各段階は課題に対する方略のパターンによって表現されること(仮説1-2)である。

段階1：一方の量のみに着目して判断する。

段階2：一方の量が等しいときに限り、もう一方の量に着目して判断する。

段階3：2つの量の組がそれぞれ倍数関係になっている場合に限り2つの量の関係を把握して判断する。

段階4：任意の場合に2つの量の関係を正確に把握して判断する。

仮説1-1はPiagetの形式的操作期の記述に依拠したものである。仮説1-2の段階の高次化という観点はSieglerのルール評価アプローチにおけるルールの高次化を参考にしたもので、段階1, 2, 4はSieglerが示したルールI, II, IVにそれぞれ対応する。また段階3はNoeltingが示した設問II Bに正答できる段階に対応するもので、段階4以前の量的認識として倍数関係の認識が成立する段階として設定した。

(2) 複数の概念間の差異と連関

これに対する仮説は、速度の概念形成が濃度に先行すること(仮説2-1)、同一概念内では(d)問題の解決が(i)問題の解決に先行すること(仮説2-2)である。濃度では、土台量と全体量が同種の量であり混同を生じやすい点、溶解というイメージが2量の分離の妨げになる点、計算が(2量の単位が同じ場合に)小÷大の除法になる点の3点で難しさが想定されることが仮説2-1の根拠である。また(i)問題の場合、2けた÷1けたの計算で逆内包量(土台量/全体量)を求め、関係を逆転させて内包量の大小比較を行うか、あるいは1けた÷2けたという相対的に複雑な計算をあえて選択して大小比

較を行うことが必要で、理解の深さが求められると考えられることが仮説2-2の根拠である。

(3) 概念形成におけるつまずきの質と原因

これに対する仮説は、つまずきは内包量概念の形成過程における段階間の移行においてみられ、それは特有の誤答方略(誤答に至る方略)によって特徴づけられるということ(仮説3-1)である。下位の段階から1つ上位の段階へ移行するには新しい種類の認識が必要とされ、その認識が形成されないところにつまずきが生じて特有の方略として表現されるのではないかと考えられる。

(4) 概念形成と論理操作構造の発達との関連

これに対する仮説は、内包量の概念形成にはPiagetが具体的操作の第2段階(9, 10歳)で獲得されたとした論理操作能力(具体的には分類、関係把握、保存性)の獲得が前提となること(仮説4-1)、そして内包量におけるつまずきの原因の1つが論理操作にあること(仮説4-2)である。これらの仮説は速度や密度などの内包量は具体的操作期以後の形式的操作期において形成されるとするPiagetの主張に依拠し、また内包量概念の形成に必要な2量の間の関係把握は、系列化された関係ないし類の対応づけという具体的操作の第2段階における操作能力と内容的につながりがあるのではないかと考えて提起した。

方 法

被験者 大阪府下の公立小学校4年生(38名、平均年齢9;8)、5年生(42名、同10;8)、6年生(40名、同11;8)、および同地区の公立中学校1年生(42名、同12;9)。合計162名。この4学年はPiagetの述べる具体的操作の第2段階(9, 10歳)から形式的操作期(11, 12歳~)にかけての年齢段階に着目して選んだ。内包量については小4と小5は未習、小6と中1は既習(小5の2学期)であった。

実施時期 1988年6月14日から17日にかけて1日に1クラスずつ課題を実施した。所要時間は説明時間を含めて各学年約50分であった。

課題冊子 課題冊子は内包量比較課題(第1, 4問)、論理操作課題(第2, 3, 5問)の2種類計5問から構成され、全体のページ数は表紙を除いてB4判で12ページであった。各問には説明のページがあり、第1, 2, 3, 5問には練習問題を設定した。ここで目的との関連を述べると、内包量比較課題の結果から目的の(1)(2)(3)を、内包量比較課題と論理操作課題の両者の結果から目的(4)を明らかにすることを意図した。各課題の内

容は以下の通りである。

(1) 内包量比較課題

一方の量が1けた、他方の量が2けたからなる2つの量の組(例えば距離84km—時間4時間と距離66km—時間3時間)を 2×2 の表の形で示し、その2量の商で表わせる内包量の大小を比較判断させ、判断の理由を記述させた(この例の場合は前者が時速21km、後者が時速22kmで後者のほうが速いと判断できる)。ここでその数値の組合わせから次に挙げる4種類の小問を作成した。その配列順序は予備調査(1988年4月に実施)において通過率の高かったものの順とした。

