論文

各成長段階における最大林分断面面積の推定*

田 中 和 博**

田中和博：各成長段階における最大林分断面面積の推定 森林計画誌16, 1991 システム収穫表を作成するにあたり、競争—密度効果の理論に対して再検討を行い、ロジスティック理論に捕らわれない立場から、競争—密度効果の逆数式の係数に対して新解釈を試みた。単木当たりの平均実占有面積（ s ）という概念を取り入れると、競争密度効果は、 $s = 1 / (\rho + \alpha)$ という関係に帰着する。ここで、 ρ は林分密度、 α は成長に伴い変化する係数である。一方、安藤の研究により、競争—密度効果の逆数式が、単木当たりの平均胸高断面面積（ g ）と林分密度との間に対しても成り立つことが知られている。すなわち、 $1 / g = A_g \cdot \rho + B_g$ である。ただし、 A_g 、 B_g は成長に伴い変化する係数である。単木当たりの平均胸高断面面積（ $g(t)$ ）が単木当たりの平均実占有面積（ s ）に比例すると考え、その比例定数を $\lambda(t)$ とおくことにすれば、 $g(t) = \lambda(t) \cdot s(t)$ と表される。これらの関係式から、結局 $A_g(t) = 1 / \lambda(t)$ が得られる。h a当たりの胸高断面面積合計、すなわち、林分断面面積（ G ）は、 $G = \rho \cdot g = \lambda \cdot \rho \cdot s = \lambda \cdot S$ と表される。ここで、 S はh a当たりの実占有面積合計である。 S が単位面積を覆いつくしたと考えると、すなわち $S = 1$ と考えると、 λ は最大林分断面面積を示すことになる。この λ の値は、間伐の効果を考える場合に重要な役割をはたすので、本論文では、安藤の資料を用いて、各成長段階における λ を推定した。

I. はじめに

現在、同齢単純林のシステム収穫表を開発中であるが、その基本的な設計思想は、鈴木¹⁾の林分遷移の方程式^{21,22,23,24,25)}を発展させた確率論的直径成長モデル²⁸⁾と、篠崎・吉良らの密度効果の理論¹⁵⁾に基づく安藤²⁾の林分密度管理図²⁾を結合させようというものである。すなわち、直径の成長や直径分布の変化を確率モデルで予測し、間伐の効果は密度管理図の理論に基本的には従わせようというものである。これについてのより具体的な構想や方針は、1988年10月にニュージーランド国ロトルア市で開催された日本・ニュージーランド合同シンポジウムで発表した³³⁾。

密度管理図の基礎となる競争—密度効果の逆数式は、ロジスティック理論などから理論的に導かれるものである¹⁵⁾。ロジスティック理論は、林分密度管理図の発展に大きく寄与し、その業績は高く評価されるものであるが、内藤⁹⁾が指摘したように、まだ、いくつかの問題点も内包している。システム収穫表を開発するにあたり、競争—密度効果の逆数式の係数に対して新解釈を試

* Kazuhiro TANAKA : Estimation of the maximum basal area at each growth stage

** 三重大学生物資源学部 Fac. of Bioresources, Mie Univ., Tsu 514

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

みた。それは、密度効果の理論をロジスティック理論とは切り離して適用したいがために試みたものであった。競争—密度効果の逆数式は、単木当たりの平均胸高断面積と林分密度との間にも成立することが報告されている²⁾が、今回、この場合の係数の一つが、最大林分断面積の逆数であると解釈できた。これにより、林分の成長に伴う逆数式のこの係数の変化を、的確に予測することが可能となった。

現在開発中のシステムでは、最大林分断面積は、直径成長の上限値の推定に関わる重要な因子であり、間伐の効果を予測する場合に欠かせない指標である。最大林分断面積の応用上の必要性について説明しようとするれば、システム収穫表についても言及しなければならない。よって、本論文では、システム収穫表についてその概略を説明するとともに、最大林分断面積のシステム収穫表における役割についても触れることにする。本論文の構成は次の通りである。II章では、システム収穫表の概略を説明し、III章では、競争—密度効果の逆数式に対する新解釈と、システム収穫表で採用しているモデルについて説明する。IV章では、最大林分断面積のシステム収穫表における役割について述べるとともに、安藤の資料を用いて、各成長段階における最大林分断面積を、樹種別、地方別に推定した結果を示す。V章では、最大林分断面積と $3/2$ 乗則との関係、VI章では、葉量との関係について考察し、最後に、VII章では、システム収穫表と最大林分断面積について総合的に論じる。

II. VPM法に基づくシステム収穫表の概略

1. システム収穫表の目的

従来の収穫表や密度管理図では、総量や平均値に関する情報しか提供できなかった。しかし、丸太の価格は形質や径級によって異なるから、平均直径や総材積といった情報だけでは、森林の経済的な価値をきめ細かく評価することは困難である。経営戦略的に有利な間伐計画を立てたり、伐期齢を決定するには、少なくとも直径分布に関する情報が必要である。システム収穫表では、直径分布を予測し、径級別の丸太本数や利用材積についての情報も提供することを目的としている。

2. 使用機器、使用言語、対象林分

現在、開発中のシステム収穫表は、パーソナルコンピュータを用いたシステムであり、NEC社のPC-9801シリーズを使用している。言語は、BASICである。

本システムが対象とする林分は、同齢単純林で、しかも本数密度が間伐によって適度に調節されているような経済林である。ここでは、本数減少は、間伐のみによって生じると想定している。よって、本数密度が極端に高く、自然枯死が発生しているような林分には適用できない。その理由は、このような高密度な林分では被圧木が多く発生し、被圧木の成長は他の林木の成長とは同様に取り扱いえないからである。

同様の理由により、面積の広い林分に適用する場合は、林分をなるべく均一な部分に区分し、それぞれの区画ごとに収穫予測を実行することが望ましい。

3. VPM法

本システム収穫表では、期首の直径分布と直径階別の成長量から期末の直径分布を予測している。よって、理論的な直径分布曲線を用いていないのが特徴である。これを離散モデルとして数学的に表現すれば、期首の直径階別本数分布をベクトル (Vector) とみなし、これに直径階別の成長量を表す確率行列 (Probability Matrix) をかけることによって、期末の直径ベクトルを予測するものである¹⁰⁾。この方法は、ベクトルと確率行列の頭文字をとって、『VPM法に基づくシステム収穫表』と名付けた。VPM法は、同齢単純林以外の林分にも広く適用が可能な予測方法であるから、将来、本システム収穫表を複層林や天然林に拡張する場合も、VPM法を採用し、共通の手法で処理しようと考えている。

期首の直径分布として入力する直径ベクトルは、2 cm 括約の直径階別本数である。これは、直径毎木調査の結果から得られるものであるが、予測目的に応じて、標本調査の結果を用いてもよい。また、平均直径や、変動係数と言った直径分布の統計量しか分かっていない場合は、適当な理論分布を採用することにより、期首の直径分布を推定し、それを用いてもよい。なお、期首の直径分布を直径分布の統計量から推定するサブルーチンは、まだ、本システムには組み込まれていない。

本システムでは、将来の直径分布を、1 年間隔で予測している。これは、システム収穫表のプロトタイプに合わせたためである。1 年間隔でVPM法を実行するには、予測誤差の関係から、直径階の幅を狭くする必要がある。本システムでは、2 cm 括約の各直径階内では本数が一様分布をしているとの仮定のもとに、直径階を4 mm 括約に直して予測計算をしている。これにより、演算時間が少し長くなり、予測結果が出るまで待ち時間が生じるようになってしまった。5 年間隔で2 cm 括約のまま計算した場合は、待ち時間はほとんどない。しかし、こうした技術的な問題は、本論文の目的とするところではないので、これ以上は説明しないことにする。

本システムでは、直径分布を1 年間隔で予測しているが、予測された期末直径ベクトルを、次の1 年間の期首直径ベクトルとすることによって、予測は必要なだけ繰り返すことができる。

間伐を実行する場合は、間伐木の直径階別本数を指定することによって、間伐木直径ベクトルを作成し、期首の直径ベクトルから間伐木直径ベクトルを差し引いた残りを、新たに期首直径ベクトルとしている。これにより、間伐がある場合も、VPM法が適用できる。

間伐木ベクトルは直接指定することもできるが、間伐の種類と本数間伐率を指定することによって、間伐木ベクトルを計算機内部で作成させることも可能である。この場合、間伐の種類は、全層、上層、下層の三つが選択できる。間伐の実行に先だって、収量比数や相対幹距といった間伐の指標がディスプレイに表示されるので、ユーザーは、試行錯誤により、適切な間伐率を選択す

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

ることができる。

4. 直径遷移確率の推定

直径遷移確率の推定は、この予測方法のキーポイントである。直径遷移確率は、林齢によって変化するし、また、間伐の影響を受けて変化する。本システムでは、既に述べたように、林齢に伴う変化を鈴木^{21,22,23,24,25)}の林分遷移の方程式を発展させた確率論的直径成長モデル²⁸⁾で予測し、間伐に伴う変化を篠崎・吉良らの密度効果の理論¹⁵⁾に基づく安藤の林分密度管理図の理論²⁾を応用して予測している。

