t 分布表における t 値の再検討

Re-examination of t-Values in the t-Distribution Table

新潟大学医学部専門課程 4 年 (同大学衛生学教室気付)

佐 藤 新

Arata Sato

Niigata University School of Medicine, Niigata

The percentage point values of the Student's t-distribution were calculated with a Sharp PC-1211 calculator down to the fourth decimal place.

When the data were compared with those in the Fisher and Yates' t-table (1949), five errors were found in the latter: for 31. 598 (D. F.=2, P=0.001) read 31. 599; for 12. 941 (D. F.=3, P=0.001) read 12. 924; for 6.859 (D. F.=5, P=0.001) read 6.869; for 5.405 (D. F.=7, P=0.001) read 5.408 and for 3.767 (D. F.=23, P=0.001) read 3.768. Although three of the errors were corrected in the 1963 edition, two erroneous values, 31. 598 and 3.767 remained.

The author found that most textbooks for statistics quoted the original table, except for those written by Yamauti et al. (1972) and Kuebler et al. (1976). Such errors in quotation obviously need to be corrected.

I. 緒 言

無作為標本の定量的材料を検定する際、母集団標準偏差が未知で標本数が小さい場合、1908年、“Student” (Gosset, W. S.)¹⁾の発表した t 分布を利用することが多い。わが国ではその際、Fisher ら^{2,3)}の報告した t 分布表が一般に用いられている。

ところで、新潟大学医学部の衛生学実習では、疫学調査が課されており、そのデータ処理にはコンピューターが使用されている。コンピューターによる t 分布表作成の際、従来の統計学テキストの t 分布表と、一部計算結果に相違の存在することが判明した。

そこで今回、その相違箇所を指摘するとともに、若干の考察を加えたので報告する。

II. 方 法

Student の t 分布は、つぎの式で表現される⁴⁻⁶⁾。

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (n: \text{自由度})$$

またガンマ関数は、

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{w-1} dt \quad (w > 0)$$

と定義され、m を自然数とすれば、

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

$$\Gamma\left(m - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \times (2m-2)!}{2^{2m-2} \times (m-1)!}$$

で表わされる^{7,8)}。

Fig. 1 に、t 分布表を作成するにあたって開発したプログラムの概略を示した。なお、計算に用いたシャープ PC-1211 は、その有効桁数が10桁であるが、最終的に出力したのは5桁である。

III. 結 果

Table 1 は、各自由度 (D. F.) について、有意水準を P とした時、

$$\frac{P}{2} = \int_t^{\infty} p(t) dt$$

をみたす T を示したものである。Fig. 2 に、この関係を図示した。

Table 2 に、Fisher ら²⁾ (1949)、および Merrington⁹⁾ (1941) の t 分布表の t 値と、今回えた値との相違を示した。Table 2 に示すように、それぞれ5カ所ずつの相違

Fig. 1 Flow chart for the t-value calculation

をみだした。ただし、1963年出版の Fisher ら¹⁰⁾の t 分布表では、12.941 (D. F.=3, P=0.001), 6.859 (D. F.=5, P=0.001), 5.405 (D. F.=7, P=0.001) については正しい値に訂正されている。また、Table 2 に示した以外の著者¹¹⁻¹³⁾の作成した表にも、今回えた値と相違のある t 分布表が存在している。それを Table 3 に示した。

Fig. 2 An illustration of area (P/2) tabulated in "Table 1"

IV. 考 察

t 分布表の値 T が計算者によって異なった場合、検算には逆算を行うのがよい。すなわち、D. F. と T から P を計算するか、P と T から D. F. を求めるのである。ここでは、前者による検算が簡便なため、それを実施した。

$$P = 2 \times \int_T^{\infty} p(t|D. F.) dt \quad (1)$$

シンプソン則、および部分積分による展開式^{1,4,14,15)}の 2 方法によって、(1)式の積分を行う。

D. F.=23, T=3.767 を代入すると、

$$P = 2 \times \int_{3.767}^{\infty} p(t|23) dt \\ \approx 1.0015 \times 10^{-3}$$

また、Table 1 から、D. F.=23, T=3.768 を代入すると、

$$P = 2 \times \int_{3.768}^{\infty} p(t|23) dt \\ \approx 0.9991 \times 10^{-3}$$

この両者は、 $P=1.0000 \times 10^{-3}$ となることを期待しての検算であるから、わずかではあるが、T=3.768 とした方が、より真値に近いことをうかがわせる。このようにして Table 2 に示した相違点を確認したところ、今回作成した Table 1 の値を採用すべきだとの結論に達した。