- ① 1けたの量が同じで2けたの量が異なるもの
(例：距離54km—時間3時間と距離42km—時間3時間)
- ② 1けたの量が異なり2けたの量が同じもの
(例：距離42km—時間3時間と距離42km—時間2時間)
- ③ 1けたの量、2けたの量ともに一方が他方の倍数となっているもの(例：距離42km—時間2時間と距離84km—時間4時間)

- ④ 1けたの量、2けたの量ともに一方が他方の倍数とはなっていないもの(例：距離84km—時間4時間と距離66km—時間3時間)

次に内包量としては先に述べたように速度と濃度の2種類を採用し、それぞれについて(d)問題(土台量1けた—全体量2けた)と(i)問題(土台量2けた—全体量1けた)の2タイプを設定した。これらの内包量と課題との対応は次の通りである。

第1問(1)……速度(d)：船の進む速度

(時間—1けた、距離—2けた)

(2)……濃度(i)：砂糖水の濃度

(溶液—2けた、溶質—1けた)

第4問(1)……速度(i)：人の歩く速度

(時間—2けた、距離—1けた)

(2)……濃度(d)：食塩水の濃度

(溶液—1けた、溶質—2けた)

課題の例(速度(d)小問④)をFig. 1に示す。

- ④ わかくさ丸とあじさい丸ではどちらが速いですか。

……わかくさ丸・あじさい丸・同じ

そう考えた理由を、ことばか式か絵でつづに書いてください。

(そう考えた理由—ことばか式か絵)

	わかくさ丸	あじさい丸
進んだきより	84km	66km
かかった時間	4時間	3時間

FIG. 1 内包量比較課題の例(速度(d)小問④)

(2) 論理操作課題

Piaget (1970) が具体的操作の第2段階(9,10歳)で獲得されたとした論理操作能力(具体的には、①2つまたはそれ以上の非離接的類の交差、②系列化された関係の対応づけ、③重さの保存性)が獲得されているかどうかをみることを目的とした。具体的な課題としては、標研式発達診断知能検査(IDT 日本標準)の理解力検査から項目を選んで課題を構成した。課題と内容との対応は以下の通りである。

第2問……分類(IDT小4用：概念の包含関係の認識)

バラの花について色(赤、黄、白)と取得方法(「花屋で買ったもの」と「庭に咲いたもの」)の2次元を設定し、いくつかの条件文をもとにして特定の色の花の取得方法を推理させる課題。

第3問……保存性(IDT小4用：重さの保存)

はかりの上で木片を逆さにした場合や石けんをビーカーの水の中に入れた場合などを図示し、全体としての重さの変化を問う課題。

第5問……関係把握(IDT小5用：数の関係の推理)

2行 $\times$ 3列(または4列)の数のマトリックスを呈示し、数の上昇系列などの性質から空所にあてはまる数を答えさせる課題。

手続 課題はクラス単位で実施した。調査者は教卓で課題全般についての説明を行った後、クラス全員に課題冊子を配付し、学年、組、名前等の記入を指示した。次いで冊子の表紙にある注意を読み上げ、疑問点がないかどうかをたずねた。以下各問ごとに課題についての説明を行い、練習問題がある場合はそれを解か

せた後に黑板上に正答を記し、疑問点がないかを確認した。その際の教示はすべて教卓において行った。各課題は内包量比較課題各15分、論理操作課題各3分の解答時間を目安に実施した。内包量比較課題（第1, 4問）については(1)(2)それぞれを時間を区切って実施し、(1)が終わっても次のページの(2)に進まないで待っているように指示した。またクラスの子どもの課題解決状況に応じて必要な場合は各問最大限4分の時間延長を行った。

結 果

結果の分析については次の4つの手順で進める。まず内包量比較課題における小問の正答数（判断が正しかった小問の数）から概念形成の全般的傾向を明らかにする。次に小問ごとの通過率から学年間の変化を明らかにし、同時に概念形成における段階について検討する。さらに記述された理由についての方略分析から概念形成における段階とそこでのつまずきの質を明らかにする。そして内包量課題と論理操作課題の両者の関係の分析から概念形成と論理操作との関連について明らかにする。