間伐に伴う変化については、第III章で説明することとして、ここでは、林齢に伴う変化を表す確率論的直径成長モデル²⁸⁾について、その概略を説明する。

一般に、同齢単純林では、ある任意の期間の定期直径成長量と期首直径との間に、正の線形関係が認められる^{11,12)}が、この線形性を利用して各直径階の直径遷移確率を推定している。まず、この線形関係の特徴について説明する。

いま、横軸に期首の直径をとり縦軸に定期直径成長量をとった平面に、ある成長期間における各林木の直径成長量をプロットすれば、右上がりの回帰直線が得られる²⁹⁾。すなわち、ある成長期間について、各林木の定期直径成長量を比較すると、期首の直径が大きな林木ほど定期直径成長量も大きいという関係が認められる。この回帰直線の傾きは、若齢時には急であるが高齢になるにしたがい緩やかになる。回帰直線のまわりの各林木の定期直径成長量の散らばり具合を観察すると、そのばらつき方は直径の大きさに依存しないことが認められ、ばらつきの大きさは高齢になるにしたがって小さくなり、平均直径木の定期直径成長量にほぼ比例することが認められる。また、回帰直線は、通常 x 切片をもっており、その位置は高齢になるにしたがい横軸を右方向に移動するが、 x 切片と平均直径との間には線形関係が存在することが認められる。

以上の観察結果をもとに、回帰直線のまわりのばらつきを白色雑音と呼ばれる誤差変動としてとらえたモデルが、筆者の確率論的直径成長モデル²⁸⁾である。これを連続時間モデルとして微分方程式で表現すると次の様になる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t) - \kappa(t)} x(t) - \frac{\xi'(t) \kappa(t)}{\xi(t) - \kappa(t)} + r \xi'(t) f(t) \quad (1)$$

ここで、 t は林齢、 $x(t)$ は胸高直径、 $\xi(t)$ は平均胸高直径の成長曲線、 $\kappa(t)$ は x 切片、 r は比例定数、 $f(t)$ はホワイトノイズを表している。また、記号' は林齢 t に対する微分を示している。

この直径成長モデルは、鈴木^{21,22,23,24,25)}やスロボダ^{18,19,20)}のモデルを拡張したものであり、現実の同齢単純林が大小様々な大きさの林木によって構成されていることを拡散現象で説明しようとしたものである。

この直径成長モデルを用いることにより、ある任意の期間の定期直径成長量を直径階別に予測することができ、各直径階における誤差変動も正規分布で与えることができるので、各直径階の直径遷移確率は容易に計算できる。

なお、直径遷移確率を実際に計算しようとする、(1)式を具体的に定めなくてはならず、平均胸高直径の成長曲線のパラメータや、比例定数 γ などが必要となるが、これらの数値は、システム収穫表を起動する前に、予め求めておかねばならない。これらの数値を求めることができない場合は、本システムでは、システムに登録してある平均的な値を用いて計算している。予測精度を高めるためには、対象林分の過去の成長記録をもとに、これらの数値を個別に求めておいた方がよいことは言うまでもない。成長曲線のパラメータは、よく研究されているので、これを求めるのは比較的容易であるが、比例定数 γ などは、研究例が少なく、その性質はまだよく解明されていない。

システム収穫表は、方針さえ決まれば、それをプログラム化し、システムとして開発していくことは、それほど難しいことではない。もちろん、あらゆる場合を想定したソフトを作るには、膨大な作業と時間がかかる。本システムも未完成である。しかし、方針さえはっきりしていれば、ソフト作成の専門家に任すことができる内容である。

一方、成長パラメータ等の推定は、コンピュータ化が難しい部分である。成長パラメータを推定する資料として、収穫表、密度管理図、固定試験地資料、樹幹解析資料を想定しているが、利用できる資料の量や質は、対象林分によって実に様々である。多くの場合、研究者は、数少ないデータを詳細に検討することによって、成長パラメータを決めて行かねばならない。この部分の作業は、林学の専門知識と判断を必要とする。本システムでは、専門家の判断によって得られたパラメータを順次登録していき、そのパラメータを使用するか否かは、ユーザーの選択に任せるつもりである。

5. 修正HENRICKSEN式を用いた樹高曲線転位モデル

本システム収穫表では、収穫表の材積と、材積表から計算した材積とのかい離を無くしたいと考えている。そのためには、現在の林分、将来の林分にかかわらず、収穫表の立木材積を二変数材積表を用いて、直径階別立木本数と樹高曲線から計算することにすればよいであろう。

同齢単純林の場合、林齢が進むにつれて、樹高曲線は右上方に転位していくことが認められている^{10,11)}が、この転位は、当然、直径成長や樹高成長とは独立には論じられないものである。将来の樹高曲線を予測するモデルは、将来の直径分布や、将来の樹高分布を予測するモデルと矛盾するものであってはならない。

前述のように、同齢単純林では定期直径成長量と期首の直径との間に正の線形関係が認められている²⁸⁾。一方、定期樹高成長量は期首の樹高の大きさにかかわらず一定と見なせることが認められている³¹⁾。本システムでは、これらの線形性を利用して、将来の樹高曲線の定数を予測

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

している。なお、この目的のために、樹高曲線として、実験式である修正HENRICKSEN式

$$H_i = a + b \cdot \ln(D_i + c) \quad (2)$$

を採用している。ただし、 H_i は樹木番号 i の木の樹高、 D_i は樹木番号 i の木の胸高直径、 a 、 b 、 c は定数である。

以下、樹高曲線転位モデル³⁴⁾の概要を紹介しておく。

定期直径成長量 (ΔD_i) と期首直径 (D_i) との間に認められる線形性を

$$\Delta D_i = \alpha_L + \beta_L \cdot D_i \quad (3)$$

で表し、定期樹高成長量 (ΔH_i) と期首樹高 (H_i) との間の関係を

$$\Delta H_i = \gamma_L \quad (4)$$

で表す。ただし、 α_L 、 β_L 、 γ_L は、林齢に応じて変化する定数であり、添え字の L は、他の定数と区別するために付けたものであり、線形性を意味している。

いま、期首の樹高曲線が (2) 式で表されたとすると、期末の樹高曲線は、次の式で表されることが導かれる。

$$H_i = a' + b' \cdot \ln(D_i + c') \quad (5)$$

ただし、

$$a' = a - b \cdot \ln(1 + \beta_L) + \gamma_L$$

$$b' = b$$

$$c' = (1 + \beta_L) c - \alpha_L$$

このように、樹高曲線式として修正HENRICKSEN式を用いることにより、林分の成長に伴う樹高曲線の転位を同じ種類の曲線式のパラメータの変化によって表すことが可能となった。

期首の樹高曲線は、林分調査結果から得られるものであるが、一般に行われているように、標本木に関する胸高直径と樹高との関係から求めた樹高曲線で十分である。本システムでは、直径階別の平均樹高を入力すると、計算機内部で自動的に期首の樹高曲線を求めている。この場合の樹高曲線は通常のHENRICKSEN式であるが、これは (2) 式で $c = 0$ とおいた式であるので特に問題はない。通常のHENRICKSEN式は、直線関係に変形して当てはめができる²⁶⁾ので、計算機内部で処理できるという長所がある。

なお、間伐が実行されても、樹高曲線は変化しないと仮定している。

6. 二変数材積式による材積計算

既に述べたように、本システム収穫表では、収穫表の材積と、材積表から計算した材積とのかい離を無くしたいと考え、収穫表の立木材積を二変数材積表を用いて、直径階別立木本数と樹高曲線から計算している。

使用している材積表は、主として、林野庁計画課が取りまとめた立木幹材積表^{13,14)}である。材積表は材積式の形で計算機内に登録しており、ユーザーが選択するという方法を採用している。

本システム収穫表では、初期値として、期首の直径分布と各直径階別の平均樹高を入力すると、期首の樹高曲線を計算するとともに、選択した材積式を用いて期首の材積計算を行い、それらの結果をディスプレイに表示したり、プリンタに出力したりすることができる。よって、本システムは、毎木調査結果の取りまとめの目的にも使用することができるとともに、その結果をデータファイルに記録しておくことができる。

7. 直径成長の線形性に及ぼす林分密度の影響

直径成長の線形性、すなわち、定期直径成長量と期首直径との間に認められる正の線形関係が、間伐によってどのような影響を受けるかは、実のところよく分かっていない。これは、林分によって反応がいろいろに異なり、一定の傾向がつかめていないためである。そこで、密度試験地での傾向から類推することにした。

密度試験地での成長を解析した結果によれば、いずれの密度の場合も、直径成長の線形関係は認められ、しかも、その傾きはほぼ同じであった。回帰直線の定数項（ y 切片）は、林分密度によって異なり、低密度な林分ほど、定数項の値は大きかった³⁰⁾。

この結論からの類推により、本システムでは、間伐の効果も回帰直線の定数項に表れると仮定した。すなわち、間伐により、回帰直線は、左上の方向に平行移動するものと考えたことにした。

