10. Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raume⁽¹⁾.

Von Tsurusaburo TAKASU.

(Eingegangen am 16. Juli. 1934.)

1. Einleitung. Sind (y) , $((yy)_5 = 1)$ die pentasphärischen Koordinaten der Schmiegunskugel im gewöhnlichen Sinne, so sind

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{d\theta}\right), \quad \left(\left(\frac{dy}{d\theta} \frac{dy}{d\theta}\right)_5 = 1\right)$$

die pentasphärischen Koordinaten derjenigen von Herrn G. Thomson sogenannten Normalkugel, welche den Schmiegunskreis κ in sich enthält und zur Kugel (y) senkrecht steht. Nunmehr sind

$$(2) \quad \left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right), \quad \left(\left(\frac{d^2y}{d\theta^2} \frac{d^2y}{d\theta^2}\right)_5 = 1^{(2)}\right)$$

die pentasphärischen Koordinaten derjenigen Kugel, welche die Schmiegunskugel (y) im Kurvenpunkte

$$(3) \quad (\mathfrak{x}(s)), \quad ((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5 = 0, \quad (d\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_5 = ds^2)$$

von aussen berührt und also zur Normalkugel $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$ senkrecht steht.

Man betrachte jetzt die folgende Kugelschar:

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi(\sigma) &= \cos \phi(\sigma) y \\ &+ \sin \phi(\sigma) \frac{dy}{d\theta}, \\ \left(\left(\frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d\xi}{d\sigma}\right)_5 &= 1\right). \end{aligned}$$

Vier unendlich benachbarte Elemente der Kugelschar (4) bestimmen eine gemeinsame Orthogonalkugel

$$(5) \quad \mathfrak{x} = \left\| \xi \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^3\xi}{d\sigma^3} \right\| : \left(\left\| \xi \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^3\xi}{d\sigma^3} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad ((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5 = 1)$$

⁽¹⁾ Ein Artikel unterstützt von der Stiftung "Saitô-Hôönkwai."

⁽²⁾ Diese Identität beweise ich später in (33).

samt ihrer Ableitungskugel

$$(6) \quad \left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \right), \quad \left(\left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \right)_s = 1 \right).$$

Die Kugel $(\mathfrak{X})$ ist die *instantane absolute Kugel*⁽¹⁾ des N. E. Raumes, welcher die Kugelschar (4) an der Stelle $\sigma = \sigma$ anschmiegt und die Kugel $\left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \right)$ in Bezug auf $(\mathfrak{X})$ genommene Absolutpolare⁽²⁾ des Kurvenpunktes $(\mathfrak{x})$.

Der Kurvenpunkt $(\mathfrak{x})$ und ihr in Bezug auf die Kugel

$$(\mathfrak{X})$$

genommene inverse Bild $(\bar{\mathfrak{x}})$

sind durch die Beziehungen

$(7) \quad \begin{aligned} \mu \mathfrak{x} &= \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} + i\mathfrak{X}, \\ \bar{\mu} \bar{\mathfrak{x}} &= \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} - i\mathfrak{X} \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">Das zum Kugelbüschel</p> $l \frac{dy}{d\theta} + m \frac{d^2 y}{d\theta^2}$ <p style="text-align: center;">gehörige Nullkugelpaar $(\mathfrak{y}), (\bar{\mathfrak{y}})$</p>
---	--

verbunden, wobei die Normierungen durch die Forderungen

$(8) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{x} \bar{\mathfrak{x}})_s &= 2k^2, \\ (\mathfrak{x} d\bar{\mathfrak{x}})_s &\equiv -(\bar{\mathfrak{x}} d\mathfrak{x})_s = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} (\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{y}})_s &= 2k^2, \\ (\mathfrak{y} d\bar{\mathfrak{y}})_s &\equiv -(\bar{\mathfrak{y}} d\mathfrak{y})_s = 0 \end{aligned}$
--	--

gemacht sind, so dass

$(9) \quad \begin{aligned} \mu \bar{\mu} &= k^{-2}, \\ \mu &= e^{i(\phi - \phi_0)}, \quad e^{-i\phi_0} = k^{-1} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nu \bar{\nu} &= k^{-2}, \\ \nu &= e^{i(\sigma - \sigma_0)}, \quad e^{-i\sigma_0} = k^{-1} \end{aligned}$
--	--

wird. Dabei ist übrigens

$(10) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{x} \mathfrak{x})_s &= 0, \\ (\bar{\mathfrak{x}} \bar{\mathfrak{x}})_s &= 0. \end{aligned}$	$\begin{aligned} (\mathfrak{y} \mathfrak{y})_s &= 0, \\ (\bar{\mathfrak{y}} \bar{\mathfrak{y}})_s &= 0. \end{aligned}$
---	--

Im folgenden möchte ich auf Grund der obigen Zuordnung (7)–(10) ein *neues Dualitätsprinzip bei den Kugelscharen* $\xi = \xi(\sigma)$ sowie bei den Kurven $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$ im konformen Raume erklären.

