4. *Differentialkugelgeometrie, XI. Vierscheitelsatz in der konformen und Laguerreschen Geometrie.*

Von TSURUSABURO TAKASU

(Eingegangen am 10. Dezember, 1932)

A. Kneser⁽¹⁾ hat in der Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber den folgenden sogenannten Vierscheitelsatz der Eilinen bewiesen: Auf einer Eilinie liegen mindestens vier Scheiteln. Dabei versteht man unter Scheitel den Kurvenpunkt, in welchem die Krümmung extrem wird. Davor kommt aber die Arbeit Herrn S. Mukhopadhyayas⁽²⁾. Die Herren W. Blaschke⁽³⁾, G. Herglotz⁽⁴⁾, H. Mohrmann⁽⁵⁾, W. Voigt⁽⁶⁾ und W. Süss⁽⁷⁾ haben verschiedene Beweise dafür gegeben. Herr T. Hayashi⁽⁸⁾ hat einige Bemerkungen dazu gemacht. Herr P. Ganapati hat einige Sätze über Vierscheitelsatz der Eilinen hinzugefügt⁽⁹⁾. Betreffs der Raumkurven hat Herr W. Süss⁽¹⁰⁾ den folgenden Satz bewiesen: Jede geschlossene Raumkurve, die zu ihrer Bildkurve $\epsilon(s)$ „punktweise parallel liegt“ und von der je zwei Punkte in einer Ebene liegen, die mit ihr keine weitere Punkte gemein hat, besitzt mindestens vier Scheiteln.

(¹) A. Kneser, Bemerkung über die Anzahl der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie, Leipzig (1912).

(²) S. Mukhopadhyaya, New Methods in the Geometry of a Plane Arc, Bull. Calcutta Math. Soc., Vol. 1 (1909). S. Mukhopadhyaya, Extended Minimum-Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a Plane Convex Oval, Math. Z., Bd. 37 (1931). Siehe auch seine gesammelte Werke.

(³) W. Blaschke, Kreis und Kugel, (1916), S. 160. W. Blaschke, Die Minimalanzahl der Scheitel einer geschlossenen konvexen Kurve, Rend. di Palermo, Bd. 36 (1913), S. 220-222.

(⁴) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, I (1921), S. 15.

(⁵) H. Mohrmann, Die Minimalzahl der Scheitel einer konvexen geschlossenen Kurve, Rend. di Palermo, Bd. 37 (1914), S. 267-268.

(⁶) W. Voigt, Über monotongekrümmte Kurven, Crelle's Journal, 144 (1914), S. 239-248.

(⁷) W. Süss, Einige mit dem Vierscheitelsatz für Eilinen zusammenhängende Sätze, Tôhoku Math. Journal, Vol. 28 (1927), S. 216.

(⁸) T. Hayashi, Some Geometrical Applications of Fourier Series, Rend. di Palermo, Bd. 50 (1926), S. 96.

(⁹) P. Ganapati, Theorems on Ovals. Annamalai Univ. J., 1 (1932), S. 67-71.

(¹⁰) W. Süss, Zur relativen Differentialgeometrie IV: Ein Vierscheitelsatz bei geschlossenen Raumkurven, Tôhoku Math. Journal, vol. 29 (1923), S. 362.

(Diese allgemeine Kurvenklasse kann nun in einem erweiterten Sinne relativ eben genannt werden; sie enthält diejenigen Kurven, deren R -Binormalen konstante Richtung besitzen). Ich habe einen analogen sich um die Dualkrümmung der Raumkurven betreffenden Satz bewiesen⁽¹¹⁾. In dieser Note ist es bezweckt eine analoge Methode zum Herglotzschen zum Vierscheitelsatz in der konformen und Laguerreschen Ebene zu verwenden und einige verwandte Ergebnisse zu erzielen. Die entsprechende Theorie in der Lieschen höheren Kreisgeometrie wird als eine getrennte Abhandlung erscheinen⁽¹²⁾.

I. Vierscheitelsatz in der konformen Geometrie.

Geometer sind meistens mit Kurventheorie mehr interessiert als mit Kreisscharentheorie. Objektiv ist das aber falsch aus dem Grunde, dass *die konforme Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kurventheorie die Kreisscharentheorie ist, während jede konforme Kurventheorie je eine konforme Verallgemeinerung der gewöhnlichen Theorie der einzelnen speziellen Kurven ist*. Mithin möchte ich hier zuerst den Vierscheitelsatz für die Kreisscharen (die je zwei Kurven umhüllen) aufstellen und dann das sogewonnene Ergebnis zum Falle der Kurven spezialisieren, indem ich die Tangentialkreise (als Elemente der Kreisscharen) der Kurven konform spezialisieren.

Den Begriff der *konformen Krümmung*, den der *konformen Dualkrümmung* und den der *konformen Raumkrümmung* der Kreisschar (sowie der Kurven) habe ich dadurch zur Ausreife gebracht, dass ich den drei nacheinanderfolgenden Nachbarkreise der Kreisschar gemeinsamen orthogonalen Kreis als instantanen nicht-euklidischen absoluten Kegelschnitt betrachtet habe und die ganze lokale Metrik darauf beziehen lies. Dabei wurde die konforme Dualkrümmung zur durch Herrn H. Liebmann zuerst rechnerisch eingeführten konformen Kurveninvariante zu, wenn man als den Tangentialkreis der Kurve den durch Herrn G. Thomsen zuerst eingeführten "Hauptkreis" annimmt. Die konforme

(¹¹) T. Takasu, Vierscheitelsatz für Raumkurven. Tôhoku Math. J., Vol. 39 (unter der Presse).

(¹²) T. Takasu, Vierscheitelsatz in der Lieschen höheren Kreisgeometrie. Tôhoku Math. J., vol. 38 (unter der Presse).

