5. Ueber den Mittelwert, der durch die kleinste Abweichung definiert wird.

Von Mitio NAGUMO

(Eingegangen am 27. Dezember, 1932)

§ 1.

Das arithmetische Mittel von n reellen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ kann als derjenige Wert von x aufgefasst werden, für den die Funktion $\sum_{i=1}^n (x - \xi_i)^2$ das Minimum annimmt. Den Begriff des Mittelwertes können wir also folgendermassen erweitern: Hier verstehen wir unter dem Mittelwert $M_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ von n reellen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ denjenigen Wert von x , für den die Funktion $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ das Minimum annimmt, wobei $\varphi(x)$ eine geeignete *stetige stets wachsende Funktion* von $x \geq 0$ ist, die wir nachher genauer bestimmen wollen.

Satz I. *Dafür, dass die Funktion $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ für einen und nur einen Wert von x das (absolute) Minimum annimmt, ist es notwendig und hinreichend, dass $\varphi(x)$ eine echt konvexe Funktion von $x \geq 0$ ist.*

Wenn $\varphi(x)$ eine echt konvexe Funktion ist, so hängt der Mittelwert $M_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ von $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ stetig ab.

Beweis: Es sei $\varphi(x)$ eine echt konvexe (stets wachsende stetige) Funktion. Dann ist $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ auch eine echt konvexe Funktion. Man setze $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} (\xi_i)$ und $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} (\xi_i)$. $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ wächst dann immer grösser ausserhalb des Intervalles $\alpha \leq x \leq \beta$, wenn x sich von α oder β entfernt. Es gibt also einen und nur einen Wert von x , für den $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ das Minimum annimmt; und dieser Wert von x liegt sogar in $\alpha \leq x \leq \beta$.

Um die Notwendigkeit der Bedingung zu beweisen, betrachten wir den Fall $n=2$, $\xi_1 = -a$, $\xi_2 = a$, $a > 0$. x_0 sei derjenige Wert von x , für den $\varphi(|x+a|) + \varphi(|x-a|)$ das Minimum annimmt. Aus der Relation

$$\sum_{i=1}^2 \varphi(|x_0 - \xi_i|) = \varphi(|x_0 + a|) + \varphi(|x_0 - a|) = \varphi(|a + x_0|) + \varphi(|a - x_0|)$$

folgt aber, dass $\varphi(|x+a|) + \varphi(|x-a|)$ denselben Wert für $x=x_0$ und $x=-x_0$ erhält. Wegen der Eindeutigkeit des Minimums gilt also $x_0=0$. Nach der Definition des Minimums besteht also für $a>x>0$

$$\varphi(|x+a|) + \varphi(x-a) = \varphi(a+x) + \varphi(a-x) > 2\varphi(a),$$

oder für zwei beliebige von einander verschiedene positive Zahlen x_1 und x_2

$$\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} > \varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

$\varphi(x)$ ist also eine echt konvexe Funktion von x .

Um den letzten Teil von Satz 1 zu beweisen, schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus, der auch für eine spätere Erörterung nützlich ist.

Hilfssatz. Es sei $f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ eine stetige Funktion von $(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ im Bereich $x_0 \leq x \leq x_1, a_v < \alpha_v < b_v$, die für jedes $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ an einer und nur an einer Stelle im Intervalle $x_0 \leq x \leq x_1$, nämlich an $x=\xi$, das Minimum annimmt. Dann hängt ξ von $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ stetig ab.

Beweis von dem Hilfssatz: Wir nehmen an, dass für $\alpha_v = \alpha_v^{(0)}$ ($a_v < \alpha_v^{(0)} < b_v$) die Funktion $\xi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ nicht stetig wäre. Dann gibt es eine gegen $\alpha_v = \alpha_v^{(0)}$ konvergierende Folge $\alpha_v^{(n)}$ derart, dass $\xi(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)}) = \xi_n$ gegen einen von $\xi(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}) = \xi_0$ verschiedenen Wert von x , etwa $x=\xi'$, konvergiert. Da $f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ nur für einen Wert von x in $x_0 \leq x \leq x_1$ das Minimum annimmt, so gilt

$$f(\xi_0, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}) < f(\xi', \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}),$$

und
$$f(\xi_0, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)}) \geq f(\xi_n, \alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)}).$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt für $n \rightarrow \infty$

$$f(\xi_0, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}) \geq f(\xi', \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)})$$

im Widerspruch mit der ersten Ungleichung. Damit ist der Beweis von dem Hilfssatz erledigt.