いま、回帰直線が平行移動すると仮定したので、その移動量は平均直径の平均成長量の増加量によって表すことができる。よって、間伐の効果は、平均直径の成長に及ぼす密度効果によって表現されることになり、競争—密度効果の理論が応用できることになる。

III. 競争—密度効果の逆数式に対する新解釈と最大林分断面積との関係

1. 競争—密度効果の逆数式の新しい解釈

植栽密度の違いが単木の成長に及ぼす影響を数量的に表したものに、篠崎・吉良による競争—密度効果の逆数式¹⁵⁾がある。これはロジスティック理論を基礎として、平均個体重 w と植栽密度 ρ との間に次のような逆数式が成り立つことを示したものである。

$$1/w = A \cdot \rho + B \quad (6)$$

ただし、 A 、 B は、林齢に伴い変化する定数である。

安藤は林木についてこの関係を調べ、平均幹材積 v と立木密度 ρ の間にも同様の逆数関係が成り立つことを示し、これを応用して密度管理図を作成した²⁾。また安藤は、平均胸高断面積 g と立木密度 ρ の間にも同様の逆数関係が成り立つことを示している²⁾。よって、逆数関係は、面的な広がりに対する密度効果であると考えられる。このことから、筆者は、競争—密度効果の逆数式を、ロジスティック理論にとらわれない立場から、以下のように解釈することにした³³⁾。なお、以下の議論では、林分密度以外の諸条件が等しい同齢単純林について考察している。

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

いま、林分密度が ρ であるとする、一本当たりの林木に割り当てられた面積は、 $1/\rho$ である。ここで、一本の林木が実際に占有している面積の平均を、 s で表すことにすると、単木当たりの平均未利用面積は $1/\rho - s$ になる。

ここで、次のような仮定を設ける。すなわち、ある林齢における平均未利用面積の平均実占有面積に対する比が、割当面積に比例するという仮定である。これは比例係数を α で表すことにすれば、数学的には

$$\frac{1/\rho - s}{s} = \alpha \cdot \frac{1}{\rho} \quad (7)$$

と表現される。これを s について解くと

$$s = 1/(\rho + \alpha) \quad (8)$$

になる。いま、平均個体重 w が s に比例し、その比例係数を β_w とすれば、結局、

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\beta_w \cdot s} = \frac{1}{\beta_w} \cdot \rho + \frac{\alpha}{\beta_w} = A \cdot \rho + B \quad (9)$$

となり、競争—密度効果の逆数式が誘導される。

なお、平均実占有面積 s は、樹冠の大きさ等に比例すると考えられるが、その具体的なイメージはまだ固まっていない。

安藤の研究²⁾により、競争—密度効果の逆数式が、平均単木幹材積についても成立することが報告されているので、その比例係数を β とすれば、すなわち、

$$v = \beta \cdot s \quad (10)$$

とすれば、

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\beta \cdot s} = \frac{1}{\beta} \cdot \rho + \frac{\alpha}{\beta} = A_v \cdot \rho + B_v \quad (11)$$

と表される。平均単木断面積については、その比例係数を λ とすれば、すなわち、

$$g = \lambda \cdot s \quad (12)$$

とすれば、

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{\lambda \cdot s} = \frac{1}{\lambda} \cdot \rho + \frac{\alpha}{\lambda} = A_g \cdot \rho + B_g \quad (13)$$

と表されることになる。ここで、係数 A_v , B_v , A_g , B_g については、安藤の研究²⁾により、各地域の各樹種の各成長段階について、詳しく求められている。よって、係数 α , β , λ は、安藤が求めた係数 A_v , B_v , A_g , B_g から推定することができる。すなわち、

$$\alpha = B_v / A_v \quad (14)$$

$$\beta = 1 / A_v \quad (15)$$

$$\alpha = B_g / A_g \quad (16)$$

$$\lambda = 1 / A_g \quad (17)$$

である。(14) 式と (16) 式に示されるように、 α については 2 つの推定値が得られる。

以上の議論は、ある特定の林齢についての考察であったが、係数 α , β , λ は、林分の成長に伴い変化する。 α , β , λ は、一般に、林齢の関数あるいは平均樹高の関数として表されており、安藤が求めた係数 A_v , B_v , A_g , B_g から推定すると、 α は成長に伴い単調に減少し、 β と λ は単調に増加する。

2. 林分の成長に伴う平均実占有面積の変化

単木当たりの平均実占有面積 (s) は、(8) 式に示されたように、 $s = 1 / (\rho + \alpha)$ である。通常の施業がなされている経済林では、自己間引きが起こることは稀であるので、林分密度 ρ は、間伐直後から次の間伐までの間は一定であると見なすことができる。よって、 s の変化は成長に伴う α の変化と間伐に伴う ρ の変化によって引き起こされる。

間伐がない場合、すなわち ρ が一定な場合には、 α が成長に伴い減少するから、単木当たりの平均実占有面積 s も大きくなっていく。

つぎに、間伐がある場合について考えてみよう。単位面積当たりの実占有面積を S で表すことにすれば、

$$S = s \cdot \rho \quad (18)$$

で表されるから、間伐が実行される前は、

$$\frac{1 - S}{S} = c \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\rho} \quad (19)$$

という関係が成立する。この式は、(7) 式を、単位面積当たりの実占有面積を用いて表現したものである。 c は補正項であって、いままで無間伐であれば 1 とする。間伐により、立木密度が ρ から ρ' に減少し、単位面積当たりの実占有面積が S から S' に減少したとする。ここで、 α の変化が間伐には影響されないと仮定し、間伐後も (19) 式と同様の関係を満たすとすれば、

$$\frac{1 - S'}{S'} = c' \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\rho'} \quad (20)$$

となる。(19) 式と (20) 式とから α を消去すれば、

$$c' = c \cdot \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{1 - S'}{1 - S} \cdot \frac{S}{S'} \quad (21)$$

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

を得る。補正項 c' は間伐が実行されるたびに变化する数字である。間伐後は、立木密度 ρ' と補正項 c' が一定という条件のもとで、 α の減少に応じて、単位面積当たりの実占有面積 S' が増加していく。なお、当然のことであるが、間伐の仕方により、単位面積当たりの実占有面積の減り方は異なる。間伐後の単木当たりの平均実占有面積 s' は、

$$s' = S' / \rho' \quad (22)$$

で与えられる。よって、このモデルは、間伐の前後で生ずる平均実占有面積の不連続な変化を表現することが可能である。また、このモデルでは、途中から立木密度が ρ' になった林分よりも、最初から立木密度が ρ' であった林分の方が、平均実占有面積が大きいことを示している。

3. α と平均樹高との関係

立木密度 ρ が一定な場合の平均実占有面積 $s(t)$ の変化は、結局、 $\alpha(t)$ の変化によって表されることになる。

$\alpha(t)$ の関数型を推定するために、次元解析を行うと、 A_v は長さの -1 乗、 B_v は長さの -3 乗、 A_g は無次元、 B_g は長さの -2 乗であることがわかる。よって、 α は長さの -2 乗の次元を持ち、 β は長さの 1 乗の次元を持つ。

安藤は日本各地の代表的な造林樹種に対して、平均幹材積と立木密度との関係および平均胸高断面積と立木密度との関係に逆数式をあてはめ、 A_v 、 B_v 、 A_g 、 B_g を調べた²⁾。その結果、安藤は、これらのパラメータと平均樹高 H との間にべき乗関係がよく成り立つことを見いだした²⁾。平均樹高は長さの次元を持っているので、 α は H^{-2} と β は H と密接な関係にあることが分かる。 α と $1/H^2$ の比例関係を調べると、比較的よいあてはまりを示すので、本システムでは、簡単なモデルとして、

$$\alpha(t) = K \cdot H(t)^{-2} \quad (23)$$

を仮定している。ただし、 K は比例定数である。さきに、 α は間伐によって変化しないと仮定したが、樹高成長は立木密度の影響をほとんど受けないから、 α を平均樹高の関数としても矛盾は生じない。 α を平均樹高の関数と仮定したことにより、林分密度 ρ が一定な場合は、実占有面積 s もまた、平均樹高の関数となる。このことは、占有された空間の広がり方が、単純に時間のみ依存しているのではなく、むしろ林木の大きさと深い関係があることを示しており、理解しやすいモデルであろう。

α は立木密度と同じ次元を持っており、その林分の平均的な大きさの林木が単位面積当たりありと α 本生育できる余裕があることを示していると解釈できる。なお、 α を一種の本数密度として考えると、 $\alpha(t) = K \cdot H(t)^{-2}$ は、 $1 / (H(t) \cdot \sqrt{\alpha}) = 1 / \sqrt{K}$ と変形できるので、平均樹高 H に対する $1 / \sqrt{\alpha}$ の比が一定であることを示しており、これは α が相対幹距一定で減少することを示している。また、 α を平均樹高の関数とすれば、(19) 式は次のように書き直すことができる。

$$\frac{1 - s \cdot \rho}{s \cdot \rho} = c \cdot K \cdot \frac{1}{H^2} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (24)$$