1. 概念形成における全般的傾向

各内包量課題における正答数について学年（小4, 小5, 小6, 中1）×種類（速度, 濃度）×タイプ（(d), (i)）の $4 \times 2 \times 2$ の3要因分散分析を行ったところ、学年（ $F[3, 474] = 25.58, p < .001$ ）、種類（ $F[1, 474] = 144.40, p < .001$ ）、タイプ（ $F[1, 474] = 18.78, p < .001$ ）の主効果、及び学年とタイプの交互作用（ $F[3, 474] = 2.62, p < .05$ ）が有意であった。

次に交互作用の原因を調べるために各学年におけるタイプ間の差について検定を行ったところ、小5, 小6で(d)(i)間に有意な差が認められ（ $F[1, 158] = 7.71, p < .01$; $F[1, 158] = 16.00, p < .01$ ）、小4, 中1では差が有意と認められなかった。さらに(d)(i)それぞれについてライヤンの法による学年差の多重比較を行った結果、小4から小5にかけては(d)(i)ともに正答数の増加がみられた（ $t = 5.68, p < .001$; $t = 3.27, p < .01$; いずれも $df = 78$ ）のに対し、小5から小6にかけては(d)のみが（ $t = 2.39, df = 80, p < .05$ ）、また小5から中1にかけては(i)のみが（ $t = 2.37, df = 82, p < .05$ ）有意な増加傾向を示した。これらの増加傾向の差異が有意な交互作用をもたらしたと考えられる。

FIG. 2 内包量別の平均正答数

以上の正答数の分析から、速度の概念形成が濃度に先行すること、また(d)問題の解決が(i)問題に先行し、やがて(i)問題の解決が(d)問題のレベルに近づくことが示唆された。FIG. 2 に内包量別の平均正答数を示す。

2. 学年間の変化と概念形成上の段階

次に1でみられた全般的な傾向の質を吟味するために小問ごとに通過率の変化を調べた。その結果をFIG. 3に示す。学年間の変化として次のようなことがわかった。

FIG. 3 小問別にみた通過率の変化

まず小4から小5にかけては倍数関係の認識が必要な小問③の通過率の上昇が速度(d)(i)濃度(d)(i)についてそれぞれみられた ($\chi^2=11.02, p<.001$; $\chi^2=7.61, p<.01$; $\chi^2=5.87, p<.05$; $\chi^2=4.61, p<.05$; いずれも $df=1$)。また、単位あたりの認識が必要な小問④の通過率の上昇が速度(d)濃度(d)にみられた ($\chi^2=6.19, p<.05$; $\chi^2=4.79, p<.05$; いずれも $df=1$)。次に小5から小6にかけては小問③の濃度(d)(i)の通過率が引き続いて上昇し ($\chi^2=4.76, p<.05$; $\chi^2=12.25, p<.001$; いずれも $df=1$)、速度の通過率と同レベルに達すると同時に、小問④の速度(d)濃度(d)の通過率も引き続いて上昇し ($\chi^2=5.77, p<.05$; $\chi^2=4.01, p<.05$; いずれも $df=1$)、速度については80%以上に達する。その一方で単位あたりの認識が形成される以前は正答していた小問②について濃度(i)で通過率の下降がみられた ($\chi^2=4.65, df=1, p<.05$)。小6から中1にかけては速度(i)の小問①③の通過率の上昇に有意傾向がみられた (いずれも $\chi^2=2.72, df=1, p<.1$)。

これらの結果、とりわけ小問④における(d)(i)問題間の通過率の上昇傾向の差異は、結果1でみられた交互作用を説明するものである。一方これらの結果及びFIG. 3から小問については、③の解決が④の解決に先行すること、①②の解決は③④に比べて小4段階から比較的高いレベルにあり変化が少ないことが全般的な傾向として読みとれる。このことから解答パターンという点で仮説1-2で提起した段階の存在が示唆されるが、個別にみた場合①や②に誤答しながらも③に正答するといったケースがかなりみられ、解答パターンのみから段階について説明することは難しいと考えられる。

3. 方略にみられる段階と概念形成上のつまずき

次に解答パターンからだけではとらえられなかった概念形成の質的側面およびつまずきについて明らかにするために、子どもが記述した理由についての方略分析を行った。

まず方略の同定についてであるが、正答誤答を問わず、最終的な判断が1つの量の大小によるか2つの量の関係によるかによって分類し、前者をA方略系(alternative)と命名した。次に後者について、判断の質が演算にもとづくか否かによって分類し、演算によるもののうち演算の質が倍数関係の認識によるものをB方略系(binal)、単位あたりの認識によるものをC方略系(calculating)と命名した。また演算によらないものや加減などの誤った演算を用いたものをD方略系(disorderly)とした。以上をまとめるとTABLE 1のようになる。