Bei der Korrektur ist die folgende Arbeit erschienen: D. Fog, Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen, Sitzungsberichte d. Preus. Akad. d. Wiss., (1933), S. 251-254.

Krümmung R^{-1} , die konforme Dualkrümmung P^{-1} und die konforme Raumkrümmung μ^2 sind durch die folgende Beziehung verbunden:

$$R^{-1} = -\mu P.$$

Entsprechendes gilt auch für konforme Raumkurven.

I. 1. Ableitungsgleichungen. Sind $\xi(s) ((\xi\xi)_4=1)$ die tetrazyklischen Kreiskoordinaten des Elements einer Kreisschar, die zwei Kurven

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}(s), & (\mathfrak{x}\mathfrak{x})_4 &= 0, \\ \bar{\mathfrak{x}} &= \bar{\mathfrak{x}}(s), & (\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}})_4 &= 0 \end{aligned}$$

umhüllt, und s die auf die Kreisschar $\xi(s)$ bezogene konforme Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$, so gelten die folgenden Ableitungsgleichungen⁽¹³⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = t, \\ \frac{d\xi}{ds} = -\frac{t}{R}, \end{cases} \quad ((tt)_4=1),$$

wobei die tetrazyklischen Punktkoordinaten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ durch zwei Forderungen

$$(2) \quad (\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_4 \equiv 2k^2 \text{ (konst.)}$$

$$(3) \quad (d\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})_4 \equiv -(d\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{x})_4 \equiv 0$$

bis auf konstante Faktoren wohl konform normiert sind und

$$(4) \quad ds^2 = (d\mathfrak{x} d\mathfrak{x})_4, \quad d\sigma^2 = (d\xi d\xi)_4,$$

$$(5) \quad \frac{d\sigma}{ds} \equiv \frac{1}{R} = \left[\left(\frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \right)_4 - \mu^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\mu^2 = \text{die konforme Raumkrümmung})$$

ist.

I. 2. Die in Betracht kommenden geschlossenen Kurven. Ist $y(s) ((yy)_4=1)$ der Krümmungskreis (d. h. Schmiegunskreis) einer Kurve $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$, so lässt sich ein beliebiger Tangentialkreis in $\mathfrak{x}(s)$ durch

$$(6) \quad \xi(s) = y(s) + F(s)\mathfrak{x}(s), \quad ((\xi\xi)_4=1)$$

darstellen. Die tetrazyklischen Koordinaten $y(s)$ des Schmiegunskreises sind unter den verschiedenen Tangentialkreisen in $\mathfrak{x}(s)$ durch die folgende Bedingung gekennzeichnet:

$$(7) \quad (dy dy)_4 = 0.$$

⁽¹³⁾ Wegen der Formeln (1), (2), (3), (4) und (5) folgt: T. Takasu, a. a. O., S. 224, Formel (93).

Durch Spezialisierung der Funktion $F(s)$ wird der Tangentialkreis an ein und derselben Stelle s individualisiert.

Aus (6) ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} = F(s).$$

Wenn die Kurve $\mathfrak{r}(s)$ geschlossen und $R(s)$ stetig ist, so gibt es sicher zwei Stellen P und Q auf unsrer Kurve, wo $\frac{1}{R}$ seinen grössten und kleinsten Wert annimmt.

Wir wollen im folgenden diejenige *Kurvenklasse* $\mathfrak{K}$ samt ihrer irgendeinen Tangentialkreisschar betrachten, dass *die Kurven der Klasse* $\mathfrak{K}$ *geschlossen, mit* $\frac{1}{R}$ *und* $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)$ *(die stetig ist) versehen sind und dass man durch die eben betrachteten Punkte* P *und* Q *wenigstens einen Kreis legen kann, der sonst nirgends die betrachtete Kurve trifft.*

Offenbar sind die gewöhnlichen *Eilini*en in dieser Kurvenklasse $\mathfrak{K}$ enthalten, weil die Verbindungslinie PQ als ein Kreis betrachtet werden kann.

I. 3. Scheitel.

Definition. Ein Punkt der Kurve, in dem die auf eine Schar von Tangentialkreisen bezogene konforme Krümmung $\frac{1}{R}$ verschwindende Ableitung hat, soll *eine auf die genannte Tangentialkreisschar bezogene Scheitel* genannt werden.

Es ist nun zu bemerken, dass die Scheitel der Kurve sich auch auf eine andere Weise deuten lässt. Um also eine zweite Definition zu herleiten, brauchen wir jetzt den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1°. *In der auf eine beliebige Tangentialkreisschar bezogenen Scheitel enthält der Schmiegungskreis wenigstens vier Nachbarkurvenpunkte und umgekehrt.*

Beweis. Ein beliebiger Tangentialkreis einer Kurve $\mathfrak{r}(s)$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$(8) \quad \xi(s) = y - \frac{1}{R(s)} \mathfrak{r}.$$

In der Tat ist nach (1) und (8):

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right) \mathfrak{r} - \frac{t}{R} = -\frac{t}{R},$$

so dass die folgende Beziehung¹⁴⁾ gilt:

$$(9) \quad dy = d\left(\frac{1}{R}\right) \mathfrak{x}.$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{x} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 &\equiv -\left(\frac{d\mathfrak{x}}{ds} \frac{d\mathfrak{x}}{ds}\right)_4 = -1, & \left(y \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 &= 0, \\ \left(\mathfrak{x} \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 &\equiv -\left(\frac{d\mathfrak{x}}{ds} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 = 0, & \left(\frac{d\xi}{ds} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 &= -\frac{1}{R} \left(t \frac{dt}{ds}\right)_4 = 0, \\ \left(\xi \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 &= \left(y \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 - \frac{1}{R} \left(\mathfrak{x} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 = \frac{1}{R}, \\ \left(\xi \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 &\equiv -\left(\frac{d\xi}{ds} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{ds^2}\right)_4 + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R}\right), \\ (10) \quad \left(\xi \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 &\equiv \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R}\right), \\ \left(\xi \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 &= \left(y \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 - \frac{1}{R} \left(\mathfrak{x} \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4, \\ (11) \quad \left(\xi \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 &= \left(y \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4. \end{aligned}$$

Aus (10) und (11) ergibt sich also:

$$(12) \quad \left(y \frac{d^3 \mathfrak{x}}{ds^3}\right)_4 = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R}\right),$$

was unsren Satz beweist.