この式は、未利用面積の実占有面積に対する比が、相対幹距の2乗に比例することを意味している。

本システムでは平均樹高の成長にMITSCHERLICHの成長曲線

$$H(t) = H_{\max} \cdot (1 - L_H \cdot \exp(-k_H t)) \quad (25)$$

を当てはめた結果を用いている。これは、日本の造林樹種の樹高成長に対して、同成長曲線がよい適合を示すためである。(25)式において、 $H_{\max}$ は樹高成長の上限値を示すパラメータであり、 L_H 、 k_H はその他の成長パラメータである。各成長パラメータは、過去の成長記録などをもとに、専用ソフト『MGLFIX』²⁾を用いて求めておき、システム収穫表に登録しておく。なお、周辺ソフトによる解析結果とシステム収穫表のデータファイルとの結合は、現在のところ未完成である。

4. 平均実占有面積と平均胸高断面積との関係

平均直径の成長を考察するまえに、まず、平均実占有面積 $s(t)$ と平均胸高断面積 $g(t)$ との関係について考察する。なぜならば、胸高断面積を正円と見なせば、平均胸高直径 $D(t)$ は平均胸高断面積 $g(t)$ から求めることができるからである。

林分密度 ρ が一定な場合の、林分の成長に伴う平均実占有面積 s の変化は、 α を平均樹高 H の関数と見なすことによって表現することができたが、平均樹高 H は (25) 式によって時間の関数として表現されるので、ここでは、平均実占有面積 s を時間の関数として表現し考察することにする。

(12) 式は各成長段階で成り立つと仮定されたのであるから、平均実占有面積 $s(t)$ と平均胸高断面積 $g(t)$ との間に、

$$g(t) = \lambda(t) \cdot s(t) \quad (26)$$

という比例関係が成り立つ。ここで、比例定数 λ は時間の関数であり、成長にともない変化すると仮定している。(17) 式より A_g は $1/\lambda$ であるから、 A_g は平均実占有面積 s の平均胸高断面積 g に対する倍率を示している。安藤によれば、 A_g は成長に伴い単調に減少し、高齢になるに従い安定する傾向にある²⁾。よって、 λ は成長に伴い単調に増加し高齢になるに従い上限値に漸近していくものと予想される。安藤が求めた A_g の単位を検討すれば、安藤の表に示してある A_g の値の10,000倍が実際の倍率であることが分かる。

なお、 A_g のこのような解釈からすれば、 λ は林分密度の影響を受ける可能性もあるのではないかと考えられるが、そのように考えると競争—密度効果のモデルそのものが崩れてしまうので、本システムでは、 λ は時間あるいは平均樹高の関数であると仮定し、密度の関数でないと仮定し

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

ている。この仮定は、林分密度 ρ の影響は、平均実占有面積 s に対しても、平均胸高断面積 g に対しても、同様に作用し、両者間の比を表す倍率については影響が無いと考えるものである。

5. 平均直径の成長

平均胸高直径の上限値は、平均実占有面積 s の上限値と λ の上限値から算出できる。平均実占有面積の上限値は $1/\rho$ である。 λ の上限値を λ_{max} とすれば、平均胸高断面積の上限値 g_{max} は、

$$g_{max} = \lambda_{max} / \rho \quad (27)$$

となる。平均胸高直径 D と平均胸高断面積 g との間には、

$$g = \pi / 4 \cdot (D^2 + \sigma^2) = \pi / 4 \cdot D^2 \cdot (1 + C.V.^2) \quad (28)$$

という関係がある。ここで、 σ^2 は直径分散であり、 $C.V.$ は直径分布の変動係数である。よって、平均胸高直径の上限値を D_{max} 、直径分布の変動係数の上限値を $C.V._{max}$ とすれば、林齢が無限大の極限状態について、次の関係が成立する。

$$\pi / 4 \cdot D_{max}^2 \cdot (1 + C.V._{max}^2) = \lambda_{max} / \rho$$

すなわち、

$$D_{max}^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + C.V._{max}^2} \cdot \lambda_{max} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (29)$$

である。ここで、あとの考察で便利のように

$$M_D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + C.V._{max}^2} \cdot \lambda_{max} \quad (30)$$

とおくことにする。

ところで、平均胸高直径の成長には、MITSCHERLICHの成長曲線がよい適合を示すことが知られている。よって、本システムでは、平均胸高直径の成長は、基本的にはMITSCHERLICHの成長曲線に従うものとし、平均胸高直径の成長を次のように仮定している。

$$D(t) = \sqrt{\frac{1}{\rho + c \cdot \alpha}} \cdot M_D \cdot (1 - L_D \cdot \exp(-k_D t)) \quad (31)$$

ただし、 L_D 、 k_D は、それぞれ成長パラメータである。(31) 式では、平均胸高直径の成長を表すMITSCHERLICH曲線の上限値のみが、立木密度の影響を受けると仮定している。ここで、 c は間伐のたび毎に変化する補正項であり、 α は平均樹高の関数である。

平均胸高直径に対するこの仮定は、 $\lambda(t)$ が以下のような関数型であることを示している。

$$\lambda(t) = \frac{1 + C \cdot V_{\max}^2}{1 + C \cdot V_{\max}^2} \cdot \lambda_{\max} \cdot (1 - L_D \cdot \exp(-k_D t))^2 \quad (32)$$

IV. 各成長段階における最大林分断面面積の推定

1. 最大林分断面面積としての λ の役割

(31) 式を次のように変形すると

$$\sqrt{\rho + c \cdot \alpha} \cdot D(t) = M_D \cdot (1 - L_D \cdot \exp(-k_D t)) \quad (33)$$

右辺はMITSCHERLICH曲線になるので、左辺の値が既知であれば、最小2乗法を適用することによって、成長パラメータ M_D , L_D , k_D を推定することができる。しかし、多くの場合、補正項 c の値が未知であるので、まず、補正項 c の値を推定する必要がある。

補正項 c は、間伐が実行されるたび毎に変化する係数であり、それは、(21) 式で与えられるが、これを計算するためには、間伐前後の単位面積当たりの実占有面積、すなわち S と S' が必要となる。しかし、 S' を α を用いて決めようとする、間伐後の補正項 c' が必要となり、結局、堂々巡りになってしまい、こうした方法では、補正項 c を推定することはできない。

そこで、別の方法を考えることにする。ha 当たりの胸高断面面積合計、すなわち、林分断面面積 ($G(t)$) は、平均胸高断面面積 $g(t)$ と本数密度 ρ との積で表されるので、これを (26) 式に適用すると

$$G(t) = \rho \cdot g(t) = \lambda(t) \cdot \rho \cdot s(t) = \lambda(t) \cdot S(t) \quad (34)$$

という関係が成立する。いま、 $S(t)$ が単位面積全体を覆いつくした場合を考えると、すなわち $S(t) = 1$ の場合を考えると、 $\lambda(t)$ は最大林分断面面積を示すことになる。(34) 式の間係を用いると、(21) 式は、

$$c' = c \cdot \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{\lambda - G'}{\lambda - G} \cdot \frac{G}{G'} \quad (35)$$

と表される。よって、 λ の値、すなわち、各成長段階における最大林分断面面積が推定できれば、(35) 式を用いて補正項 c' を計算することができる。

2. 成長パラメータ M_D , L_D , k_D および、補正項 c の推定方法

林分の成長に伴う λ の変化は、(32) 式によって与えられているが、最大林分断面面積を持つ林分は、現実にはほとんど存在しないので、(32) 式のパラメータを最小2乗法によって推定することは、事実上、不可能である。

(17) 式に示したように、 λ は、平均単木断面面積について成立する競争—密度効果の逆数式の係数 A_g の逆数として与えられるから、この関係を用いて λ を推定する方法が考えられる。既に述べたように、日本各地の代表的な造林樹種については、安藤によって、 A_g と平均樹高との関

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

係が調べられている²⁾ので、これらの資料から、 A_g を平均樹高の関数として表すことができる。 A_g と平均樹高との間の関係式については、次節以降で具体的に検討するが、ここではその関数が定まり、 $\lambda(H)$ の値が推定できたものとして話を進めよう。

いま、 $\lambda(H)$ が推定できたので、平均断面積 (g) が分かっているならば、 s は (12) 式より推定できる。一方、(31) 式は、 $D = \sqrt{s} \cdot M_D \cdot (1 - L_D \cdot \exp(-k_D t))$ と書き直すことができるので、(31) 式は、最終的に

$$\sqrt{\lambda/g} \cdot D = M_D \cdot (1 - L_D \cdot \exp(-k_D t)) \quad (36)$$

のように表すことができる。いま、成長予測をしようとしている林分について、過去の調査結果が得られているとしよう。林齢 t 年の時の平均断面積、平均直径、平均樹高を、それぞれ $g(t)$ 、 $D(t)$ 、 $H(t)$ で表し、その時の最大林分断面積の推定値を $\lambda(H(t))$ で表せば、(36) 式の左辺を具体的に定めることができるので、右辺の MITSCHERLICH 成長曲線を最小 2 乗法²⁾ であてはめることができる。よって、成長パラメータ M_D 、 L_D 、 k_D を推定することができる。