TABLE 1 各方略系への分類

＜最終的判断＞	＜判断の質＞	＜演算の質＞	
1 つの量の大小	演算にもとづく	倍数操作	→ A 方略系
2 つの量の関係		単位あたり	→ B 方略系
			→ C 方略系
	演算によらない(または誤演算による)		→ D 方略系

次に各方略系において正答に至る場合の方略をそれぞれA, B, C, D方略とした。ただしB方略系では小問③と小問④の正答に内容上若干の差異があるので、前者をB方略、後者をB'方略とした。また各方略系において誤答に至る場合の方略には添字をつけて分類を行った。各方略の例を第1問(1)について示すとTABLE 2のようになる。

TABLE 2 各方略の例

—正答に至る場合の方略(正答方略)—	
A方略(小問①)	時間が同じで進んだきよりがさくら丸のほうが長いのでさくら丸のほうが速い。
B方略(小問③)	ふじ丸の距離と時間を倍にするとわかくさ丸と同じになるので、速さは同じ。
B'方略(小問④)	かかった時間を12時間にそろえると、進んだきよりはわかくさ丸が $84 \times 3 = 252\text{km}$ 、あじさい丸が $66 \times 4 = 264\text{km}$ なのであじさい丸が速い。
C方略(小問④)	$84 \div 4 = 21$, $66 \div 3 = 22$, 1時間に進んだきよりは、あじさい丸のほうが長いのであじさい丸が速い。
D方略(小問④)	進んだきよりはわかくさ丸が長いけれど時間がかかりすぎなのであじさい丸のほうが速い。
—誤答に至る場合の方略(誤答方略)—	
A ₁ 方略……A方略系において大小比較の際に誤った方略。	
(小問②)	すみれ丸のほうがかかった時間が長いので速い。
A ₂ 方略……A方略系において着目すべき量を誤った方略。	
(小問②)	すみれ丸とふじ丸では進んだきよりが同じなので速さは同じ。
A ₃ 方略……A方略系を小問③④に適用した方略。	
(小問③)	ふじ丸とわかくさ丸では、進んだきよりがわかくさ丸のほうが長いのでわかくさ丸のほうが速い。
C ₁ 方略……C方略系において大小比較の際に誤った方略。	
(第1問(2)小問④)	$36 \div 2 = 18$, $66 \div 3 = 22$, $18 < 22$ なので、ともよさんのコップのほうがこい。
D ₁ 方略……D方略系において誤った推理を行った方略。	
(第1問(2)小問④)	さとうもさとう水もともよさんが多いので、ともよさんのコップのほうがこい。
D ₂ 方略……D方略系において誤った演算を行った方略。	
(第1問(2)小問④)	$36 + 2 = 38$, $66 + 3 = 69$ なのでともよさんのコップのほうがこい。

以上の正答，誤答方略をもとに方略のパターンからTABLE 3のように段階を規定した。そこで偶然による正答や計算ミスによる誤答などを方略分析によって修正することによりすべての子どもがいずれかの段階に分類されたが，学年の進行とともに高次の段階の人数が増加する傾向が各内包量についてみられた。次に内包量間の関連を見るために，速度，濃度それぞれの段階における人数の分布を各学年ごとに示したのがFIG. 4である。ここで段階 3α ， 3β はともに段階3とし，

TABLE 3 段階の特徴と典型的方略パターン

段階	概念形成上の特徴	典型的方略パターン ① ② ③ ④
段階 1	一方の量に着目して判断する。	A -A ₁ -A ₃ -A ₃ A -A ₂ -A ₃ -A ₃
段階 2	一方の量が等しいときに限り，もう一方の量に着目して判断する。	A -A -A ₃ -A ₃ A -A -D ₁ -D ₁
段階 3α	2つの量がそれぞれ倍数関係にあるときに限り2つの量の関係を正確に判断する。	A -A -B -A ₃ A -A -C -C ₁
段階 3β	2つの量がそれぞれ倍数関係にあるときに限り2つの量の関係を正確に判断するが，一方の量が等しいときの判断に誤りがある。	A -A ₁ -B -A ₃ A -C ₁ -C -C ₁ C ₁ -C ₁ -C -C ₁
段階 4	あらゆる場合に2つの量の関係を正確に判断する。	A -A -B -B' A -A -B -C C -C -C -C