Definition. (S. Mukhopadhyaya, a. a. O.) Einen Punkt einer Kurve, in welchem der Krümmungskreis wenigstens vier konsekutive Punkte enthält, nennt man einen *zyklischen Punkt* („cyclic point“).

Zusatz. Es ist:

$$\text{Scheitel} = \text{zyklischer Punkt}.$$

Oben haben wir die Scheitel bezüglich einer Tangentialkreisschar definiert. Nun ist der Begriff vom zyklischen Punkt von der Wahl der Tangentialkreisschar einer Kurve unabhängig. Mithin ergibt sich der folgende Satz aus dem obigen Zusatz:

Satz. 2°. Jede auf eine Tangentialkreisschar

$$\xi = y - \phi \cdot \mathfrak{x}$$

einer Kurve C bezogene Scheitel ist auch eine auf eine beliebige andere

(¹⁴) T. Takasu, a. a. O., S. 232, Formel (108).

Tangentiaalkreisschar

$$\xi^* = y - \psi \cdot \mathfrak{x}$$

derselben Kurve C bezogene Scheitel.

I. 4. Vierscheitelsatz in der konformen Ebene. Nach den Sätzen 1° und 2° gilt:

Satz 3°. *Die Scheiteln in der konformen Ebene sind auch gewöhnliche Scheiteln und umgekehrt.*

Aus diesem Grunde ist der Vierscheitelsatz in der konformen Ebene *fast* dasselbe wie in der gewöhnlichen Ebene. Trotzdem wollen wir den folgenden Vierscheitelsatz in der konformen Ebene *rein konformgeometrisch* beweisen, weil die in Betracht kommenden Kurvenklasse $\mathfrak{K}$ (vgl. Art. I. 2) etwas *anders* ist als in der gewöhnlichen Ebene.

Vierscheitelsatz in der konformen Ebene. *Die Mindestzahl der Scheiteln einer geschlossenen Kurve C der Klasse $\mathfrak{K}$ in der konformen Ebene ist vier.*

Rein konform-geometrischer Beweis. Dazu beweisen wir den Hilfssatz, dass das rings um die geschlossene Kurve C erstreckte Integral

$$(13) \quad \int_C (a\mathfrak{x})_4 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) ds = 0$$

ist, wenn die a_i beliebige Koordinate, $\mathfrak{x}(s)$ die tetrazyklischen Punktkoordinaten eines Punktes der Kurve C sind und $\frac{1}{R}$ die zugehörige konforme Krümmung bedeutet. Da die a_i beliebig sind, kommt man auf die vier Gleichungen

$$\int_C \mathfrak{x}_i \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) ds = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Diese Gleichungen bestätigt man durch Integration nach Teilen unter Beachtung von (1)

$$\int_C \mathfrak{x}_i \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) ds = - \int_C \frac{d}{ds} \mathfrak{x}_i \cdot \frac{1}{R} ds = \int_C \frac{d\xi_i}{ds} ds = 0.$$

Setzen wir $\frac{1}{R}$ als stetig voraus, so gibt es sicher zwei Stellen P und Q auf unsrer Kurve C , wo $\frac{1}{R}$ seinen grössten und seinen kleinsten Wert annimmt. Diese sind jedenfalls Nullstellen von $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$, und damit ist das Vorhandensein zweier Scheiteln P, Q gesichert. Angenommen, $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$

wechselt zwischen P und Q nirgends sein Zeichen, sei also auf dem einen Teilbogen PQ unsrer Kurve C immer ≥ 0 und auf dem andern stets ≤ 0 . Es sei dann

$$(a\mathfrak{x})_4 = 0$$

die Gleichung des mit C nur P und Q gemein habenden Kreises, so dass der Ausdruck

$$(a\mathfrak{x})_4 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$$

beim Durchlaufen unsrer Kurve C nirgends sein Zeichen ändert. Dann kann aber das Integral (13) nicht verschwinden. Die Annahme von nur zwei Zeichenwechseln von $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$ auf C führt also zu einem Widerspruch mit unsrem Hilfssatz. Da aber aus der Geschlossenheit von C hervorgeht, dass die Zeichenwechsel von $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$, falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich das Vorhandensein von mindestens vier Scheiteln. Da wir in der Ellipse (oder in ihrem konformen Bild) eine geschlossene Kurve der Klasse $\mathfrak{K}$ mit tatsächlich vier Scheiteln vor uns haben (vgl. Satz 3° oben), ist die Vier als Mindestzahl gesichert.

I. 5. Eine Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes. Der Vierscheitelsatz ist ein Zusatz zu dem folgenden Satz.

Satz. *Liegen $2n$ Scheiteln einer Kurve C der Klasse $\mathfrak{K}$ auf einem und demselben Kreis K , so existiert auf C mindestens $2(n+1)$ Scheiteln.*

Beweis. Es seien $P_1 \equiv P_{2n+1}, P_2, \dots, P_{2n}$ die $2n$ Scheiteln von C , welche auf dem Kreise

$$(a\mathfrak{x})_4 = 0$$

liegen.