補正項 c' は (35) 式によって推定できるが、現実には、補正項 c の初期値が不明であることが多い。補正項 c は、次のように推定できる。林齢 t 年の時の林分密度 $\rho(t)$ も、過去の調査結果から明かであるので、成長パラメータ M_D 、 L_D 、 k_D が推定された後の (31) 式に、 $\rho(t)$ を代入すると、林齢 t 年のときの $c \cdot \alpha$ を求めることができる。成長予測が目的の場合は、一番最近の調査結果を用いて $c \cdot \alpha$ を求め、その時の α を (23) 式で推定し、補正項 c を決定すればよい。

なお、林分の成長に伴う α の推移を各林分についてより正確に推定したい場合は、(35) 式を適用することによって、間伐の前後の補正項 c の値を順次求めておき、(31) 式を用いて上述のようにして求めた $c \cdot \alpha$ を、求めておいた c の値で除して、 α を推定すればよい。

(31) 式の平均胸高直径の成長曲線を求めることは、(32) 式の λ の増加曲線を求めることと表裏一体であるから、以上述べた方法は、平均樹高の関数として示された λ の値を、各林分の成長傾向に応じて、林齢の関数として表現しなおしたことに相当する。

3. 成長に伴う最大林分断面積の推移例

安藤が求めた係数 A_g の値²⁾を用いて、成長に伴う最大林分断面積の推移について調べてみた。図-1 は、愛知・岐阜地方のスギの例である。横軸は平均樹高、縦軸は $\sqrt{\lambda}$ 、すなわち係数 A_g の逆数の平方根である。各点は安藤が求めた数値を表している。この図が示すように、全体としては、増加傾向を示しているが、 $\sqrt{\lambda}$ のバラツキは大きい。これまでの考察により、 λ は単位面積当たりの最大林分断面積を表すと解釈することができたので、図-1 に表されているデータに対して、単調増加曲線を当てはめることができる。

$\lambda(t)$ の関数型については、さきに (32) 式で示したが、安藤の資料では林齢との関係が不明なので、このモデルを当てはめることができない。ここでは、単に λ の単調増加の傾向線を求め

図－1 林分の成長に伴う最大林分断面積の平方根の推移
(愛知・岐阜地方のスギ)
安藤貴(1968)の表－8の常数から推定した。

るという目的で実験式を採用することにする。安藤は、実験式として、平均樹高を独立変数としたべき乗式を採用し、両対数平面での直線式の当てはめによって推定値を得ている²⁾が、推定結果を、実平面に描いてみると、当てはめた結果が良好でない場合もある。よって、本論文では、実平面上で最小2乗法を行うことにした。

図－1に示された曲線は、 λ の平方根に対して、独立変数を平均樹高とした原点を通るMITSCHERLICH曲線

$$\sqrt{\lambda(H)} = \sqrt{\lambda'_{max}} \cdot (1 - \exp(-k'H)) \quad (37)$$

を最小2乗法²⁾で当てはめたものである。この場合の上限値 $\sqrt{\lambda'_{max}}$ は14.7m/100mと推定され、それを平方すると216.1m²/haとなった。しかし、この上限値は決して到達できない架空の値であることに注意しなければならない。なぜなら、この値は実験式から得られたものであり、横軸が林齢ではなく平均樹高であるからである。生物学的な上限値は平均樹高の最大値から推定すべきであり、いま最大平均樹高が30mであるとするすると約142m²/haになる。なお、一般的に高齢なスギ同齢単純林の林分断面積は林地面積の約1%である。すなわち約100m²/haである。

4. 樹種別・地方別および成長段階別の最大林分断面積の推定値

安藤は、日本各地の主要造林樹種について、胸高断面積等平均樹高線に関する逆数式の常数を求め、表にまとめている²⁾。本論文では、これらの数値に(37)式を最小2乗法で当てはめ、成長段階別の λ 、すなわち最大林分断面積を、樹種別・地方別に推定した。その結果は、以下の表－1～4に示した通りである。なお、樹高階は、一律に6mから40mまでとし、2m間隔で示

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

した。ここで、高い樹高に対する推定値は、外挿による数値であることを断わっておく。また、表の最下段には、(37) 式のパラメータを示した。

表-1. 各地のスギの最大林分断面積 (λ) (m^2/ha)

樹高階 (m)	飢 肥	熊 本	土 佐	愛 知 岐 阜	紀 州	天 城
6	21.5	19.5	28.4	17.1	36.8	26.3
8	32.3	30.9	39.6	27.4	50.5	36.8
10	42.8	43.2	49.1	38.7	61.8	45.8
12	52.6	55.9	56.9	50.4	70.8	53.3
14	61.4	68.4	63.0	62.3	77.7	59.3
16	69.2	80.5	67.8	74.0	83.0	64.0
18	76.0	92.1	71.5	85.3	86.9	67.6
20	81.8	103.0	74.3	96.2	89.9	70.4
22	86.8	113.1	76.4	106.4	92.0	72.5
24	91.0	122.5	78.0	116.1	93.6	74.2
26	94.6	131.1	79.2	125.0	94.8	75.4
28	97.6	139.0	80.1	133.4	95.7	76.3
30	100.1	146.2	80.8	141.1	96.3	77.1
32	102.2	152.7	81.3	148.1	96.8	77.6
34	103.9	158.5	81.7	154.6	97.1	78.0
36	105.4	163.8	82.0	160.5	97.3	78.3
38	106.6	168.5	82.2	165.9	97.5	78.5
40	107.6	172.8	82.3	170.9	97.7	78.7
(37) 式の 上限値	10.6	14.4	9.1	14.7	9.9	8.9
k'	0.096	0.061	0.147	0.055	0.158	0.143

樹高階 (m)	茨 城	北関東 阿武隈	越 後 会 津	山 形	秋 田	青 森
6	29.3	31.1	64.2	33.9	64.4	74.1
8	41.9	44.9	78.6	46.3	80.5	93.6
10	53.2	57.4	87.8	56.6	91.3	107.1
12	62.8	68.4	93.5	64.6	98.4	116.0
14	70.8	77.7	96.9	70.8	102.8	121.9
16	77.4	85.4	99.0	75.4	105.6	125.7
18	82.7	91.7	100.2	78.9	107.4	128.1
20	86.8	96.8	101.0	81.4	108.5	129.6
22	90.2	100.9	101.4	83.3	109.2	130.6
24	92.8	104.2	101.6	84.7	109.6	131.2
26	94.8	106.8	101.8	85.7	109.8	131.6
28	96.4	108.9	101.9	86.4	110.0	131.8
30	97.7	110.5	101.9	87.0	110.1	132.0
32	98.6	111.8	102.0	87.3	110.2	132.1
34	99.4	112.9	102.0	87.6	110.2	132.1
36	100.0	113.7	102.0	87.8	110.2	132.2
38	100.4	114.3	102.0	88.0	110.2	132.2
40	100.8	114.8	102.0	88.1	110.2	132.2
(37) 式の 上限値	10.1	10.8	10.1	9.4	10.5	11.5
k'	0.128	0.121	0.263	0.161	0.241	0.230

安藤貴 (1968) の表-8 の常数から推定した。

樹種別の傾向を表-5にまとめた。(37)式の上限值を比較してみると、スギが最も大きく、ヒノキ、アカマツ、カラマツの順に小さくなっていた。 k' の値は、スギが最も小さく約0.150

表-2. 各地のヒノキの最大林分断面積 (λ) (m^2/ha)

樹高階 (m)	九 州	土 佐	紀 州	飛 騨	木 曽
6	50.6	27.8	55.8	33.9	34.8
8	56.8	40.4	66.4	46.3	44.8
10	59.8	51.9	72.7	56.6	52.1
12	61.2	62.0	76.4	64.6	57.1
14	61.8	70.7	78.4	70.8	60.5
16	62.1	77.9	79.6	75.4	62.8
18	62.3	83.8	80.2	78.9	64.3
20	62.4	88.7	80.6	81.4	65.3
22	62.4	92.6	80.8	83.3	66.0
24	62.4	95.8	80.9	84.7	66.4
26	62.4	98.3	80.9	85.7	66.7
28	62.4	100.4	81.0	86.4	66.9
30	62.4	102.0	81.0	87.0	67.0
32	62.4	103.3	81.0	87.3	67.1
34	62.4	104.3	81.0	87.6	67.1
36	62.4	105.1	81.0	87.8	67.2
38	62.4	105.7	81.0	88.0	67.2
40	62.4	106.2	81.0	88.1	67.2
(37) 式の 上限値 k'	7.9 0.384	10.4 0.118	9.0 0.295	9.4 0.161	8.2 0.212
樹高階 (m)	大 井 天 竜	愛 知 岐 阜	天 城	富 士 箱 根	北 関 東
6	23.0	50.7	62.4	41.6	31.8
8	35.0	62.5	69.5	55.6	44.3
10	47.1	70.3	72.9	66.6	55.1
12	58.7	75.1	74.4	74.9	64.0
14	69.4	78.1	75.1	81.0	71.0
16	79.1	80.0	75.4	85.4	76.5
18	87.8	81.1	75.6	88.5	80.8
20	95.4	81.8	75.6	90.8	84.0
22	102.1	82.2	75.7	92.3	86.5
24	107.9	82.4	75.7	93.4	88.4
26	113.0	82.6	75.7	94.2	89.8
28	117.3	82.7	75.7	94.8	90.9
30	121.0	82.7	75.7	95.1	91.7
32	124.1	82.8	75.7	95.4	92.3
34	126.8	82.8	75.7	95.6	92.7
36	129.1	82.8	75.7	95.7	93.1
38	131.0	82.8	75.7	95.8	93.3
40	132.7	82.8	75.7	95.9	93.5
(37) 式の 上限値 k'	11.9 0.086	9.1 0.254	8.7 0.397	9.8 0.179	9.7 0.145