Dieses Prinzip befindet eine wichtige Anwendung in der Lie-geometrische Verallgemeinerung der ebenen Kurventheorie⁽³⁾.

⁽¹⁾ T. Takasu, Vortrag bei der Düsseldorfer Tagung, (1926). T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., vol. 17 (1928), S. 286 und S. 291.

⁽²⁾ Ebenda.

⁽³⁾ T. Takasu, Differentialkugelgeometrie im Lieschen Raume, I. Tôhoku Sci. Rep. (unter der Presse).

2. Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kugelscharen im konformen Raume.

Wir gehen nämlich aufs neue mit der Kurve

$$(11) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) \quad | \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\bar{s})$$

aus. Vier unendlich benachbarte Kurevenpunkte der Kurve (11) bestimmen die gemeinsame orthogonale Kugel

$$(12) \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{\|\mathfrak{x} \, d\mathfrak{x} \, d^2\mathfrak{x} \, d^3\mathfrak{x}\|}{\sqrt{\|\mathfrak{x} \, d\mathfrak{x} \, d^2\mathfrak{x} \, d^3\mathfrak{x}\|^2}} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{Z} = \frac{\|\mathfrak{y} \, d\mathfrak{y} \, d^2\mathfrak{y} \, d^3\mathfrak{y}\|}{\sqrt{\|\mathfrak{y} \, d\mathfrak{y} \, d^2\mathfrak{y} \, d^3\mathfrak{y}\|^2}} \end{array} \right|$$

$$(13) \quad (yy)_s = 1. \quad | \quad (\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})_s = 1.$$

Man setze

$$(14) \quad \left. \begin{array}{l} d\theta^2 = (dy \, dy)_s, \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} d\Sigma^2 = (d\mathfrak{Z} \, d\mathfrak{Z})_s, \end{array} \right|$$

$$(15) \quad \left. \begin{array}{l} ds^2 = (d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{x})_s. \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} d\bar{s}^2 = (d\mathfrak{y} \, d\mathfrak{y})_s. \end{array} \right|$$

Es gelten die folgenden Beziehungen :

$$(16) \quad \left. \begin{array}{l} (y\mathfrak{x})_s = (y d\mathfrak{x})_s = (y d^2\mathfrak{x})_s = 0, \\ (dy\mathfrak{x})_s = (dy d\mathfrak{x})_s = (dy d^2\mathfrak{x})_s = 0. \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} (\mathfrak{Z}\mathfrak{y})_s = (\mathfrak{Z} d\mathfrak{y})_s = (\mathfrak{Z} d^2\mathfrak{y})_s = 0, \\ (d\mathfrak{Z}\mathfrak{y})_s = (d\mathfrak{Z} d\mathfrak{y})_s = (d\mathfrak{Z} d^2\mathfrak{y})_s = 0. \end{array} \right|$$

Setzt man weiter in Einklang mit (4)

$$(17) \quad \left. \begin{array}{l} \xi = \cos \phi(\sigma) y + \sin \phi(\sigma) \frac{dy}{d\theta}, \\ \tilde{y} = \sin \phi(\sigma) y - \cos \phi(\sigma) \frac{dy}{d\theta}, \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{X} = \cos \phi(\phi) \mathfrak{Z} + \sin \phi(\phi) \frac{d\mathfrak{Z}}{d\Sigma}, \\ \tilde{\mathfrak{Z}} = \sin \phi(\phi) \mathfrak{Z} - \cos \phi(\phi) \frac{d\mathfrak{Z}}{d\Sigma}, \end{array} \right|$$

so kann man auch schreiben :

$$(18) \quad \left. \begin{array}{l} \xi = i \left\| \mathfrak{x} \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \tilde{y} \right\|, \\ (\xi\xi)_s = 1 \\ \tilde{y} = i \left\| \mathfrak{x} \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \xi \right\|, \\ (\tilde{y}\tilde{y})_s = 1. \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} \mathfrak{X} = i \left\| \mathfrak{y} \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}} \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\bar{s}^2} \tilde{\mathfrak{Z}} \right\|, \\ (\mathfrak{X}\mathfrak{X})_s = 1, \\ \tilde{\mathfrak{Z}} = i \left\| \mathfrak{y} \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}} \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\bar{s}^2} \mathfrak{X} \right\|, \\ (\tilde{\mathfrak{Z}}\tilde{\mathfrak{Z}})_s = 1. \end{array} \right|$$

In der Tat ist :

$$(19) \quad \left. \begin{array}{l} (\xi\mathfrak{x})_s = \left(\xi \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \right)_s = \left(\xi \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \right)_s \\ \quad \quad \quad = (\xi\tilde{y})_s = 0, \quad \text{usw.} \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} (\mathfrak{X}\mathfrak{y})_s = \left(\mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}} \right)_s = \left(\mathfrak{X} \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\bar{s}^2} \right)_s \\ \quad \quad \quad = (\mathfrak{X}\tilde{\mathfrak{Z}})_s = 0, \quad \text{usw.} \end{array} \right|$$