Angenommen, $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$ wechselt zwischen P_i und P_{i+1} nirgends sein Vorzeichen, sei also auf dem einen Teilbogen $P_i P_{i+1}$ unsrer Kurve C immer ≥ 0 und auf $P_{i+1} P_{i+2}$ stets ≤ 0 . Dann kann der Ausdruck

$$(a\mathfrak{x})_4 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)$$

beim Durchlaufen unsrer Kurve C sein Vorzeichen nirgends ändern. Dann kann aber das Integral (13) nicht verschwinden. Die Annahme

von nur $2n$ Zeichenwechseln von $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)$ auf C führt also zu einem Widerspruch mit unsrem Hilfssatz.

Da aber aus der Geschlossenheit von C hervorgeht, dass die Zeichenwechsel von $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)$, falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich das Vorhandensein von mindestens $2(n+1)$ Scheiteln, womit unser Satz bewiesen ist.

I. 6. Konforme Auffassung eines Satzes der Herren S. Mukhopadhyaya und W. Blaschke. Herr W. Blaschke hat den folgenden Satz formuliert⁽¹⁵⁾:

Satz i. Wird eine Eilinie von einem Kreise in $2n$ Punkten geschnitten, so hat sie auch mindestens $2n$ Scheiteln.

Dabei versteht man unter „Scheitel“ denjenigen Kurvenpunkt, in welchem die *gewöhnliche* Krümmung extrem wird. Also gehört dieser Satz scheinbar zur *Bewegungsgeometrie*.

Herr S. Mukhopadhyaya hat den folgenden Satz⁽¹⁶⁾ bewiesen:

Satz ii. „If a circle C intersect an oval V at $2n$ points ($n \geq 2$), then there exist at least $2n$ *cyclic* points, in order on V , of alternately contrary signs, provided the oval has continuity of order 3“.

Dieser Satz gehört schon zur konformen Geometrie.

Nun können wir aus Grunde unsres Satzes 1°, den obigen Satz ii (welcher wesentlich den Satz i enthält) wie folgt erklären:

Satz. Wird eine Kurve der Klasse $\mathfrak{K}$ von einem Kreise in $2n$ Punkten geschnitten, so hat sie auch mindestens $2n$ Scheiteln (im konform-geometrischen Sinne).

I. 7. Konform-geometrische Auffassung eines Satzes von Herrn Struik. Herr D. J. Struik⁽¹⁷⁾ hat den folgenden Satz angegeben: „If an oval has n vertices, a circle has at most n points in common with the oval.“

Diesen Satz kann man nun auf Grund meiner Betrachtung des Art. 3 wie folgt konform verallgemeinern:

(¹⁵) W. Blaschke, Kreis und Kugel, (1916), S. 161.

(¹⁶) S. Mukhopadhyaya, Extended Minimum-Number Theorems of Cyclic and Sextactic Points on a Plane Convex Oval, Math. Z., Bd. 33 (1931), S. 660.

(¹⁷) D. J. Struik, Differential Geometry in the Large, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 37 (1931), p. 50. Seine Literatur ist mir noch nicht zugänglich.

Satz. *Hat eine Kurve der Klasse $\mathfrak{R}_n$ Scheiteln, so hat jeder Kreis mit der Kurve mindestens n Punkte gemein.*

II. Vierscheitelsatz in der Laguerreschen Geometrie.

In diesem Abschnitt möchte ich (i) den Vierdualscheitelsatz in der Laguerreschen Ebene und (ii) den Vierdualscheitelsatz im Laguerreschen Raume behandeln.

Geometer sind meistens mit der Laguerreschen Kurventheorie mehr interessiert als mit der Laguerreschen Kreis- (Kugel-) scharentheorie. Objektiv ist das aber falsch aus dem Grunde, dass *die Laguerresche Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kurventheorie die Kreis-(Kugel-) scharentheorie ist, während jede Laguerresche Kurventheorie je eine Laguerresche Verallgemeinerung der gewöhnlichen Theorie der einzelnen speziellen Kurven ist.*

Den Begriff der *Laguerreschen Krümmung*, den der *Laguerreschen Dualkrümmung* und den der *Laguerreschen Raumkrümmung* der Kreisscharen und Kugelscharen (sowie der Kurven) habe ich dadurch zur Ausreife gebracht, dass ich die durch drei konsekutiven Kreise der Kreisschar bestimmte Kreiskongruenz (den durch vier konsekutive Kugeln der Kugelschar bestimmten Kugelkomplex) als instantane (d. h. anschmiegende) euklidische Ebene (instantanen (d. h. anschmiegenden) euklidischen Raum) betrachtet habe und die ganze lokale Metrik darauf beziehen liess⁽¹⁸⁾. Dabei wurde die Laguerresche Dualkrümmung der Kreisscharen zur durch Herrn Prof. T. Kubota zuerst rechnerisch eingeführten Laguerreschen Kurveninvariante,⁽¹⁹⁾ wenn man als den Tangentialkreis der Kurve den von mir zuerst eingeführten „*L*-Hauptkreis“ annimmt. Die Laguerresche Dualkrümmung wurde zur von mir zuerst rechnerisch eingeführten Laguerreschen Kurveninvariante⁽²⁰⁾, wenn man als die Tangentialkugel der Kurve die von mir zuerst eingeführte Kugel annimmt, die den Schmiegungskegel im tangentiellen Abstand *eins* von der Dualschmiegunskugel liegt.

(¹⁸) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, XII. Tôhoku Sei. Rep. (unter Vorbereitung). Wegen des Wesens meiner betreffenden Ideen siehe: T. Takasu, Über konforme Verallgemeinerung der Bertrandschen Kurven, Math. Z., 26 (1927).