安藤貴 (1968) の表-10の常数から推定した。

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

表-3. 各地のアカマツの最大林分断面積 (λ) (m^2/ha)

樹高階 (m)	北九州	土佐 西部	四国 内海	中国 内海	近畿	磐城	岩手
6	27.7	46.8	17.8	19.1	18.2	35.9	27.9
8	35.4	60.2	26.2	26.6	26.3	44.4	34.9
10	40.9	69.9	34.1	32.9	33.9	50.0	39.5
12	44.6	76.6	41.2	38.0	40.5	53.6	42.5
14	47.1	81.2	47.4	42.0	46.1	55.8	44.4
16	48.8	84.3	52.7	45.1	50.8	57.2	45.6
18	49.8	86.3	57.2	47.5	54.7	58.0	46.4
20	50.5	87.7	60.9	49.3	57.9	58.5	46.9
22	51.0	88.6	64.0	50.7	60.4	58.8	47.1
24	51.3	89.1	66.5	51.7	62.5	59.0	47.3
26	51.5	89.5	68.6	52.5	64.1	59.1	47.4
28	51.6	89.8	70.3	53.1	65.5	59.2	47.5
30	51.7	89.9	71.7	53.5	66.5	59.2	47.5
32	51.7	90.0	72.8	53.8	67.4	59.3	47.6
34	51.8	90.1	73.7	54.1	68.0	59.3	47.6
36	51.8	90.2	74.4	54.2	68.6	59.3	47.6
38	51.8	90.2	75.0	54.4	69.0	59.3	47.6
40	51.8	90.2	75.5	54.5	69.3	59.3	47.6
(37) 式の							
上限値	7.2	9.5	8.8	7.4	8.4	7.7	6.9
k'	0.219	0.212	0.109	0.149	0.118	0.251	0.242

安藤貴 (1968) の表-12の常数から推定した。

表-4. 各地のカラマツの最大林分断面積 (λ) (m^2/ha)

樹高階 (m)	信州	岩手
6	25.5	31.3
8	33.4	40.8
10	39.3	47.8
12	43.6	52.9
14	46.7	56.5
16	48.8	58.9
18	50.2	60.6
20	51.2	61.7
22	51.9	62.4
24	52.3	63.0
26	52.6	63.3
28	52.9	63.5
30	53.0	63.7
32	53.1	63.8
34	53.2	63.9
36	53.2	63.9
38	53.2	63.9
40	53.2	64.0
(37) 式の上限値		
	7.3	8.0
k'	0.196	0.200

安藤貴 (1968) の表-14の常数から推定した。

であるのに対して、他の樹種は概ね0.2 前後であった。ヒノキは k' の値が0.4 に近いものがあったという点で特徴的である。平均樹高が30mの時の最大林分断面積を比較してみると、やはり、スギが最も大きく、ヒノキ、アカマツ、カラマツの順に小さくなっていた。平均値で見ると、スギは唯一 $100\text{m}^2/\text{ha}$ を越えていた。また、アカマツとカラマツはよく似た傾向を示していた。

表- 5. 最大林分断面積に関する各樹種の特徴

樹 種	(37) 式のパラメータ		平均樹高が30mの時の 最大林分断面積 (m^2/ha)
	上 限 値 ($\text{m}/100\text{m}$)	k'	
	最小～平均～最大	最小～平均～最大	
ス ギ	8.9～10.8～14.7	0.055～0.150～0.263	77.1～106.7～146.2
ヒ ノ キ	7.9～ 9.4～11.9	0.086～0.223～0.397	62.4～ 86.6～121.0
アカマツ	6.9～ 8.0～ 9.5	0.109～0.186～0.251	47.5～ 62.9～ 89.9
カラマツ	7.3～ 7.7～ 8.0	0.196～0.198～0.200	53.0～ 58.4～ 63.7

安藤貴 (1968) の表- 8, 10, 12, 14の常数から推定した。

V. 自然間引きに関する $3/2$ 乗則との関係

十分にうっ閉した純群落では、しばしば、平均個体重 w と密度 ρ との間に、

$$w \cdot \rho^m = \text{const.} \quad (38)$$

の関係が認められ、定数 m の値が $3/2$ に近い値であることから、この関係は自然間引きに関する $3/2$ 乗則と呼ばれている^{7,35)}。 $3/2$ 乗則は、草本、木本にかかわらず広く認められる現象である。

ここで、平均幹材積 v についても $3/2$ 乗則が成り立つと仮定し、 $m=3/2$ とすると、(38)式は(39)式のように表される。

$$v \cdot \rho^{3/2} = \text{const.} \quad (39)$$

さらに、平均幹材積 v が平均直径 D の3乗に比例すると仮定し、これを

$$v = f \cdot D^3 \quad (40)$$

で表し、(39)式に代入すると、

$$f \cdot D^3 \cdot \rho^{3/2} = \text{const.} \quad (41)$$

が得られるから、(41)式の両辺を $2/3$ 乗すると、結局

$$D^2 \cdot \rho = \text{const.} \quad (42)$$

が得られる。これは、単位面積当たりの胸高断面積、すなわち林分断面積が一定であることを示している。ただし、ここでは、直径分散を無視して議論している。

いままでの考察により、最大林分断面積は、すなわち λ は、時間の経過とともに単調に増加し、

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

やがて一定値に達することが判明している。最大林分断面積を示す林分は十分にうっ閉している
とみなすことができるので、最大林分断面積が一定値に達した状態は、 $3/2$ 乗則が成立する状
態であると考えることができる。このことから逆に、十分にうっ閉していても、最大林分断面積
がまだ一定値に達していない場合は、 $3/2$ 乗則は成立しないことになる。林分の成長に伴い最
大林分断面積が単調に増加し、やがて上限値に達する過程は、林分密度管理図上で、自然枯死線
(自然間引線)が最多密度曲線に交わっていく過程を表していると考えられる。

最大林分断面積を有する林分での、林分の成長にともなう本数密度の減少については、資料の
関係もあり、まだ十分には解明されていないので、いまここで、自然枯死線の関数型を具体的に
表すことはできない。しかし、本数密度が減少していても、各成長段階での最大林分断面積が維
持されているような林分では、林分密度管理図に見られるように、自然枯死線が滑らかな曲線を
描きながら最多密度曲線に接していくであろうことは直感的に理解できる。

VI. 葉量あるいは樹冠長との関係

III章では、 λ を平均断面積 g と平均実占有面積 s とを関連付ける関数として、(26)式のよう
に定義した。また、IV章では、各成長段階における λ の値について検討した。この章では、 λ を
別の角度から考察する。

平均実占有面積を $s(t)$ で表し、単位実占有面積当たりの葉量を $L(t)$ で表すと、単木当たり
の平均葉量は $L(t) \cdot s(t)$ となる。パイプモデル^{16,17)}を仮定すると、単木当たりの平均生枝下高
断面積($g_B(t)$)が単木当たりの平均葉量($L(t) \cdot s(t)$)に比例すると考えられるから、その
比例定数を p とすれば、

$$g_B(t) = p \cdot L(t) \cdot s(t) \quad (43)$$

と表すことができる。さらに、平均生枝下高断面積($g_B(t)$)と平均胸高断面積($g(t)$)との
間に、

$$g(t) = \eta(t) \cdot g_B(t) \quad (44)$$

という関係が成り立つと仮定し、(44)式を(43)式に代入すると

$$g(t) = \eta(t) \cdot p \cdot L(t) \cdot s(t) \quad (45)$$

のように表すことができる。ここで、 $\eta(t)$ は、平均生枝下高断面積に対する平均胸高断面積の
比を表す関数であり、この値は、枝の枯上がりや枝打ちの仕方によって変化するが、その変化は
小さいと考えられる。 $\eta(t)$ や p および $L(t)$ についてはまだ十分に解明されていないので、い
ま、

$$\eta(t) \cdot p \cdot L(t) = \lambda(t) \quad (46)$$

とおくことにすれば、(26)式の $g(t) = \lambda(t) \cdot s(t)$ が得られる。

さて、単位実占有面積当たりの葉量($L(t)$)であるが、これは平均樹冠長($CL(t)$)に比例
すると考えられるので、いま、これを、

$$L(t) = l \cdot CL(t) \quad (47)$$

で表すことにする。ただし、 l は係数である。樹冠長は、林木の成長に応じて変化すると考えられ、枝打ちが実施されていないと仮定すれば、この変化は単調増加であると考えられる。樹冠長が長くなることによって、単位実占有面積当たりの葉量が増加するが、これを平面に投影して考えると、単位面積当たりの葉面積の増加であると解釈することができる。すなわち、樹冠の上部の葉によって利用されなかった光が樹冠下部の葉によって利用されると考え、樹冠長が増すにつれて、葉面積合計が増加し、光の利用効率が増大するという考え方である。陽葉、陰葉の相違は、陰葉の陽葉に対する光合成能力の比率を考えることにより、こうした考え方の中に取り込むことができる。