In dem Kugelbüschel

$$l\tilde{y} + m\xi$$

$$l\tilde{3} + m\mathfrak{X}$$

gibt es ein paar Nullkugeln:

$$(20) \quad \left. \begin{array}{l} \nu p = i\xi - \tilde{y}, \\ \bar{\nu}\bar{p} = -i\xi - \tilde{y}, \\ (pp)_5 = 0, \quad (\bar{p}\bar{p})_5 = 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mu q = i\mathfrak{X} - \tilde{3}, \\ \bar{\mu}\bar{q} = -i\mathfrak{X} - \tilde{3}, \\ (qq)_5 = 0, \quad (\bar{q}\bar{q})_5 = 0. \end{array} \right\}$$

Offenbar enthalten die beiden Nullkugeln

$$p \text{ und } \bar{p}$$

$$q \text{ und } \bar{q}$$

drei unendlich benachbarte Kurvenpunkte der Kurve (11) wie man nach (19) ersieht:

$$\left. \begin{array}{l} (p\mathfrak{x})_5 = (p d\mathfrak{x})_5 = (p d^2\mathfrak{x})_5 = 0, \\ (\bar{p}\mathfrak{x})_5 = (\bar{p} d\mathfrak{x})_5 = (\bar{p} d^2\mathfrak{x})_5 = 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (q\mathfrak{y})_5 = (q d\mathfrak{y})_5 = (q d^2\mathfrak{y})_5 = 0, \\ (\bar{q}\mathfrak{y})_5 = (\bar{q} d\mathfrak{y})_5 = (\bar{q} d^2\mathfrak{y})_5 = 0. \end{array} \right\}$$

Aus

$$(p d\mathfrak{x})_5 = 0 \text{ und } (p d^2\mathfrak{x})_5 = 0 \quad \left| \quad (q d\mathfrak{y})_5 = 0 \text{ und } (q d^2\mathfrak{y})_5 = 0 \right.$$

ergibt sich:

$$(21) \quad \left. \begin{array}{l} (d\mathfrak{x} d p)_5 = 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (d\mathfrak{y} d q)_5 = 0. \end{array} \right\}$$

Weiter ist nach (2), (17) und (20):

$$\left. \begin{array}{l} \nu d q + d \nu p = e^{i\psi} \left\{ i \left(\frac{dy}{d\theta} + i y \right) d\phi \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} + i \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta \right\} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \mu d q + d \mu q = e^{i\psi} \left\{ i \left(\frac{d3}{d\Sigma} + i 3 \right) d\psi \right. \\ \left. + \left(\frac{d^2 3}{d\Sigma^2} + i \frac{d3}{d\Sigma} \right) d\Sigma \right\} \end{array} \right\}$$

und folglich ist:

$$(22) \quad \left. \begin{array}{l} (d p d p)_5 = 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (d q d q)_5 = 0. \end{array} \right\}$$

Ebenso ist:

$$(23) \quad \left. \begin{array}{l} (d \bar{p} d \bar{p})_5 = 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (d \bar{q} d \bar{q})_5 = 0. \end{array} \right\}$$

Also beschreiben die Punkte

$$p \text{ und } \bar{p}$$

$$q \text{ und } \bar{q}$$

je eine *Minimalkurve*. Nach (7) ersehen wir, dass

$$(24) \quad \left. \begin{array}{lll} (\mathfrak{x}\mathfrak{y})_5 = 0, & (\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}})_5 = 0, & (\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y})_5 = 0, \quad (\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{y}})_5 = 0, \\ (\mathfrak{x} d\mathfrak{y})_5 \equiv - (d\mathfrak{x}\mathfrak{y})_5 = 0, & (\mathfrak{x} d\bar{\mathfrak{y}})_5 \equiv - (d\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{y}})_5 = 0, & \\ (\bar{\mathfrak{x}} d\mathfrak{y})_5 \equiv - (d\bar{\mathfrak{x}}\mathfrak{y})_5 = 0, & (\bar{\mathfrak{x}} d\bar{\mathfrak{y}})_5 \equiv - (d\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{y}})_5 = 0 & \end{array} \right\}$$

ist. Folglich ist jedes Element des jeden Kugelbüschels $l\mathfrak{x} + m\mathfrak{y}$, $l\mathfrak{x} + m\bar{\mathfrak{y}}$, $l\bar{\mathfrak{x}} + m\mathfrak{y}$, $l\bar{\mathfrak{x}} + m\bar{\mathfrak{y}}$ ebenfalls Nullkugel.