FIG. 4 速度，濃度各段階における人数の分布

また各内包量について(d(x))間に段階のずれがあるときはそれを高い方の段階への移行期ととらえ，高い方の段階の1つ前の段階をその子どもの段階とした。

FIG. 4から次のようなことがわかる。まず小4については速度で段階1～3が，濃度で段階1が分布の中心である。それが小5になると，濃度の段階1にいくらかの子どもがとどまっているものの，速度濃度ともに分布の中心は段階3に移行する。そして小6，中1では段階3，4が分布の中心となる。中1では速度濃度ともに段階4の子どもが小6に比べて増加している点に特徴がみられる。

以上全般を通じて速度の概念形成が濃度に先行していることが読みとれた。また内包量既習の小6や中1においても，特に濃度で低次の段階にとどまっている子どもがみられた。概念形成上のつまづきについては，段階1におけるA₁，A₂，段階2におけるA₃，D₁，段階3におけるA₃，C₁など，各段階で特有の方略によって表現されるものがみられた。

4. 概念形成と論理操作との関連

まず仮説4-1に関して，内包量課題の得点合計と3種類の論理操作課題の得点とのPearsonの相関をみると，内包量と分類($r = .18, p < .01$)，内包量と関係把握($r = .35, p < .001$)，内包量と保存性($r = .31, p < .001$)の間にいずれも有意な相関がみられた。

次に具体的操作段階での論理操作の能力が概念形成の前提となっているかどうかをみるために，まず分類，関係把握，保存性の3種類の課題のうち2種類以上に完答した場合を論理操作の獲得の状態とし，それ以外を未獲得の状態とした。次いでBart & Airasian(1974)による序列化分析(ordering analysis)を適用し，各内包量ごとに概念形成の段階と論理操作との2×2のマトリックスを作成し，そこに含まれる人数の分布を全体人数に対する百分率で示した。概念形成については単位あたりの認識が全般的に成立する段階4を概念獲得の状態とした。その結果をTABLE 4に示す。

TABLE 4 概念形成と論理操作における人数の分布
(n=162に対するパーセント)

論理操作	内包量 (段階)	速度(d)		速度(i)		濃度(d)		濃度(i)	
		1・2・3	4	1・2・3	4	1・2・3	4	1・2・3	4
		24.1	14.2	29.0	9.3	35.2	3.1	34.0	4.3
未獲得									
獲得		25.9	35.8	32.1	29.6	36.4	25.3	47.5	14.2

Bart らによればマトリックスの1行2列の成分に含まれる人数が全体の人数の5%以下であるとき、行の因子(この場合論理操作)は列の因子(この場合内包量)のための必要条件とも言える。TABLE 4によれば論理操作が内包量概念の必要条件となる、すなわち概念形成の前提となるのは濃度(d) (3.1%)と濃度(i) (4.3%)だけである。またTABLE 4を用いて 2×2 の χ^2 検定を行ったところ、論理操作の獲得者と未獲得者との間で概念形成に関する差は、速度(d), 速度(i), 濃度(d)で有意($\chi^2=5.88, p<.05$; $\chi^2=8.15, p<.01$; $\chi^2=18.83, p<.001$; いずれも $df=1$)であり、濃度(i)で有意傾向がみられた($\chi^2=2.74, df=1, p<.1$)。

さらに仮説4-2に関して、概念形成におけるつまずきの1つの原因が論理操作にあるかどうかを明らかにするために、概念形成の段階で段階1・2群と3・4群とに分け、前者を倍数関係の認識以前でつまずきを生じているグループと考えた。この2群について論理操作の獲得、未獲得に差があるかどうかをみるために 2×2 の χ^2 検定を行ったところ人数の分布の差は有意であり($\chi^2=6.96, df=1, p<.01$)、段階1・2群の方が論理操作の未獲得者の割合が高いことが示された。

考 察

以上の結果をもとに、問題で示した4つの目的それぞれについて提起した仮説の検証を行い、内包量概念の形成過程全般について、さらに内包量指導に与える示唆について考察を行っていきたい。

1. 仮説の検証

(1) 内包量概念の形成の時期と形態

まず仮説1-1についてであるが、結果2によれば小4から小5にかけて小問③の通過率が全般的に上昇している。小問③では倍数関係の認識にもとづく等価性の認識(2量がともに倍になっても内包量の値は変わらないという認識)が必要とされるが、この認識は一種の個別単位を想定するという点で内包量概念の基礎をなすものであり、その点で11, 12歳から概念の形成が始まるとする仮説1-1は支持されたといえる。