Nun beweisen wir den letzten Teil von Satz 1. Nach dem ersten Teil des Beweises von Satz 1 nimmt die Funktion $\sum_{i=0}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ das Minimum für einen und nur einen Wert von x im Intervalle $x_0 \leq x \leq x_1$ ($x_0 < \xi_p < x_1$) an. $\sum_{i=1}^n \varphi(|x - \xi_i|)$ ist auch eine stetige Funktion von $(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Nach dem Hilfssatz ist also $M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ eine stetige Funktion von $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. W. z. b. w.

§ 2.

Wir legen von jetzt an fest, dass $\varphi(x)$ eine stetige stets wachsende echt konvexe Funktion von $x \geq 0$ ist und $\varphi(0)=0$. Die Funktion $M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ hat auch dieselbe Bedeutung wie vorher.

Satz 2. Dafür dass der Mittelwert $M_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ der Relation

$$M_\varphi(k\xi_1, k\xi_2, \dots, k\xi_n) = k M_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

für eine beliebige reelle Konstante k genüge, ist es notwendig und hinreichend, dass $\varphi(x)$ von der Form $\varphi(x) = cx^\alpha (x \geq 0)$ ist, wobei $\alpha > 1, c > 0$.

Beweis: Die Hinlänglichkeit der Bedingung kann man leicht beweisen. Denn die beiden Funktionen, $\sum_{i=1}^n c|x - \xi_i|^\alpha$ und $\sum_{i=1}^n c|kx - k\xi_i|^\alpha$, ($c > 0, \alpha > 1$), nehmen die Minimumwerte gleichzeitig für denselben Wert von x an.

Um die Notwendigkeit der Bedingung zu beweisen, betrachten wir uns die Funktion $\mu\varphi(|x-a|) + (1-\mu)\varphi(|x-b|)$, ($0 \leq \mu \leq 1$). Diese echt konvexe Funktion nimmt das Minimum genau für einen Wert von x an, den wir mit $M_\varphi(a, b; \mu)$ ausdrücken. Wie man es leicht sieht, gilt $a \leq M_\varphi(a, b; \mu) \leq b$ ($0 \leq \mu \leq 1$). Nach dem Hilfssatz ist $M_\varphi(a, b; \mu)$ eine stetige Funktion von (a, b, μ) . Aus den Definitionen von $M_\varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ und $M_\varphi(a, b; \mu)$ kann man auch leicht schliessen, das

$$M_\varphi(\underbrace{a, a, \dots, a}_{m\text{-mal}}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{(n-m)\text{-mal}}) = M_\varphi\left(a, b; \frac{m}{n}\right).$$

Es gilt

$$(i) \quad M_\varphi(ka, kb; \mu) = k M_\varphi(a, b; \mu) \quad (0 \leq \mu \leq 1).$$

Denn nach der Voraussetzung gilt

$$M_\varphi(\underbrace{ka, ka, \dots, ka}_{m\text{-mal}}, \underbrace{kb, kb, \dots, kb}_{(n-m)\text{-mal}}) = k M_\varphi(\underbrace{a, \dots, a}_{m\text{-mal}}, \underbrace{b, \dots, b}_{(n-m)\text{-mal}}).$$