Die Formeln (20) können wir wie folgt umschreiben :

$$(25) \quad \left. \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{y}} = -\frac{1}{2}(\nu\mathfrak{p} + \bar{\nu}\bar{\mathfrak{p}}), \\ \xi = -\frac{1}{2i}(\nu\mathfrak{p} - \bar{\nu}\bar{\mathfrak{p}}). \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{z}} = -\frac{1}{2}(\mu\mathfrak{q} + \bar{\mu}\bar{\mathfrak{q}}), \\ \mathfrak{x} = -\frac{1}{2i}(\mu\mathfrak{q} - \bar{\mu}\bar{\mathfrak{q}}). \end{array} \right.$$

Bis jetzt sind

$$\nu = \nu(s) \text{ und } \bar{\nu} = \bar{\nu}(s) \quad | \quad \mu = \mu(\mathfrak{s}) \text{ und } \bar{\mu} = \bar{\mu}(\mathfrak{s})$$

beliebige Funktionen von

$$s \quad | \quad \mathfrak{s}$$

gewesen und

$$\mathfrak{p} \text{ und } \bar{\mathfrak{p}} \quad | \quad \mathfrak{q} \text{ und } \bar{\mathfrak{q}}$$

noch nicht normiert. Wir können noch zwei Forderungen einführen. Es sei erstens :

$$(26) \quad \left. (\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}})_s = 2k^2. \right| \left. (\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}) = 2k^2. \right|$$

Dann erkennen wir aus

$$(\tilde{\mathfrak{y}}\tilde{\mathfrak{y}})_s = 1 \quad | \quad (\tilde{\mathfrak{z}}\tilde{\mathfrak{z}})_s = 1$$

dass die Beziehung

$$(27) \quad \left. \nu\bar{\nu} = k^{-2} \right| \left. \mu\bar{\mu} = k^{-2} \right|$$

gilt. Nach (25), (26) und (27) ist dann

$$(28) \quad \left. (\mathfrak{p}\tilde{\mathfrak{y}})_s = -\frac{1}{\nu}. \right| \left. (\mathfrak{q}\tilde{\mathfrak{z}})_s = -\frac{1}{\mu}. \right|$$

Zur Normierung von

$$\mathfrak{p} \text{ und } \bar{\mathfrak{p}} \quad | \quad \mathfrak{q} \text{ und } \bar{\mathfrak{q}}$$

wollen wir noch die zweite Forderung einführen :

$$(29) \quad \left. (d\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}})_s \equiv -(\mathfrak{p}d\bar{\mathfrak{p}})_s = 0. \right| \left. (d\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}})_s \equiv -(\mathfrak{q}d\bar{\mathfrak{q}})_s = 0. \right|$$

Aus (20) und (29) ergibt sich etwa :

$$(30) \quad \left. \begin{array}{l} \nu = e^{i(\sigma - \sigma_0)}, \\ d\sigma^2 = (d\xi d\bar{\xi})_s, \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \mu = e^{i(\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)}, \\ d\mathfrak{s}^2 = (d\mathfrak{x} d\bar{\mathfrak{x}})_s, \end{array} \right|$$

so dass

$$\nu \quad | \quad \mu$$

und folglich nach (27) auch

$$\bar{\nu} \quad | \quad \bar{\mu}$$

bis auf konstante Faktoren wohl normiert sind. Daher sind

$$p \text{ und } \bar{p} \quad | \quad q \text{ und } \bar{q}$$

nach (20) auch bis auf konstante Faktoren schon wohl normiert.

Vier unendlich benachbarte Kugeln

$$\xi(\sigma) \quad | \quad \mathfrak{X}(\phi)$$

usw. bestimmen eine gemeinsame orthogonale Kugel

$$(31) \quad \mathfrak{X} = \frac{\left\| \xi \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^3\xi}{d\sigma^3} \right\|}{\sqrt{\left\| \xi \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^3\xi}{d\sigma^3} \right\|^2}} \quad | \quad \xi = \frac{\left\| \mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \frac{d^2\mathfrak{X}}{d\phi^2} \frac{d^3\mathfrak{X}}{d\phi^3} \right\|}{\sqrt{\left\| \mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \frac{d^2\mathfrak{X}}{d\phi^2} \frac{d^3\mathfrak{X}}{d\phi^3} \right\|^2}}$$

und vier unendlich benachbarte Kugeln

$$\mathfrak{X}(\phi), \quad (d\phi^2 = (d\mathfrak{X} d\mathfrak{X})_5) \quad | \quad \xi(\sigma), \quad (d\sigma^2 = (d\xi d\xi)_5)$$

usw. bestimmen eine gemeinsame orthogonale Kugel

$$(32) \quad \xi = \frac{\left\| \mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \frac{d^2\mathfrak{X}}{d\phi^2} \frac{d^3\mathfrak{X}}{d\phi^3} \right\|}{\sqrt{\left\| \mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} \frac{d^2\mathfrak{X}}{d\phi^2} \frac{d^3\mathfrak{X}}{d\phi^3} \right\|^2}} \quad | \quad \mathfrak{X} = \frac{\left\| \xi \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^3\xi}{d\sigma^3} \right\|}{\sqrt{\left\| \xi \frac{d\xi}{d\sigma} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^3\xi}{d\sigma^3} \right\|^2}}$$