次に仮説1-2については結果3より、方略分析によって定義した概念形成の段階の高次化が学年の進行とともにみられた。ここで各段階における認識は順に1量の符号化、2量の符号化、等価性(倍数関係)の認識、普遍単位の認識として表現されるが、それらは単なる順序性だけでなく、次段階の認識が前段階における認識を前提として包括するという性質をもつものである。このような段階の性質からも、段階の高次化

に関する仮説1-2は支持されたといえる。

(2) 複数の概念間の差異と連関

仮説2-1, 2-2は結果1~3において支持されたといえる。しかしながら中1で濃度概念は未だ形成途上にあることから、仮説2-1に関して濃度の概念形成がそれ以後速度と同じ水準にまで達するかどうかについてはこの結果からは結論できない。

(3) 概念形成におけるつまずきの質と原因

仮説3-1については、結果3の方略分析により誤答方略は次段階に必要とされる認識(例えば2量の符号化)の未形成あるいは不完全性の表現としてとらえられ、実際に各段階ごとに特有の方略が指摘された。つまずきがその認識の未形成ないし不完全性によるものと考えれば、この仮説は支持されたといえる。

(4) 概念形成と論理操作構造の発達との関連

仮説4-1については、結果4より具体的操作の第2段階での論理操作が獲得されているか否かによって概念形成に差が生じることは示せたが、論理操作が概念形成の前提になっているかどうかについては概念間で差がみられ仮説は支持されなかった。

また仮説4-2については、結果4から概念形成においてつまずいた子どもに論理操作未獲得の子どもの割合が高く、論理操作の未獲得がつまずきの1つの原因として示唆されたが、より厳密な検討は今後の課題として残された。

2. 総合的考察

以上の仮説検証の結果をもとに、概念形成における発達の傾向、段階とつまずきの質、内包量概念の難しさ、内包量指導上の示唆の4点について考察を行う。

(1) 発達の傾向

まず小4では2量の符号化までが大半の子どもの認識で、一部の子どもに速度に関する等価性の認識がみられはじめる。

次に小5では等価性の認識が全般に進み段階3が分布の中心となる。速度については単位あたりの認識がみられる一方で濃度では2量の符号化以前の子どもも存在し、概念間の差異がみられる。

小6では濃度における等価性の認識が速度と同レベルに達すると同時に、(d)問題における単位あたりの認識が多くの子どもにみられるようになる。一方(i)問題では単位あたりの認識における比較の誤り(C₁方略)が多くみられ、特に濃度(i)の小問②のように小5ではA方略の適用により高い通過率を示す問題に対して、C₁方略による誤答が増加し通過率が低下する。

小6から中1にかけてはそれほど大きな変化はみら

れないが、単位あたりの認識がある程度深まり、比較の際の誤りが少なくなる。

以上のように速度・濃度それぞれの概念形成過程において、Siegler が示したルールIIとルールIVの間に対応する量的認識の段階として、等価性の認識が成立する段階（段階3）が存在することが明らかになった。これは Noelting が示した設問II Bに正答する段階に対応するものである。また Sieglar らによる具体物を用いた実験に対して、数値を用いた表の形で同一形式の課題を与えた場合でも、速度と濃度の概念間には等価性や単位あたりの認識についての差異がみられることが示された。

(2) 概念形成の段階とつまずきの質

結果3より計算ミスなどを除いたほとんどの誤答（つまずき）は誤答方略として表現され、概念形成上の各段階においてとらえられた。ここで概念形成における段階とそこにおけるつまずき、誤答方略の関係を整理すると Fig. 5 のようになると考えられる。たとえば等価性の認識におけるつまずきは段階2から段階3への移行において生じ、それは A_3 や D_1 という特有の誤答方略によって表現される。そのほか、2量の符号化におけるつまずき、単位あたりの認識におけるつまずきについても同様である。このように誤答方略を次段階で必要な認識におけるつまずきの表現と考えることにより、方略の分析を手がかりにしてそれぞれの子どもの認識についての最重要な課題を明らかにしていくことが可能になるのではないかと考えられる。本研究では、Siegler が示したような反応パターンの分析に加えて判断の理由についての方略分析を行うことにより、概念形成上の各段階との関連でつまずきの質がより明らかになったと考えられる。