(¹⁹) T. Kubota, On the Differential Invariants of the Laguerre Groups. Proc. of the Cambridge Phil. Soc., Vol. 22 (1924).

(²⁰) Siehe die vorletzte Fussnote!

A. Vierscheitelsatz in der Laguerreschen Ebene.

II. 1. Ableitungsgleichungen. Sind $\xi_1=A$, $\xi_2=B$, $\xi_3=iR$, $\xi_4=1$ die Laguerreschen Kreiskoordinaten des Elements einer Laguerreschen Kreisschar, die zwei Kurven

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(\theta), & (uu)_3 &= 0 \\ \bar{u}_i &= \bar{u}_i(\theta), & (\bar{u}\bar{u})_3 &= 0 \\ (u_1 &\equiv l_1, u_2 \equiv l_2, (ll)_2 \equiv 1, u_3 \equiv i, u_4 \equiv -p) \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

umhüllt, und $d\theta$ der auf die Kreisschar $\xi(\theta)$ bezogene Laguerresche Kontingenzwinkel der Kurve $u=u(\theta)$, so dass die Tangentialgleichung des Kreises $\xi(\theta)$

$$l_1 A + l_2 B - p = R \quad ((A, B) = \text{Zentrum}, R = \text{Radius})$$

wird, so gelten die folgenden Ableitungsgleichungen⁽²¹⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du}{d\theta} = t, \\ \frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{t}{P}, \end{cases} \quad ((tt)_3 = 1)$$

wobei die Laguerreschen Geradenkoordinaten u und $\bar{u}$ durch zwei Festsetzungen

$$(2) \quad (u\bar{u})_3 = 2,$$

$$(3) \quad (d u \bar{u})_3 \equiv -(d \bar{u} u)_3 \equiv 0$$

bis auf konstante Faktoren wohl Laguerre-geometrisch normiert sind und

$$(4) \quad d\theta^2 = (du \, d\bar{u})_3, \quad ds^2 = (d\xi \, d\bar{\xi})_3,$$

$$(5) \quad \frac{ds}{d\theta} \equiv -\frac{1}{P}$$

ist.

II. 2. Die in Betracht kommenden geschlossenen Kurven.

Ist $y(\theta)$, ($y_4=1$) der Krümmungskreis einer Kurve

$$u=u(\theta),$$

so ist ein beliebiger Tangentialkreis an $u(\theta)$ durch

$$(6) \quad \xi(\theta) = y(\theta) + F(\theta)u(\theta), \quad (\xi_4=1)$$

gegeben. Die Laguerreschen Kreiskoordinaten $y(\theta)$ des Krümmungskreises sind unter den verschiedenen Tangentialkreisen durch die folgende Beziehung gekennzeichnet:

(²¹) Siehe die Fussnote (18).

$$(7) \quad (dy dy)_3 = 0.$$

Durch Spezialisierung der Funktion $F(\theta)$ wird der Tangentialkreis an ein und derselben Stelle θ individualisiert.

Wenn die Kurve $u(\theta)$ geschlossen und $P(\theta)$ stetig ist, so gibt es sicher zwei Stellen p und q auf unsrer Kurve, wo $\frac{1}{P}$ seinen grössten und seinen kleinsten Wert annimmt.

Wir wollen im folgenden diejenige *Kurvenklasse* $\mathfrak{K}$ samt ihrer irgendeinen Tangentialkreisschar betrachten, dass die Kurven der Klasse $\mathfrak{K}$ geschlossen, mit $\frac{1}{P}$ und $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\right)$ versehen sind und dass man an die eben betrachteten Geraden p und q wenigstens einen Kreis legen kann, der sonst nirgends die Tangenten der betrachteten Kurven berührt.

Offenbar sind die gewöhnlichen Eilinen in dieser Kurvenklasse enthalten, weil der Schnittpunkt pq als ein Kreis betrachtet werden kann.

II. 3. Dualscheitel.

Definition. Eine Tangente der Kurve, an welcher die auf eine Schar von Tangentialkreisen bezogene Laguerresche Dualkrümmung $\frac{1}{P}$ verschwindende Ableitung hat, soll eine auf die genannte Tangentialkreisschar bezogene *Dualscheitel* genannt werden.

Es ist nun zu bemerken, dass die Dualscheitel der Kurve sich auch auf eine andere Weise deuten lässt. Um also eine zweite Definition herzuleiten, brauchen wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 1°. In der auf eine beliebige Tangentialkreisschar bezogenen Dualscheitel berührt der Krümmungskreis wenigstens vier konsekutive Tangenten und umgekehrt.

Beweis. Ein beliebiger Tangentialkreis einer Kurve $u(\theta)$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$(8) \quad \xi(\theta) = y - \frac{1}{P(\theta)} u.$$

In der Tat ist nach (1) und (3):

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\right)u - \frac{t}{P} = -\frac{t}{P},$$

da die folgende Beziehung⁽²²⁾ gilt:

(²²) T. Takasu, a. a. O.

$$(9) \quad dy = d\left(\frac{1}{P}\right)u.$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \left(u \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_4 &\equiv \left(u \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right) \equiv -\left(\frac{du}{d\theta} \frac{du}{d\theta}\right)_3 = -1, \quad \left(y \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_4 = 0, \\ \left(u \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 &\equiv \left(u \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right) \equiv -\left(\frac{du}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_3 = 0, \quad \left(\frac{d\xi}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_3 = -\frac{1}{P} \left(t \frac{dt}{d\theta}\right)_3 = 0, \\ \left(\xi \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_4 &\equiv \left(y \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_4 - \frac{1}{P(\theta)} \left(u \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_4 = \frac{1}{P(\theta)}, \\ \left(\xi \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 &\equiv -\left(\frac{d\xi}{d\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right)_3 + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P}\right), \\ (10) \quad \left(\xi \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 &\equiv \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\xi \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 &= \left(y \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 - \frac{1}{P} \left(u \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4, \\ (11) \quad \left(\xi \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 &= \left(y \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4. \end{aligned}$$

Aus (10) und (11) ergibt sich also:

$$(12) \quad \left(y \frac{d^3 u}{d\theta^3}\right)_4 = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P}\right),$$

was unsren Satz beweist.