Wir beweisen jetzt:

$$(33) \quad \left(\frac{d\tilde{y}}{d\sigma} \frac{d\tilde{y}}{d\sigma} \right)_5 = 1. \quad | \quad \left(\frac{d\tilde{3}}{d\phi} \frac{d\tilde{3}}{d\phi} \right)_5 = 1.$$

In der Tat, differenziert man (20), so folgt:

$$\frac{d\nu}{d\sigma} p + \nu \frac{dp}{d\sigma} = i \frac{d\xi}{d\sigma} - \frac{d\tilde{y}}{d\sigma}. \quad | \quad \frac{d\mu}{d\phi} q + \mu \frac{dq}{d\phi} = i \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} - \frac{d\tilde{3}}{d\phi}.$$

Nun ist nach (30):

$$\frac{d\nu}{d\sigma} = i\nu. \quad | \quad \frac{d\mu}{d\phi} = i\mu.$$

Daher ist:

$$\begin{array}{l|l}
 i\nu p + \nu \frac{dp}{d\sigma} = i(i\xi - \tilde{y}) + \nu \frac{dp}{d\sigma} & i\mu q + \mu \frac{dq}{d\phi} = i(i\mathfrak{X} - \tilde{\mathfrak{Z}}) + \mu \frac{dq}{d\phi} \\
 = i \frac{d\xi}{d\sigma} - \frac{d\tilde{y}}{d\sigma}, & = i \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} - \frac{d\tilde{\mathfrak{Z}}}{d\phi},
 \end{array}$$

so dass

$$(34) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\sigma} + \tilde{y} - i\xi + i \frac{d\tilde{y}}{d\sigma} \\ = \frac{\nu}{i} \frac{dp}{d\sigma} \end{array} \right] \quad \left| \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} + \tilde{\mathfrak{Z}} - i\mathfrak{X} + i \frac{d\tilde{\mathfrak{Z}}}{d\phi} \\ = \frac{\mu}{i} \frac{dq}{d\phi} \end{array} \right] \right.$$

ist. Nun ist nach (20) leicht zu ersehen, dass

$$(35) \quad \left[(d\tilde{y} d\xi)_s = 0 \right] \quad \left| \quad \left[(d\tilde{\mathfrak{Z}} d\mathfrak{X})_s = 0 \right] \right.$$

ist.

Aus (22), (30) und (34) ergibt sich (33).

Wegen (33) können wir schreiben:

$$(36) \quad \left[d\sigma^2 = (d\tilde{y} d\tilde{y})_s \right] \quad \left| \quad \left[d\phi^2 = (d\tilde{\mathfrak{Z}} d\tilde{\mathfrak{Z}})_s \right] \right.$$

Von hier an bis (42) wird die vorkommende Theorie für die beiden Seiten (linke und rechte!) gültig.

Es ist ohne weiteres zu ersehen, dass für alle Verhältnisse $p:q:r$ und l

$$(p\xi + qd\xi + rd^2\xi, l\mathfrak{X} + d\mathfrak{X})_s = 0 \quad | \quad (p\mathfrak{X} + qd\mathfrak{X} + rd^2\mathfrak{X}, l\xi + d\xi)_s = 0$$

ist. Da nun der Punkt

$\mathfrak{x}$

$\mathfrak{y}$

in drei unendlich benachbarten Kugeln

$$\xi, \xi + d\xi, \xi + d\xi + \frac{1}{2}d^2\xi \quad \left| \quad \mathfrak{X}, \mathfrak{X} + d\mathfrak{X}, \mathfrak{X} + d\mathfrak{X} + \frac{1}{2}d^2\mathfrak{X} \right.$$

enthalten ist, muss etwa

$$\mathfrak{x} = \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} + l\mathfrak{X}, \quad \left| \quad \mathfrak{y} = \frac{d\xi}{d\sigma} + l\xi, \right.$$

$$1 + l^2 = 0$$

sein, so dass wir etwa

$$(37) \quad \left[\begin{array}{l} \mu\mathfrak{x} = \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} + i\mathfrak{X}, \\ \bar{\mu}\bar{\mathfrak{x}} = \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} - i\mathfrak{X}, \\ (\mathfrak{x}\mathfrak{x})_s = 0, \quad (\bar{\mathfrak{x}}\bar{\mathfrak{x}})_s = 0 \end{array} \right] \quad \left| \quad \left[\begin{array}{l} \nu\mathfrak{y} = \frac{d\xi}{d\sigma} + i\xi, \\ \bar{\nu}\bar{\mathfrak{y}} = \frac{d\xi}{d\sigma} - i\xi, \\ (\mathfrak{y}\mathfrak{y})_s = 0, \quad (\bar{\mathfrak{y}}\bar{\mathfrak{y}})_s = 0 \end{array} \right] \right.$$

setzen können.