FIG. 5 段階の高次化と誤答方略

また結果4より等価性の認識におけるつまずきの原因の1つが具体的操作段階での論理操作にあることが示唆されたが、どのような点で両者が関連を持つかなどについては今後明らかにしていく必要がある。

(3) 内包量概念の難しさ

内包量概念の形成過程におけるつまずきは3つの段階においてみられたが、また内包量概念の獲得において、2量の符号化、等価性の認識、単位あたりの認識（およびそれによる正確な判断）という3種類の認識が不可欠であることがこの概念の理解を難しくしているのではないかと推測される。また濃度における難しさについて3つの点を挙げたが、結果1、2において濃度(d)の概念形成はほとんどの場合において速度よりも遅れていたため、計算力の影響という第3点のみが速度と濃度の概念形成の差異を規定するものではないということが示された。

(4) 内包量指導についての示唆

まず導入指導に関して、クラスに段階1～4の子どもが存在する小5では、例えば内包量比較課題の①から④の順に指導を展開することにより、2量の符号化、等価性の認識といった認識を順次形成させ、内包量の意味の理解を深めさせ得るのではないかと考えられる。次に個別指導に関して、内包量指導後も段階3以前にある者に対して次の段階にあたる課題を与えていくことにより、つまずきを克服していくことが可能ではないかと推測される。その際、特に濃度については固有の難しさを考慮し、教具等に工夫を試みる事が望ましいと考えられる。また内包量導入以前の指導に関して、2量の符号化、等価性の認識を小4以前から様々な指導（例えば小2以後の乗除演算における1あたりの考え方の指導など）を通じて行っていくことにより、内包量の理解につながっていくのではないかと推察される。

3. 今後の課題

本研究では概念形成と論理操作構造の発達との関連について、具体的な内容面での関連（例えば等価性の認識と系列化された関係の対応づけとの関連）に関して、明らかにすべき問題が残された。また小6、中1におけるつまずきの様々な側面（例えば具体物を用いて個別実験を行った場合の子細な認識の様態や、教具の工夫によるつまずき克服の可能性）特に濃度における難しさを規定する要因についても検討の余地が残された。

以上2点の解明を行うこと、またそれらを通じて内包量概念の形成過程における領域固有の側面と一般的な側面との区別と関連について明らかにしていくことが今後の研究課題であろう。

引用文献

- Bart, W. M., & Airasian, P. W. 1974 Determination of the ordering among seven Piagetian tasks by an ordering-theoretic method. *Journal of Educational Psychology*, **66**, 277—284.
- 銀林 浩 1975 量の世界・構造主義的分析 むぎ書房
- 小田切忠人 1986 算数科における「1当たり量」の指導に関する一考察 琉球大学教育学部紀要, **30**, 1—6.
- Noelting, G. 1980 The development of proportional reasoning and the ratio concept, part I. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, 217—253.
- 大井菊雄 1982 算数・数学のつまずきについて 日本私学教育研究所紀要, **18**, 137—156.
- Piaget, J. 1970 *L'épistémologie génétique*. Presses Universitaires de France.
- Piaget, J., & Inhelder, B. 1966 *La psychologie de l'enfant*. Presses Universitaires de France./波多野完治・須賀哲夫・周郷博(訳) 1969 新しい児童心理学 白水社
- Siegler, R. S. 1976 Three aspects of cognitive development. *Cognitive Psychology*, **8**, 481—520.
- Siegler, R. S. 1981 Developmental sequences within and between concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development*. No. 189.
- Siegler, R. S., & Richards, D. D. 1979 Development of time, speed, and distance concepts. *Developmental Psychology*, **15**, 288—298.
- Siegler, R. S., & Vago, S. 1978 The development of a proportionality concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Child Psychology*, **25**, 371—395.
- Wilkening, F., & Anderson, N. H. 1982 Comparison of two rule-assessment methodologies for studying cognitive development and knowledge structure. *Psychological Bulletin*, **92**, 215—237.

付 記

本論文は京都大学教育学部に提出した卒業論文(1988年度)の一部を加筆修正したものです。論文の作成にあたり、御指導いただきました京都大学教育学部の田中昌人教授、子安増生助教授に深く感謝いたします。また本研究の実施にあたり、御協力いただきました小中学校の先生方、ならびに児童生徒の皆様に心から感謝いたします。

(1989年8月21日受稿)