Definition. Einer Tangente einer Kurve, an welcher der Krümmungskreis wenigstens vier konsekutive Tangenten berührt, nennt man eine *zyklische Tangente*.

Zusatz. Es ist

$$\text{Dualscheitel} = \text{zyklische Tangente}.$$

Oben haben wir die Dualscheitel bezüglich einer Tangentialkreisschar definiert. Nun ist der Begriff der *zyklischen Tangente* von der Wahl der Tangentialkreisschar einer Kurve unabhängig. Mithin ergibt sich der folgende Satz aus dem obigen Zusatz:

Satz 2°. Jede auf eine Tangentialkreisschar

$$\xi = y - \phi \cdot u$$

einer Kurve C bezogene Dualscheitel ist auch eine auf eine beliebige andere Tangentialkreisschar

$$\xi^* = y - \psi \cdot u$$

derselben Kurve C bezogene Dualscheitel.

II. 4. Vierdualscheitelsatz in der Laguerreschen Ebene. Nach den Sätzen 1° und 2° gilt:

Satz 3°. *Die Dualscheiteln in der Laguerreschen Ebene sind auch gewöhnliche Dualscheiteln und umgekehrt.*

Aus diesem Grunde ist der Vierdualscheitelsatz in der Laguerreschen Ebene *fast* dasselbe wie in der gewöhnlichen Ebene. Trotzdem wollen wir den folgenden Vierdualscheitelsatz in der Laguerreschen Ebene *rein Laguerre-geometrisch* beweisen, weil die in Betracht kommenden Kurvenklasse $\mathfrak{K}$ (vgl. Art. 2) etwas anders ist als in der gewöhnlichen Ebene.

Vierdualscheitelsatz in der Laguerreschen Ebene. *Die Mindestzahl der Dualscheiteln einer geschlossenen Kurve C der Klasse $\mathfrak{K}$ in der Laguerreschen Ebene ist vier.*

Rein Laguerre-geometrischer Beweis. Dazu beweisen wir den Hilfssatz, dass rings um die geschlossene Kurve C erstreckte Integral

$$(13) \quad \int_C (au)_4 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right) d\theta = 0$$

ist, wenn die a_i beliebige Koordinaten, $u(\theta)$ die Laguerresche Geradenkoordinaten einer Tangente der Kurve C sind und $\frac{1}{P}$ die zugehörige Laguerresche Dualkrümmung bedeutet. Da die a_i beliebig sind, kommt man auf die vier Gleichungen

$$\int_C u_i \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right) d\theta = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4).$$

Diese Gleichungen bestätigt man durch Integration nach Teilen unter Beachtung von (1):

$$\int_C u_i \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right) d\theta = - \int_C \frac{d}{d\theta} u_i \frac{1}{P} d\theta = \int_C \frac{d\xi_i}{d\theta} d\theta = 0.$$

Setzen wir $\frac{1}{P}$ als stetig voraus, so gibt es sicher zwei Stellen p und q auf unsrer Kurve C , wo $\frac{1}{P}$ seinen grössten und seinen kleinsten Wert annimmt. Diese sind jedenfalls Nullstellen von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$, und damit ist das Vorhandensein zweier Dualscheiteln p, q gesichert. Angenommen, $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ wechselt zwischen p und q nirgends sein Vorzeichen, sei also auf dem einen Teilbogen pq unsrer Kurve C immer ≥ 0 und auf dem andern stets ≤ 0 . Es sei dann

$$(au)_4 = 0$$

die Gleichung des mit C nur p und q gemein habenden Kreises, so dass der Ausdruck

$$(au)_4 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$$

beim Durchlaufen unsrer Kurve C niemals sein Vorzeichen ändert. Dann kann aber das Integral (13) nicht verschwinden. Die Annahme von nur zwei Zeichenwechseln von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ auf C führt also zu einem Widerspruch mit unsrem Hilfssatz. Da aber aus der Geschlossenheit von C hervorgeht, dass die Vorzeichenwechsel von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$, falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich das Vorhandensein von mindestens vier Dualscheiden. Da wir in der Ellipse (oder in ihrem Laguerreschen Bild) eine geschlossene Kurve der Klasse $\mathfrak{K}$ mit tatsächlich vier Dualscheiden vor uns haben (vgl. Satz 3° oben), ist vier als Mindestzahl gesichert.

II. 5. Eine Verallgemeinerung des Vierdualscheitelsatzes.

Der obige Vierdualscheitelsatz ist ein Zusatz zu dem folgenden Satz:

Satz. *Berühren $2n$ den Dualscheiden entsprechende Tangenten einer Kurve C der Klasse $\mathfrak{K}$ ein und denselben Kreis K , so existiert an C mindestens $2(n+1)$ Dualscheiden.*

Beweis. Es seien $p_1 \equiv p_{2n+1}, p_2, \dots, p_{2n}$ die genannten $2n$ Dualscheiden von C , welche den Kreis K

$$(au)_4 = 0$$

berühren.