Bis jetzt sind

$\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$

$\mathfrak{y}$ und $\bar{\mathfrak{y}}$

noch nicht normiert. Zu ihrer Normierung führen wir zwei Forderungen

$$(38) \quad (\mathfrak{x} d\bar{\mathfrak{x}})_s \equiv -(\bar{\mathfrak{x}} d\mathfrak{x})_s = 0,$$

$$(\mathfrak{y} d\bar{\mathfrak{y}})_s \equiv -(\bar{\mathfrak{y}} d\mathfrak{y})_s = 0,$$

$$(39) \quad (\mathfrak{x} \bar{\mathfrak{x}})_s = 2k^2$$

$$(\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{y}})_s = 2k^2$$

ein. Aus (38) und (39) ergibt sich:

$$(40) \quad \mu \bar{\mu} = k^{-2}$$

$$\nu \bar{\nu} = k^{-2}$$

und folglich folgen aus (37) und (40) die folgenden Identitäten:

$$(41) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{x} \mathfrak{X})_s &= \frac{i}{\mu}, \\ (\bar{\mathfrak{x}} \mathfrak{X})_s &= -\frac{i}{\bar{\mu}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{y} \mathfrak{X})_s &= \frac{i}{\nu}, \\ (\bar{\mathfrak{y}} \mathfrak{X})_s &= -\frac{i}{\bar{\nu}}. \end{aligned}$$

Aus (37) und (38) ergibt sich, wie bei (31), etwa

$$(42) \quad \mu = e^{i(\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0)}.$$

$$\nu = e^{i(\sigma - \sigma_0)}.$$

Also stimmen μ und ν in (31) bzw. mit den μ und ν in (42) überein.

Nach (33) ist

$$\frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$\frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{s}}$$

schon wohl normiert. Es ist

$$0 = \left(\mathfrak{x} \frac{d\xi}{d\sigma} \right)_s,$$

$$0 = \left(\mathfrak{y} \frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{s}} \right)_s,$$

$$\left(\tilde{\mathfrak{y}} \frac{d\xi}{d\sigma} \right)_s \equiv - \left(\frac{d\tilde{\mathfrak{y}}}{d\sigma} \xi \right)_s = -1.$$

$$\left(\tilde{\mathfrak{z}} \frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{s}} \right)_s \equiv - \left(\frac{d\tilde{\mathfrak{z}}}{d\mathfrak{s}} \mathfrak{X} \right)_s = -1.$$

Also enthält die Kugel

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} \left(\text{als besondere } \frac{d\xi}{d\sigma} \right)$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{z}}{d\Sigma^2} \left(\text{als besondere } \frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{s}} \right)$$

den Punkt

$\mathfrak{x}$

$\mathfrak{y}$

und schliesst mit

y

$\mathfrak{z}$

den Winkel $\pm \pi$ ein, so dass wir z. B. für die linke Seite etwa

$$x = A \frac{d^2 y}{d\theta^2} + By$$

annehmen können. Aus den weiteren Forderungen

$$(yy)_5 = 1, \quad \left(y \frac{d^2 y}{d\theta^2}\right)_5 = -1,$$

ergibt sich $A = B$, so dass wir etwa⁽¹⁾

$$(43) \quad \boxed{\begin{array}{l} \rho \cdot \hat{x} = \frac{d^2 y}{d\theta^2} + y, \\ \rho \neq 0 \end{array}} \quad \left| \quad \boxed{\begin{array}{l} \rho \cdot \hat{y} = \frac{d^2 \mathfrak{z}}{d\Sigma^2} + \mathfrak{z}, \\ \rho \neq 0 \end{array}} \right.$$

setzen können. Durch Vergleich von (43) mit (34) erhalten wir:

$$(44) \quad \rho \cdot \hat{x} = \frac{\hat{p}}{i} \frac{dp}{d\theta} \quad \left| \quad \rho \cdot \hat{y} = \frac{\hat{q}}{i} \frac{dq}{d\Sigma} \right.$$