(47) 式を (46) 式に代入すると

$$\lambda(t) = \eta(t) \cdot p \cdot l \cdot CL(t) \quad (48)$$

となり、 λ が単木当たりの平均樹冠長と密接な関係があることが示される。ここで、もし、樹冠長率が一定であれば、

$$CL(t) = k_c \cdot H(t) \quad (49)$$

となり、これを (48) 式に代入すると、 λ は平均樹高と密接な関係を持つことになるが、一般的に樹冠長率は一定でないので、 λ を平均樹高の関数であるとは見なさない。

上述のように、樹冠長の増加を葉面積の増加と解釈することができるので、その増加関数は面積的な増加、すなわち2次元量的な増加に従うものと考えられる。(48) 式の $\eta(t)$ が安定していれば、結局、 $\lambda(t)$ も2次元量的な増加に従うものと考えられる。この結果は、(32) 式で示した $\lambda(t)$ の関数型がMITSCHERLICH曲線の2乗の式を含んでいることと整合性がある。なぜなら、鈴木がベルタランフィの理論から誘導したように、MITSCHERLICH曲線は生物体の1次元量の成長を示すと考えられるからである²⁵⁾。

このようにパイプモデルを採用することにより、 λ が単木当たりの平均葉量あるいは平均樹冠長と密接な関係があることが示された。これらの関係は、まだ十分に解明されていないので、現在開発中のシステム収穫表には取り入れていないが、こうした考え方は、将来、枝打ちの影響による成長の変化を予測する場合の足掛りになるものと考えている。

VII. おわりに

1989年4月に、システム収穫表の共同研究が始まったが、東京で開かれた企画会議では、システム収穫表の概念は、従来の収穫表の形式と林分密度管理図の機能とを統合したものであり、しかも、ユーザーにとって使いやすいソフトウェアであるといった内容であった。従来の収穫表では、施業体系は固定的であり、得られる情報も平均値や総量に関する情報に限られていた。林分密度管理図では、下層間伐しか取り扱えないという制限があるものの、様々な間伐に対応できるようになり、施業体系も経営目標に応じて自由に選択できるようになった。しかし、得られる情

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

報は、従来の収穫表と同様、平均値や総量に関する情報に限られていた。パソコンの普及とともに、従来の収穫表や林分密度管理図に関わる仕事を、パソコンを使って処理しようとするのは自然の流れであり、また時代の流れでもある。システム収穫表では、今までの収穫試験や成長モデルの研究成果を取り入れて、平均値や総量に関する情報だけでなく、直径分布の情報なども予測できるようにしたいと考えた。

直径分布の予測法は、理論的な直径分布を使うかどうかで大きく二つに分類することができる。理論的な直径分布を用いる方法は、将来の平均直径や直径分散などの分布統計量を予測し、それらの予測値と等しい統計量を有する理論的な分布を、将来の直径分布とする方法である。この方法の代表的なものは、理論分布として、WEIBULL分布を用いるものである^{1,5,6,8)}。なお、詳細は知らないが、1984年当時のWeyerhaeuser社の予測システムも、先に統計量を予測し、後で直径分布を推定するという方法であるようだ³⁾。これに対するもう一つの方法は、直径分布に理論分布を当てはめず、林分表（直径階別本数分布）を用いる方法である。この方法では、各直径階の成長量を予測し、それに基づいて将来の直径分布を予測する。今回報告したVPM法に基づくシステム収穫表は、後者の方法に属する。林分表を用いる予測法では、直径階ごとに成長量を予測するので、直径分布の形状については、あまりこだわらなくても良いという利点がある。現実の直径分布は、必ずしも理論分布に近い分布を呈している訳ではなく、特に、間伐直後の直径分布は、人為の影響を強く受けており、これに理論分布を当てはめようとするのは無理である。

VPM法に基づくシステム収穫表では、各直径階の直径成長量の予測に、確率論的なモデルを採用している。このモデルは、林分遷移の方程式を発展させ、改良したものであり、基本的な考え方は、林齢が同じならば、直径が太い林木ほどよく成長するが、林木によってばらつきがあるというモデルである。モデルに含まれる各種パラメータは、固定試験地や樹幹解析の資料を用いて、予め推定しておく必要がある。これらのパラメータについては、まだ研究例が少なく、樹種による相違や、地域による特性などの調査、解析は、今後の課題である。

直径階別の直径成長量を調べてみると、同齢単純林の場合は、定期直径成長量と期首の直径との間に明瞭な直線関係が認められる。この直線関係の存在によって、全林木の定期直径成長量の平均と、平均直径木の定期直径成長量の平均とが一致することになる。よって、直径成長の予測が容易となるとともに、平均直径に関する今までの研究成果を、そのままこのモデルに取り込むことができる。間伐の効果については、競争—密度効果の逆数式モデルを採用することにした。

このように、VPM法に基づくシステム収穫表は、林分遷移の方程式^{18,19,20,21,22,23,24,25)}と競争—密度効果の逆数式の理論¹⁵⁾を基礎にし、両モデルに最近の研究成果^{28,31,32,33)}を取り入れて応用している。よって、このシステムで使われているモデルは、全く新しいモデルではなく、先人の業績を踏まえ、それらを発展させたモデルである。

競争—密度効果の逆数式のモデルでは、実占有面積という概念を取り入れ、逆数式モデルの係数を見直した。その結果、平均断面積と立木密度との間に成り立つ逆数式、すなわち(13)式の

係数 A_0 の逆数が、各成長段階における最大林分断面積を示すものであると解釈できた。係数 A_0 の逆数は、(17)式に示したように、本論文では λ で表している。安藤の資料を用いて、日本各地の主要造林樹種について、 λ を成長段階別に推定した。また、 $3/2$ 乗則^{7,35)}との関係についても論じた。(26)式に示したように、 λ は平均実占有面積と平均胸高断面積との間の比例係数であると定義されるが、パイプモデル^{16,17)}を仮定することにより、 λ が葉量や樹冠長率とも関係することが示された。

枝打ちの実行が林木の成長に及ぼす影響については、まだ解明できていない点が多く、今回のシステムには取り入れられていない。枝打ちにより葉量が減少するから、当然、直径成長にも影響が及ぶと考えられる。将来的には、葉量の変化を取り入れた直径成長モデルの構築が必要であり、それに伴い λ の見直しも必要に迫られるであろう。

実占有空間(s)を推定するには、(8)式を用いて α から推定する方法と、(12)式を用いて λ から推定する方法の2通りの推定方法が考えられる。本論文では、 λ から推定する方法を採用した。その理由は、 λ が各成長段階における最大林分断面積と解釈でき、しかも、その大きさについては経験的におよそその値を知っているため、推定値に誤りがないかどうか判断できるためである。 α は立木本数密度と同じ次元を持っており、その林分の平均的な大きさの立木が単位面積当たりあと α 本生育できる余裕があることを示していると解釈できるが、 α については馴染みが薄く、その大きさについても見当を付け難いことから、今回は採用しないことにした。

本論文では、 λ を各成長段階における最大林分断面積と解釈し、その傾向について、安藤の資料を用いて詳しく解析したが、同様の研究は β についても可能である。 β は、平均幹材積と立木密度との間に成り立つ逆数式、すなわち(11)式の係数 A_0 の逆数であり、各成長段階における最大蓄積を示すと解釈できる。よって、 β は長さと同じ次元を持ち、林分の成長にともない単調な増加傾向を示すものと予想される。時間の経過にともなう A_0 の傾向に対して、従来は、ダイズの圃場栽培の例をもとに、 A_0 は、成長のごく初期には時間の経過とともに急速に増大するがすぐピークに達して、それから後は時間の経過とともに減少し、ある一定値に漸近すると見なされていた^{4,35)}が、 A_0 の逆数、すなわち β が時間の経過とともに単調に増加すると解釈した方が理解し易いと考える。

本論文では、 β については解析しなかったが、これは、 β を用いて予測された材積と、材積表から計算した材積とが一致しないであろうと予想したためである。VPM法に基づくシステム収穫表では、現在の林分、将来の林分にかかわらず、立木材積を二変数材積表を用いて、林分表(直径階別立木本数)と樹高曲線から計算しているので、 β を使う必要はない。