Angenommen, $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ wechselt zwischen p_i und p_{i+1} nirgends sein Vorzeichen, sei also auf dem einen Teilbogen $p_i p_{i+1}$ unsrer Kurve C immer ≥ 0 und auf $p_{i+1} p_{i+2}$ stets ≤ 0 . Dann kann der Ausdruck

$$(au)_4 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$$

beim Durchlaufen unsrer Kurve C sein Vorzeichen niemals ändern. Dann kann aber das Integral (13) nicht verschwinden. Die Annahme von nur $2n$ Zeichenwechsel von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ auf C führt also zu einem Widerspruch mit unsrem Hilfssatz.

Da aber aus der Geschlossenheit von C hervorgeht, dass die Zeichenwechsel von $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\right)$, falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich das Vorhandensein von mindestens $2(n+1)$ Dualscheiteln, womit ist unser Satz bewiesen.

II. 6. Laguerre-geometrische Auffassung eines Satzes der Herren S. Mukhopadhyaya und W. Blaschke. Herr W. Blaschke hat den folgenden Satz formuliert⁽²³⁾:

Satz i. Wird eine Eilinie von einem Kreise in $2n$ Punkten geschnitten, so hat sie auch mindestens $2n$ Scheiteln.

Dabei versteht man unter „Scheitel“ denjenigen Kurvenpunkt, in welchem die gewöhnliche Krümmung extrem wird.

Da nun

der gewöhnliche Krümmungsradius = $-(\text{die gewöhnliche Dualkrümmung})$ ist, und zu jedem Schnittpunkt einer Eilinie mit einem Kreis eine gemeinsame Tangente entspricht, so können wir den folgenden Satz erklären:

Satz ii. Hat eine Eilinie mit einem Kreis $2n$ gemeinsame Tangenten, so hat sie auch mindestens $2n$ Scheiteln (=Dualscheiteln=dualzyklische Tangenten).

Verbindet man Satz ii mit Satz 1°, so kann man den folgenden Satz erklären:

Satz Hat eine Eilinie mit einem Kreis $2n$ gemeinsame Tangenten, so hat sie auch mindestens $2n$ Laguerre-geometrische Dualscheiteln.

B. Dualvierscheitelsatz im Laguerreschen Raume.

II. 7. Laguerresche Dualscheitel der Raumkurven.

Definition. Eine Dual-tangentialkugel einer Raumkurve, die drei konsekutive Schmiegungsebenen berührt, heisst eine *Laguerresche Dualscheitel*, wenn die entsprechende Laguerresche Dualkrümmung⁽²⁴⁾ $\frac{1}{P} \equiv \cot p$ eine Extreme wird.

Satz 1°. Die Laguerresche Dualscheitel ist dadurch gekennzeichnet, dass der entsprechende Schmiegungskegel (d. h. das dualistische Gegenstück des gewöhnlichen Schmiegungskreises) die Laguerresche Öffnung

(²³) W. Blaschke, Kreis und Kugel, (1916), S. 161.

(²⁴) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, XII, a. a. O.

$\nu^{-1}(\pi - 2 \tan c \nu)$ hat, wobei $c = \text{konst.}$, $\nu^2 = L$ -Raumkrümmung ist.

Beweis. In der Tat ist die Laguerresche Öffnung $\pi - 2\rho$, wobei $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{d}{ds}(\nu \cot \nu \rho) = 0$ ist.

Satz 2°. Die Laguerresche Dualscheitel ist dadurch gekennzeichnet, dass die zwei konsekutiven rektifizierenden homozentrischen Systeme (also auch die zwei konsekutiven Axialebenen Laguerre-geometrischer Dualkrümmung) instantan euklidisch parallel sind.

Beweis. Sind (t) und (z) bzw. die Laguerresche Verallgemeinerung der Normalebene, die der rektifizierenden Ebene und (u) die der Schmiegungebene, so sind die der Axialebene der Dualkrümmung durch die Gleichung

$$\zeta = uP^{-1} + t, \quad (P \equiv \tan \rho)$$

gegeben⁽²⁵⁾. Also ist für vier Komponenten

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = u \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\right), \quad (d\theta^2 = (u du)_i),$$

$$\zeta + d\zeta = uP^{-1} + t + u d\left(\frac{1}{P}\right).$$

Mithin ist $u = u + du$ für vier Komponenten dann und nur dann, wenn $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\right) = 0$ ist.

Satz 3°. Die Laguerresche Dualscheitel ist dadurch gekennzeichnet, dass die entsprechende Dualschmiegunskugel in eine Ebene ausartet. In diesem Sinne ist die Laguerresche Dualscheitel auch die gewöhnliche Scheitel und umgekehrt⁽²⁶⁾.

Beweis. In der Tat ist der Laguerresche Radius der Dualschmiegunskugel durch $\left(\nu \tau \frac{dP}{d\theta}\right)^{-1}$ gegeben⁽²⁷⁾.

Satz 4°. Die Dualscheitel ist dadurch gekennzeichnet, dass die gewöhnliche Polartorse an der entsprechenden Stelle auch eine (Laguerresche) Dualscheitel hat.

Beweis. Ist $\cot \rho_p$ die gewöhnliche Dualkrümmung der genannten Polartorse und $\cot \rho$ die der L -Torse, so ist

$$\rho + \rho_p = \frac{\pi}{2}.$$

(²⁵) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie XIII (unter der Presse), Formel (110).

(²⁶) T. Takasu, Vierscheitelsatz für Raumkurven, Tôhoku Math. Journ. (unter der Vorbereitung), Art. 1, Satz 3°.

(²⁷) Formel (107) der unter (25) zitierten Arbeit.