Also
$$M_\varphi(ka, kb; \frac{m}{n}) = k M_\varphi(a, b; \frac{m}{n}).$$

Lässt man $\frac{m}{n}$ gegen μ ($0 \leq \mu \leq 1$) konvergieren, so erhält man die Relation (i). Die Relation (i) lautet für die Funktion $\mu\varphi(|x-a|) + (1-\mu)\varphi(|x-b|)$, wenn man $a=0, b=1, M_\varphi(0, 1; \mu) = X$ setzt,

$$(ii) \quad \begin{cases} D_- \{ \mu\varphi(|kX|) + (1-\mu)\varphi(|k(1-X)|) \} \leq 0, \\ D_+ \{ \mu\varphi(|kX|) + (1-\mu)\varphi(|k(1-X)|) \} \geq 0, \end{cases}$$

wobei D_- die linksseitige und D_+ die rechtsseitige Derivierte nach X

bedeutet. Da $M_\varphi(0, 1; \mu)$ eine stetige Funktion von μ ($0 \leq \mu \leq 1$) ist, und $M_\varphi(0, 1; 0) = 1$, $M_\varphi(0, 1; 1) = 0$, so gibt es für jedes X , $0 < X < 1$, ein $\mu(X)$ ($0 < \mu(X) < 1$) derart, dass $X = M_\varphi(0, 1; \mu(X))$. Wir bekommen also (ii) für $K > 0$, $0 < X < 1$

$$\frac{\mu(X)}{1 - \mu(X)} D_- \varphi(kX) \leq D_+ \varphi(k(1 - X)),$$

und

$$\frac{\mu(X)}{1 - \mu(X)} D_+ \varphi(kX) \geq D_- \varphi(k(1 - X)).$$

Weil für die konvexe Funktion $\varphi(x)$ die Relation $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} D_\pm \varphi(x) = D_\pm \varphi(x_0)$ ($x_0 \geq 0$) besteht, so gilt für $k \rightarrow k_0 + 0$ ($k_0 > 0$)

$$\frac{\mu(X)}{1 - \mu(X)} D_+ \varphi(k_0 X) \leq D_+ \varphi(k_0(1 - X)),$$

und

$$\frac{\mu(X)}{1 - \mu(X)} D_- \varphi(k_0 X) \geq D_- \varphi(k_0(1 - X)),$$

folglich

$$D_+ \varphi(k_0(1 - X)) = D_+ \varphi(k_0 X) \frac{\mu(X)}{1 - \mu(X)}.$$

Für beliebige positive Zahlen u und v gibt es reelle Zahlen X ($0 < X < 1$) und $k_0 > 0$, sodass $u = k_0 X$ und $v = \frac{1 - X}{X}$. Also für beliebige positive Zahlen u und v

$$D_+ \varphi(uv) = D_+ \varphi(u) \psi(v) \quad \left(\psi(v) = \frac{\mu(X(v))}{1 - \mu(X(v))} \right).$$

Da $D_+ \varphi(x)$ monoton wächst, so ist $D_+ \varphi(x)$ mindestens für einen positiven Wert von x stetig. Aus der Funktionalgleichung kann man daher leicht schliessen, dass $D_+ \varphi(u)$ für $u > 0$ immer stetig ist. Folglich

$D_+ \varphi(x) = D_- \varphi(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x) = \varphi'(x)$ für $x > 0$. Also

$$\varphi'(uv) = \varphi'(u) \psi(v).$$

Setzt man $u = 1$, dann $\varphi'(v) = \varphi'(1) \psi(v)$. Folglich

$$\psi(uv) = \psi(u) \psi(v).$$

Da $\psi(u)$ eine stetige positive Funktion ist, (denn $\varphi'(u) > 0$ und $\psi(u) = \frac{\varphi'(u)}{\varphi'(1)}$ für $u > 0$), gilt $\psi(u) = u^p$ ($u > 0$, $p = \text{Konst.}$). Daher $\varphi'(u) = \varphi'(1) u^p$ ($u > 0$), und folglich $\varphi(u) = C u^\alpha$ ($\alpha = p + 1$, $C = \frac{\varphi'(1)}{p + 1}$).

Aus der Bedingung, dass $\varphi(x)$ eine stets wachsende echt konvexe Funktion von $x \geq 0$ ist, folgt $C > 0$, $\alpha > 1$. W. z. b. w.

Göttingen, den 5. December 1932.