つぎに、部分積分による展開式から、T を直接求める式を導く ($0 < P < 1$)。

$$D. F.=1 \longrightarrow T = \tan\left\{(1-P) \times \frac{\pi}{2}\right\} \quad (2)$$

$$D. F.=2 \longrightarrow T = \tan\{\sin^{-1}(1-P)\} \times \sqrt{2} \quad (3)$$

ここで、(3)式に $P=0.001$ を代入し有効桁数 8 桁として T を求めると、

$$T \approx 31.599055$$

となる。最後の 1~2 桁の信頼性はともかく、これによって、D. F.=2, P=0.001 については、やはり積分で P を求めた場合と同一の結論に到達する。

Table 2 に示した Merrington⁹⁾ (1941) のものとの相違点に言及しよう。Merrington は、Thompson¹⁶⁾ による不完全ベータ関数の表に基づいて計算したという。著者が同表に基づいて追試したところ、D. F.=15, P=0.1 外は計算ミスであろうことが判明した。D. F.=15, P=0.1 の場合については、Thompson の表自体に内在する誤差のためであると思われる。Comrie ら¹⁷⁾の記述から、Thompson の表よりも 2 桁多く算出して試みたところ、Table 1 の値 T がえられた。Merrington が、有効数字

Table 1 The Student's t-distribution percentage points

D.F. \ P	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
1	6.3138	12.706	63.657	127.32	636.62
2	2.9200	4.3027	9.9248	14.089	31.599
3	2.3534	3.1824	5.8409	7.4533	12.924
4	2.1318	2.7764	4.6041	5.5976	8.6103
5	2.0150	2.5706	4.0321	4.7733	6.8688
6	1.9432	2.4469	3.7074	4.3168	5.9588
7	1.8946	2.3646	3.4995	4.0293	5.4079
8	1.8595	2.3060	3.3554	3.8325	5.0413
9	1.8331	2.2622	3.2498	3.6897	4.7809
10	1.8125	2.2281	3.1693	3.5814	4.5869
11	1.7959	2.2010	3.1058	3.4966	4.4370
12	1.7823	2.1788	3.0545	3.4284	4.3178
13	1.7709	2.1604	3.0123	3.3725	4.2208
14	1.7613	2.1448	2.9768	3.3257	4.1405
15	1.7531	2.1314	2.9467	3.2860	4.0728
16	1.7459	2.1199	2.9208	3.2520	4.0150
17	1.7396	2.1098	2.8982	3.2224	3.9651
18	1.7341	2.1009	2.8784	3.1966	3.9216
19	1.7291	2.0930	2.8609	3.1737	3.8834
20	1.7247	2.0860	2.8453	3.1534	3.8495
21	1.7207	2.0796	2.8314	3.1352	3.8193
22	1.7171	2.0739	2.8188	3.1188	3.7921
23	1.7139	2.0687	2.8073	3.1040	3.7676
24	1.7109	2.0639	2.7969	3.0905	3.7454
25	1.7081	2.0595	2.7874	3.0782	3.7251
26	1.7056	2.0555	2.7787	3.0669	3.7066
27	1.7033	2.0518	2.7707	3.0565	3.6896
28	1.7011	2.0484	2.7633	3.0469	3.6739
29	1.6991	2.0452	2.7564	3.0380	3.6594
30	1.6973	2.0423	2.7500	3.0298	3.6460
40	1.6839	2.0211	2.7045	2.9712	3.5510
50	1.6759	2.0086	2.6778	2.9370	3.4960
60	1.6706	2.0003	2.6603	2.9146	3.4602
Infinite	1.6449	1.9600	2.5758	2.8070	3.2905

Notes: D.F. = degree of freedom

P = probability

5 桁の不完全ベータ関数の表¹⁶⁾から、同じ桁数の t 値を算出した⁹⁾のであれば、それには、いささか無理があったようだ。ただし、現在までに訂正されている可能性もある。

ところで、過去に発表された t 分布表は、すでに述べた

ように二、三の問題点を有しているが、コンピューター使用により作成された表では、少なくとも、ここに述べたような問題点については解決しているように思われる。ちなみに、山内ら^{18,19)}による表、および、Kuebler ら²⁰⁾の著書にみる表では、正確な値がえられている。

Table 2 Discrepancies in t-values in the tables of Fisher et al. and Merrington

	Present analysis	Fisher et al. (1949)		Present analysis	Merrington (1941)
D.F.=2 P=0.001	31.599	31.598	D.F.=3 P=0.05	3.1824	3.1825
D.F.=3 P=0.001	12.924	12.941	D.F.=15 P=0.1	1.7531	1.7530
D.F.=5 P=0.001	6.869	6.859	D.F.=15 P=0.05	2.1314	2.1315
D.F.=7 P=0.001	5.408	5.405	D.F.=17 P=0.005	3.2224	3.2225
D.F.=23 P=0.001	3.768	3.767	D.F.=60 P=0.1	1.6706	1.6707