今回のモデルは、密度効果を篠崎・吉良が提唱した逆数式で表しているのだから、安藤が作成した密度管理図と共通する点もある。しかし、単位面積当たりの実占有面積という概念を持ち込むことにより、間伐による平均直径の不連続な変化に対応できるようにした。間伐の内容に応じて計算される補正項 c は、間伐の都度、成長曲線を乗り換えるという従来の方法を是正するものであ

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

る。よって、このモデルでは、はじめから密度が ρ である林分の成長と、間伐によって途中から密度が ρ になった林分の成長とは異なる結果となる。

予測に最低限必要な情報は、予測しようとする林分の面積、林齢、平均樹高、そして直径分布である。間伐の記録（間伐の時期と立木密度）や、平均樹高および平均胸高直径の成長経過が分かっているならば、なお望ましい。他の林分情報は、とりあえず、今までの研究例や固定試験地の結果から推定した値を用いればよい。各パラメータを正確に求めることは理想ではあるが、実際に応用しようとする場合には、必要なデータがすべて揃うことはまれである。また、必要なデータを収集しようとしても、林分の成長が遅いため、現時点では不可能な場合も多い。我々は現実の林分の成長を、いま予測する必要がある、それを基に経営戦略を立てる必要に迫られている。必要なデータが揃わない場合は、システム収穫表ではシステムにあらかじめ登録してある標準値を用いて予測計算を実行することができるようにしてある。すなわち、システム収穫表はデフォルト機能を備えている。今回、各成長段階別の最大林分断面積を報告したが、これらの数値も、デフォルト値として登録され利用される予定である。なお、平均胸高直径の成長や、平均樹高の成長に、MITSCHERLICH曲線を当てはめた場合のパラメータについても、日本各地の収穫表について求めてある³⁰⁾ので、必要に応じてこれらのパラメータを利用することが可能である。

システム収穫表では、各種のパラメータを、各林分ごとに属性データとして登録している。必要な情報が入手できない場合には、デフォルト値が登録される。システム収穫表を利用しているうちに、個々の林分のデータも蓄積されていくから、それらのデータを利用して、パラメータを決め直し、修正されたパラメータを登録することも可能である。このようにして、各林分の属性ファイルが更新されていき、それに伴い予測精度も向上していくものと予想している。さらに、属性ファイルが各林分の個別情報を集積していくにしたがい、自ずとデータベースが完成されて行くことになる。現在、この部分のソフトは開発中であり、まだ実用段階には至っていないが、このような目標のもとに、システム収穫表を改良していく考えである。

システム収穫表は、現在入手可能な資料を基に成長予測を行うが、データが整備されて行くにつれて、パラメータをより良いものに順次取り替えていく。これと同様に、サブルーチンとしてシステムに登録されている各モデルについても、より良いモデルに順次取り替えていくことが可能である。たとえば、将来的には、枝打ちの影響を取り入れたモデルに取り替えることが必要であろう。このように、システム収穫表は、広く使われることで進化し、新しいモデルを取り込むことによって発展していくという可能性を秘めている。

システム収穫表は、差し当たりの意思決定に必要な情報を与えるシステムであり、その決定された意思は、状況に応じて適宜見直される必要があるであろう。現在のところ、各林分に関する個別情報が不足しているため、予測誤差も大きいものと予想される。精度を向上させるには、個別情報、すなわち属地情報を収集し、管理していくことが必要である。そのためには、属地情報を登録・管理する機能をシステム収穫表自身が備えていることが不可欠であるとともに、属地情

報に対する研究が一層推進されることを望む。本研究は、このような考え方にに基づき、属地情報の一つである最大林分断面積を、各地域の主要造林樹種について、成長段階別に推定したものである。

最後に、パイプモデルの理論について有益な助言を与えて下さいました三重大学生物資源学部の武田明正助教授に深く感謝いたします。

引用文献

- 1) 阿部信行：森林施業におけるワイブル分布の利用例。林統研誌**7**:28～36, 1982
- 2) 安藤 貴：同齢単純林の密度管理に関する生態学的研究。林試研報**210**:1～153, 1968
- 3) DEPTA, D., J.: Integrated forest planning systems at Weyerhaeuser company.
Proc. IUFRO symposium on forest management planning and managerial economics,
Tokyo, 184-194, 1984
- 4) 穂積和夫：植物の相互作用。124pp, 共立出版, 東京, 1973
- 5) 柿原道喜：ワイブル分布とその応用。林統研誌**7**:37～43, 1982
- 6) 木梨謙吉：人工林の直径分布について (I) ワイブル分布のパラメータと年齢。
89回日林論:59～60, 1978
- 7) 吉良龍夫編：密度・競争・生産。みやま**8**:13～24, **9**:9～18, **11&12**:34～45, 大阪営林局, 1957
- 8) 箕輪光博：生長モデルとしてのワイブル分布について。林統研誌**7**:44～53, 1982
- 9) 内藤健司：ロジスティック理論と密度管理—その展開過程—。林統研誌**8**:1～13, 1983
- 10) 南雲秀次郎・箕輪光博：測樹学。現代林学講義**10**, 243pp, 地球社, 東京, 1990
- 11) 大隅眞一編：森林計測学講義。287pp, 東京, 1987
- 12) PRODAN, M.: Messung der Waldbestände. 260pp, J. D. Sauerländer's Verlag,
Frankfurt/M., 1951
- 13) 林野庁計画課編：立木幹材積表 —東日本編—。日本林業調査会, 東京, 333pp, 1970
- 14) 林野庁計画課編：立木幹材積表 —西日本編—。日本林業調査会, 東京, 319pp, 1970
- 15) SHINOZAKI, K. and T. KIRA: Intraspecific competition among higher plants VII.
Logistic theory of the C-D effect. J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. **D7**: 35～72,
1956
- 16) SHINOZAKI, K., K. YODA, K. HOZUMI and T. KIRA: A quantitative analysis of plant
form — the pipe model theory. I. Basic analysis. Jap. J. Ecol. **14**:97～105, 1964a
- 17) ———, ———, ——— and ———: A quantitative analysis of plant form — the
pipe model theory. II. Further evidence of the theory and its application in forest
ecology. Jap. J. Ecol. **14**:133～139, 1964b
- 18) SLOBODA, B.: Mathematische und stochastische Modelle zur Beschreibung der Dynamik
von Bäumen und Beständen, insbesondere das bestandes-spezifische Wachstum als
stochastischer Prozess, Freiburg i. Br. eingereicht als Habilitation an der Forstl.
Fakultät. 153～265, 1976

Jpn. J. For. Plann. 16 '91

- 19) ----- : KOLMOGOROW-SUZUKI und stochastische Differentialgleichung als Beschreibungsmittel der Bestandesevolution. Mitt. der For. Bundesversuchsanstalt Wien **120** : 71~82, 1977
- 20) ----- : Possibilities of mathematically predicting timber production in commercial forests. Bull. Nagoya Univ. For. **7** : 261~279, 1984
- 21) 鈴木太七: 確率過程としての林分の遷移 (I). 日林誌**48**: 436~439, 1966
- 22) ----- : 同上 (II). 日林誌**49**: 17~19, 1967a
- 23) ----- : 同上 (III). 日林誌**49**: 208~210, 1967b
- 24) ----- : 同上 (IV). 日林誌**49**: 402~404, 1967c
- 25) ----- : 森林経理学. 197pp, 朝倉書店, 東京, 1979
- 26) 田中和博: 樹高曲線と材積推定. J. PC-For. **1**(2):9~16, 1983
- 27) ----- : 成長曲線のあてはめ. J. PC-For. **1**(4):7~14, 1983
- 28) TANAKA, K.: A stochastic model of diameter growth in an even-aged pure forest stand. J. Jpn. For. Soc. **68**:226~236, 1986a
- 29) 田中和博: ある時間断面における個々の林木の期首直径と定期成長量との関係. J. PC-For. **4**:14~29, 1986b
- 30) ----- : 本邦収獲表の主林木平均直径生長および平均樹高生長にMITSCHERLICH生長曲線をあてはめた場合のパラメータの推定値. J. PC-For. **4**:161~169, 1986c
- 31) TANAKA, K.: A stochastic model of height growth in an even-aged pure forest stand. J. Jpn. For. Soc. **70**:20~29, 1988a
- 32) ----- : Effects of stand density on the increment of trees in an even-aged pure stand. Proc. of IUFRO Forest Growth Modelling and Prediction Conference, Minneapolis, Vol. **2** : 644~651, 1988b
- 33) ----- : Prediction of diameter distribution in an even-aged pure stand. Proc. Japan and New Zealand symposium on forestry management planning, 111~129, 1989
- 34) 田中和博: 林分の成長に伴う樹高曲線の転位と修正HENRICKSEN式の適用. 日林誌, 投稿中
- 35) 依田恭二: 森林の生態学. 331pp, 築地書館, 東京, 1971