Dabei ist z. B. für die linke Seite

$$(45) \quad \begin{aligned} d\rho \cdot \hat{x} + \rho \cdot d\hat{x} &= \frac{d\hat{p}}{i} \frac{dp}{d\theta} + \frac{\hat{p}}{i} \frac{d^2 p}{d\theta^2} d\theta, \\ \rho^2 (d\hat{x} d\hat{x})_5 &= -\hat{p}^2 \left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} \right)_5 d\theta^2, \\ \rho &= \pm i \hat{p} \sqrt{\left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} \right)_5} \frac{d\theta}{d\hat{s}}, \end{aligned}$$

so dass

$$(46) \quad \boxed{\hat{x} = \frac{1}{\pm \frac{d\theta}{d\hat{s}} \sqrt{\left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} \right)_5}} \frac{dp}{d\theta}} \quad \left| \quad \boxed{\hat{y} = \frac{1}{\pm \frac{d\Sigma}{d\hat{s}} \sqrt{\left(\frac{d^2 q}{d\Sigma^2} \frac{d^2 q}{d\Sigma^2} \right)_5}} \frac{dq}{d\Sigma}} \right.$$

wird. Aus (23), (43) und (45) folgt nach (37):

$$\hat{p} p + \rho \hat{x} = i y + \frac{dy}{d\theta} = \hat{p} \hat{y}, \quad \left| \quad \hat{q} q + \rho \hat{y} = i \mathfrak{z} + \frac{d\mathfrak{z}}{d\Sigma} = \hat{q} \hat{x}, \right.$$

d. h.

$$(47) \quad \boxed{p \pm i \sqrt{\left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2} \right)_5} \frac{d\theta}{d\hat{s}} \hat{x} = \hat{y}} \quad \left| \quad \boxed{q \mp i \sqrt{\left(\frac{d^2 q}{d\Sigma^2} \frac{d^2 q}{d\Sigma^2} \right)_5} \frac{d\Sigma}{d\hat{s}} \hat{y} = \hat{x}} \right.$$

⁽⁵⁾ Dabei entspricht dem Wert

$$\phi = 0.$$

$$\psi = 0.$$

Ebenso erhalten wir :

$$(48) \quad \boxed{\bar{p} \mp i \sqrt{\left(\frac{d^2 \bar{p}}{d\theta^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2}\right)_s} \frac{d\theta}{d\hat{s}} \hat{\varepsilon} = \hat{\eta}} \quad \left| \quad \boxed{\hat{q} \pm i \sqrt{\left(\frac{d^2 \bar{q}}{d\Sigma^2} \frac{d^2 q}{d\Sigma^2}\right)_s} \frac{d\Sigma}{d\hat{\S}} \hat{\eta} = \hat{\varepsilon}} \right.$$

Setzen wir

$$(49) \quad \boxed{\begin{aligned} \hat{\mathfrak{R}} &= \pm \frac{i}{\hat{\mu}} \sqrt{\left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} \frac{d^2 \bar{p}}{d\theta^2}\right)_s} \frac{d\theta}{d\hat{s}}, \\ \hat{\mathfrak{R}} &= \mp \frac{i}{\hat{\mu}} \sqrt{\left(\frac{d^2 \bar{p}}{d\theta^2} \frac{d^2 p}{d\theta^2}\right)_s} \frac{d\theta}{d\hat{s}}, \end{aligned}} \quad \left| \quad \boxed{\begin{aligned} \hat{R} &= \mp \frac{i}{\hat{\nu}} \sqrt{\left(\frac{d^2 q}{d\Sigma^2} \frac{d^2 \bar{q}}{d\Sigma^2}\right)_s} \frac{d\Sigma}{d\hat{\S}}, \\ \hat{R} &= \pm \frac{i}{\hat{\nu}} \sqrt{\left(\frac{d^2 \bar{q}}{d\Sigma^2} \frac{d^2 q}{d\Sigma^2}\right)_s} \frac{d\Sigma}{d\hat{\S}}, \end{aligned}} \right.$$

so werden (47) und (48) zu :

$$(50) \quad \boxed{\begin{aligned} p - \hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}} \hat{\varepsilon} &= \hat{\eta}, \\ \bar{p} - \hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}} \hat{\varepsilon} &= \hat{\eta}. \end{aligned}} \quad \left| \quad \boxed{\begin{aligned} q + \hat{\nu} \hat{R} \hat{\eta} &= \hat{\varepsilon}, \\ \bar{q} + \hat{\nu} \hat{R} \hat{\eta} &= \hat{\varepsilon}. \end{aligned}} \right.$$

Aus (50) ergibt sich :

$$(51) \quad \boxed{\hat{\mu}^2 \hat{\mathfrak{R}}^2 = \left(\frac{d\hat{\S}}{d\hat{s}}\right)^2} \quad \left| \quad \boxed{\hat{\nu}^2 \hat{R}^2 = \left(\frac{d\hat{s}}{d\hat{\S}}\right)^2}, \right.$$

so dass wir das Vorzeichen etwa durch

$$(52) \quad \boxed{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}} = -\frac{d\hat{\S}}{d\hat{s}}, \quad \hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}} = -\frac{d\hat{\S}}{d\hat{s}}} \quad \left| \quad \boxed{\hat{\nu} \hat{R} = \frac{d\hat{s}}{d\hat{\S}}, \quad \hat{\nu} \hat{R} = \frac{d\hat{s}}{d\hat{\S}}}$$

feststellen können.