Notes: D.F.=degree of freedom

P =probability

最後に指摘しておかねばならないことは、多くの統計書が、誤りの存在する1949年当時の t 分布表²⁾をいまだ引用していることである。

1970年以降、日本で出版された統計書につき、著者の散見した範囲で述べると、有意水準0.001の t 値を掲載している12冊²¹⁻³²⁾総てに、上記5つの誤りが存在した(山内ら^{18,19)}のものは除く)。また、著者が調べた1970年以降の欧米の統計学テキストで、有意水準0.001の t 値を掲載している15冊³³⁻⁴⁷⁾では、上記5つの誤りがあるものは6冊⁴²⁻⁴⁷⁾である(Kuebler ら²⁰⁾のものは除く)。

そこで、洋の東西を問わず、これら誤りの早急な訂正が望まれる。

V. 結 語

t 分布のパーセント点を算出したところ、従来の t 分布表と一部計算結果が異なっていた。1949年の Fisher ら²⁾の著書にみるこのような誤りは、1963年のそれ¹⁰⁾では訂正されている。しかし、多くの統計書の t 分布表は、誤りの存在する1949年当時の表をいまだ引用しているから、その早急な訂正が望まれる。

本論文のご指導をいただいた新潟大学医学部衛生学教室山本正治助教授に、心から感謝の意を表します。

文 献

1) "Student": The probable error of a mean,

Biometrika, 6, 1-25 (1908).

- 2) Fisher, R. A. and Yates, F.: Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, 3rd ed., p. 32, Oliver and Boyd, Edinburgh (1949).
- 3) Fisher, R. A.: Statistical Methods for Research Workers, p. 174, Oliver and Boyd, Edinburgh (1950).
- 4) Fisher, R. A.: The mathematical distributions used in the common tests of significance, Econometrica, 3, 353-365 (1935).
- 5) Pearson, E. S. and Hartley, H. O.: Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1, 3rd ed., p. 19-25, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1966).
- 6) 上村 桂: 医統計学, p. 45-46, 文永堂, 東京 (1979).
- 7) 高木貞治: 解析概論, 改訂第三版, p. 248-263, 岩波書店, 東京 (1975).
- 8) 寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論 (増訂版), p. 207-214, 岩波書店, 東京 (1977).
- 9) Merrington, M.: Table of percentage points of the t-distribution, Biometrika, 32, 300 (1942).
- 10) Fisher, R. A. and Yates, F.: Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, 6th ed., p. 46, Oliver and Boyd, Edinburgh (1963).
- 11) Federighi, E. T.: Extended tables of the percentage points of Student's t-distribution, J.

Table 3 Discrepancies in t-values in the tables of Federighi, Smirnov and Owen

D.F.	P	present t-values	reported t-values	D.F.	P	present t-values	reported t-values
1	0.001	636.62	636.6096	14	0.01	2.9768	2.9769
2	0.005	14.089	14.0906		0.001	4.1405	4.1406
	0.001	31.599	31.598*	15	0.05	2.1314	2.1315
3	0.05	3.1824	3.1825				2.1315**
	0.01	5.8409	5.8410		0.005	3.2860	3.2861
4	0.1	2.1318	2.1319		0.001	4.0728	4.0729
	0.05	2.7764	2.7765	16	0.001	4.0150	4.0151
	0.01	4.6041	4.6042	17	0.005	3.2224	3.2225
	0.005	5.5976	5.5977				3.223*
5	0.1	2.0150	2.0151		0.001	3.9651	3.9653
	0.01	4.0321	4.0322	18	0.01	2.8784	2.8785
			4.0322**		0.001	3.9216	3.9218
	0.005	4.7733	4.7734	19	0.005	3.1737	3.1738
6	0.01	3.7074	3.7075		0.001	3.8834	3.8835
	0.005	4.3168	4.3169	20	0.01	2.8453	2.8454
	0.001	5.9588	5.9593		0.001	3.8495	3.8496
7	0.005	4.0293	4.0294	21	0.001	3.8193	3.8194
	0.001	5.4079	5.4083	22	0.005	3.1188	3.1189
8	0.1	1.8595	1.8596		0.001	3.7921	3.7923
	0.005	3.8325	3.8326	23	0.001	3.7676	3.7677
	0.001	5.0413	5.0417	24	0.01	2.7969	2.7970
9	0.01	3.2498	3.2499		0.005	3.091	3.090*
	0.001	4.7809	4.7812		0.001	3.7454	3.7455
10	0.001	4.5869	4.5871				
11	0.001	4.4370	4.4372				
12	0.01	3.0545	3.0546				
	0.005	3.4284	3.4285				
	0.001	4.3178	4.3180				
13	0.001	4.2208	4.2210				

Notes: D.F.=degree of freedom

P =probability

* -t-values from Federighi(1959)

** -t-values from Owen(1962)

All others -t-values from Smirnov(1961)

Am. Statist. Assoc., 54, 683-688 (1959).