Satz 5°. *In der (Laguerreschen) Dualscheitel ist die gewöhnliche Öffnung des Dualschmiegungskegels der durch die Axialebene gewöhnlicher Dualkrümmung beschriebenen Torse gleich π (d. h. dass der genannte Kegel eben wird).*

Beweis. Ist die genannte Öffnung $\pi - 2\bar{\rho}$ und ρ wie oben, so ist

$$\tan \bar{\rho} = -\sin \rho \frac{d\rho}{d\theta} = 0, \quad (d\theta = \text{der gewöhnliche Torsionswinkel}).$$

Satz 6°. *In der Dualscheitel ist die gewöhnliche Öffnung des Dualschmiegungskegels beliebiger gewöhnlicher Evolute gleich π (d. h. dass der genannte Kegel eben wird).*

Beweis. Ist die genannte Laguerresche Öffnung $\pi - 2\rho_i$, so ist

$$\tan \rho_i = \frac{d \cos \rho}{d\theta} = 0, \quad (\rho, \theta: \text{ wie oben}).$$

Satz 7°. *In der (Laguerreschen) Dualscheitel hat der Dualschmiegungskegel der gewöhnlichen rektifizierenden Torse Nullöffnung.*

Beweis. Ist $\cot \rho_r$ die gewöhnliche Dualkrümmung der genannten rektifizierenden Torse und ρ, θ wie oben, so ist

$$\cot \rho_r = -\sin \rho \frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

II. 8. Die in Betracht kommende Torsenklasse. Wir betrachten eine Klasse $\mathfrak{K}$ von geschlossenen Torsen (C) im Laguerreschen Raume von der folgenden Beschaffenheit. Setzen wir $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ als stetig voraus, so ist, $\frac{1}{P}$ auch stetig und es gibt wegen der Geschlossenheit sicher zwei Stellen π und κ auf der Torse C , wo $\frac{1}{P}$ ihren grössten und ihren kleinsten Wert annimmt. Diese sind jedenfalls Nullstellen von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$, und damit ist das Vorhandensein zweier Dualscheiteln π, κ gesichert. Es sei κ_∞ die Kugel, welche beiden Schmiegungebenen π, κ berührt und zum Kugelkomplex $(\mathfrak{E}) = (0, 0, 0, 0, 1)$ gehört. Wir nehmen an, dass die Torse C keine von π und κ verschiedene die Kugel K_∞ berührende Schmiegungebene hat.

II. 9. Laguerre-geometrischer Vierscheitelsatz.

Laguerre-geometrischer Vierscheitelsatz. *Geschlossene Laguerre-geometrische Torsen von der Klasse $\mathfrak{K}$ haben 2n Laguerresche Dual-*

scheiteln, wobei die natürliche Zahl $n \geq 2$ ist.

Beweis. Zum Beweise beweisen wir den Hilfssatz, dass rings um die geschlossene Laguerresche Torse C erstreckte Integral

$$(1) \quad \int_c u \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right) d\theta = 0$$

ist, wobei

$$\begin{aligned} (u) &= \text{die Laguerresche Schmiegungebene,} \\ \theta &= \text{der Laguerresche Windungswinkel, } (d\theta^2 = (du du)_4), \\ \frac{1}{P} &= \text{die Laguerresche Dualkrümmung} \end{aligned}$$

ist.

Ich habe die folgenden Ableitungsgleichungen eingeführt⁽²⁸⁾:

$$(2) \quad \frac{du}{d\theta} = z, \quad \frac{dt}{d\theta} = -\frac{z}{P} - \frac{\Xi}{\tau},$$

wobei

$$\begin{aligned} (\Xi) &= 0, 0, 0, 0, 1, \\ (z) &= \text{der Laguerresche rektifizierende Kugelkomplex,} \\ (t) &= \text{der Laguerresche normale Kugelkomplex} \end{aligned}$$

ist.

Die Gleichung (1) bestätigt man durch Integration nach Teilen unter Beachtung von (2):

$$\begin{aligned} \int_c u \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right) d\theta &= \left[\frac{u}{P} \right] - \int_c \frac{z}{P} d\theta = - \int_c \frac{z}{P} d\theta \\ &= \int_c \frac{dt}{d\theta} d\theta = [t] = 0. \end{aligned}$$

Nach unserer Annahme ist das Vorhandensein zweier Laguerrescher Dualscheiteln π, κ gesichert. Angenommen, $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ wechselt zwischen π und κ nirgends sein Vorzeichen, sei also auf den einen Teil $\pi\kappa$ unsrer Laguerreschen Torse C immer ≥ 0 und auf dem andern stets ≤ 0 . Es sei $K_\infty = (a_1, a_2, a_3, a_4, 0)$ die Kugel, welche π und κ berührt und zum Kugelkomplex $(\Xi) = (0, 0, 0, 0, 1)$ gehört und es sei dann

$$(au)_4 = 0$$

(²⁸) T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, XII, a. a. O.

die Gleichung der uneigentlichen Kugel $K_\infty = \{\pi, \kappa, \Xi\}$, so dass der Ausdruck

$$(3) \quad \int_C (au)_s \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right) d\theta,$$

beim Durchlaufen unsrer Laguerreschen Torse C niemals sein Vorzeichen ändert. Dann kann aber das Integral (3) nicht verschwinden, was nach (1) der Fall sein muss. Die Annahme von nur zwei Zeichenwechseln von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$ auf unsrer geschlossenen Laguerreschen Torse C führt also zu einem Widerspruch mit unsrem Hilfssatz. Da aber aus der Geschlossenheit der Laguerreschen Torse C hervorgeht, dass die Zeichenwechseln von $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{P} \right)$, falls ihrer nur endlich viele vorhanden sind, jedenfalls in gerader Zahl auftreten, so ergibt sich Vorhandensein von mindestens vier Laguerreschen Dualscheiteln.

Da wir in dem elliptischen Kegel eine geschlossene (Laguerresche) Torse genannter Art mit tatsächlich vier Laguerreschen Dualscheiteln vor uns haben, ist die Vier als Mindestzahl gesichert.