- 12) Smirnov, N. V.: Tables for the Distribution and Density Functions of t-Distribution ("Student's" Distribution), p. 123-125, Pergamon Press, Oxford (1961).
- 13) Owen, D. B.: Handbook of Statistical Tables, p. 27-30, Addison-Wesley, Massachusetts (1962).
- 14) Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: Handbook of

Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, p. 948-949, Dover, N. Y. (1965).

- 15) 戸田英雄, 清水龍蔵, 竹内寿一郎: 統計分布と電子計算機(5), 3. t-分布の展開式と近似式の検討, 標準化と品質管理, 22, 51-60(1969).
- 16) Thompson, C. M.: Tables of percentage points of the incomplete beta-function, Biometrika, 32,

- 168-181 (1941).
- 17) Comrie, L. J. and Hartley, H. O.: Tables of percentage points of the incomplete beta-function. Description of the calculation and methods of interpolation, *Biometrika*, **32**, 154-167 (1941).
- 18) 山内二郎：統計数値表 JSA-1972, 数値表 p. 30, 日本規格協会, 東京(1972).
- 19) 山内二郎：簡約統計数値表, p. 14, 日本規格協会, 東京(1977).
- 20) Kuebler, R. R. and Smith, H. Jr.: *Statistics: A Beginning*, p. 303, John Wiley and Sons, N. Y. (1976).
- 21) 植松 稔：健康統計学, p. 142-143, 金原出版, 東京(1970).
- 22) 古屋芳雄, 宮坂五一郎：医学統計法, p. 210, 金原出版, 東京(1971).
- 23) 植松 稔：保健統計学, p. 176-177, 杏林書院, 東京(1974).
- 24) 鳥居敏雄, 高橋暁正, 土肥一郎：医学・生物学のための推計学, 附表 p. 12, 東京大学出版会, 東京(1975).
- 25) 上村 桂：医統計学, p. 231, 文永堂, 東京(1979).
- 26) 杉田暉道：プリンシパル例解医学統計, p. 156, 日本医事新報社, 東京(1980).
- 27) 仮谷太一：医学・生物学の統計学, p. 236, 共立出版, 東京(1980).
- 28) 奥野忠一, 芳賀敏郎：実験計画法, p. 280, 培風館, 東京(1980).
- 29) 水島治夫：簡約統計学, p. 173-174, 南江堂, 東京(1981).
- 30) 吉田洋一, 吉田正夫：数表, p. 186-187, 培風館, 東京(1981).
- 31) 小泉 明, 山中 学：医学統計・数値表, p. 257, 日本評論社, 東京(1981).
- 32) 国沢清典, 岩崎 隆：統計学入門, p. 152, 広川書店, 東京(1981).
- 33) Armitage, P.: *Statistical Methods in Medical Research*, p. 462-463, Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh (1971).
- 34) Chou, Ya-lun: *Statistical Analysis with Business and Economic Applications*, p. 864, Holt, Rinehart and Winston, N. Y. (1975).
- 35) Chase, C. I.: *Elementary Statistical Procedures*, p. 248, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo (1976).
- 36) Beyer, W. H.: *CRC Handbook of Mathematical Sciences*, p. 786, CRC Press, Boca Raton (1978).
- 37) Phillips, D. S.: *Basic Statistics for Health Science Students*, p. 142, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1978).
- 38) Stevenson, W. J.: *Business Statistics: Concepts and Applications*, p. 484, Harper and Row, N. Y. (1978).
- 39) Lapin, L. L.: *Statistics: Meaning and Method*, p. 515, Harcourt Brace Jovanovich, N. Y. (1980).
- 40) Hiller, F. S. and Lieberman, G. J.: *Introduction to Operations Research*, p. 802, Holden-Day, San Francisco (1980).
- 41) Hines, W. W. and Montgomery, D. C.: *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*, p. 596, John Wiley and Sons, N. Y. (1980).
- 42) Larson, H. J.: *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference*, p. 402, John Wiley and Sons, N. Y. (1974).
- 43) Kennedy, J. B. and Neville, A. M.: *Basic Statistical Methods for Engineers and Scientists*, p. 457, Harper and Row, N. Y. (1976).
- 44) Alder, H. L. and Roessler, E. B.: *Introduction to Probability and Statistics*, p. 368, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1977).
- 45) Haber, A. and Runyon, R. P.: *General Statistics*, Table C, Addison-Wesley, Massachusetts (1977).
- 46) Milis, R. L.: *Statistics for Applied Economics and Business*, p. 600, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo (1977).
- 47) Snedecor, G. W. and Cochran, W. G.: *Statistical Methods*, p. 469, The Iowa State University Press, Ames (1980).

(受付 1982年 1月12日)