Aus (52) ergibt sich :

$$(53) \quad \boxed{\hat{\nu} \hat{R} = -\frac{1}{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}}}, \quad \hat{\nu} \hat{R} = -\frac{1}{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}}},}$$

und aus (49) und (52) :

$$(54) \quad \boxed{\frac{d\hat{\S}}{d\theta} = \mp i \sqrt{\left(\frac{d^2 p}{d\theta^2} \frac{d^2 \bar{p}}{d\theta^2}\right)_s},} \quad \left| \quad \boxed{\frac{d\hat{s}}{d\Sigma} = \pm i \sqrt{\left(\frac{d^2 q}{d\Sigma^2} \frac{d^2 \bar{q}}{d\Sigma^2}\right)_s},}$$

so dass nach (22) und (23)

$$(55) \quad \boxed{\hat{\mu} \hat{R} = -\frac{d\hat{\S}}{d\hat{s}} = \frac{d\Sigma}{d\theta} \frac{\sqrt{(a^2 p \, d^2 \bar{p})_s}}{\sqrt{(a^2 q \, d^2 \bar{q})_s}} = -\frac{1}{\hat{\nu} \hat{R}}}$$

ist.

Wegen (53) nach (50) ersehen wir, dass die Beziehung

$$(56) \quad \boxed{q = -\hat{v} \hat{R} p = \frac{p}{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}}}, \quad \bar{q} = -\hat{v} \hat{R} \bar{p} = \frac{\bar{p}}{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}}}}$$

besteht.

Indem man (46) mit (49) vergleicht, erhält man :

$$(57) \quad \boxed{\hat{\xi} = \frac{-i}{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}}} \frac{dp}{d\theta} = \frac{\hat{v}}{\hat{\mu} \hat{\mathfrak{R}}} \frac{dp}{d\hat{v}}} \quad \Bigg| \quad \boxed{\hat{\eta} = \frac{-i}{\hat{v} \hat{R}} \frac{dq}{d\Sigma} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{v} \hat{R}} \frac{dq}{d\hat{\mu}}}$$

Aus (43) und (17) ergibt sich :

$$\rho \cdot \hat{\xi} = \frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = (\cos \phi \cdot \xi + \sin \phi \cdot \tilde{y}) \left(\frac{d\phi}{d\theta} + 1 \right) + \sin \phi \frac{d\xi}{d\theta} - \cos \phi \frac{d\tilde{y}}{d\theta}.$$

Durch Multiplikation mit ξ , erhält man :

$$(58) \quad \boxed{d\sigma = d\theta + d\phi.} \quad \Bigg| \quad \boxed{d\hat{\phi} = d\Sigma + d\phi.}$$

Offenbar können wir annehmen :

$$fp - g\mathfrak{x} = \eta.$$

Durch Multiplikation mit ξ , erhält man :

$$f(p\xi)_s = \frac{i}{\nu}.$$

Nun ist nach (20) :

$$\nu(p\xi)_s = -i,$$

so dass $f = -1$ also

$$-p - g\mathfrak{x} = \eta$$

wird. Durch Differenzierung und Quadrierung, ersieht man, dass

$$g = \pm \frac{d\bar{s}}{ds}$$

ist, wobei

$$(59) \quad \boxed{ds^2 = (d\mathfrak{x} d\mathfrak{x})_s} \quad \Bigg| \quad \boxed{d\bar{s}^2 = (d\eta d\eta)_s}$$

ist. Wir wollen das Vorzeichen von ds dadurch feststellen, dass

$$(60) \quad \boxed{p - \mu \mathfrak{R} \mathfrak{x} = \eta, \quad \bar{p} - \bar{\mu} \bar{\mathfrak{R}} \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\eta}} \quad \Bigg| \quad \boxed{q - \nu R \eta = \mathfrak{x}, \quad \bar{q} - \bar{\nu} \bar{R} \bar{\eta} = \bar{\mathfrak{x}}}$$

wird, wobei

$$(61) \quad \left[\begin{array}{l} \mu \mathfrak{R} = -\frac{d\bar{s}}{ds}, \\ \bar{\mu} \bar{\mathfrak{R}} = -\frac{d\bar{s}}{d\bar{s}} \end{array} \right] \quad \left| \quad \left[\begin{array}{l} \nu R = \frac{ds}{d\bar{s}}, \\ \bar{\nu} \bar{R} = \frac{d\bar{s}}{d\bar{s}} \end{array} \right] \right.$$

gesetzt ist, so dass

$$(62) \quad \left[\mu \mathfrak{R} = -\frac{d\bar{s}}{ds} = -\frac{1}{\nu R} \right]$$

ist.

Führen wir die Bezeichnungen⁽¹⁾

$$(63) \quad \left[t \equiv \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \right] \quad \left| \quad \left[t \equiv -\frac{d\mathfrak{v}}{d\bar{s}} \right] \right.$$

$$(64) \quad \left[z \equiv \frac{d\xi}{d\sigma} \right] \quad \left| \quad \left[X \equiv \frac{d\mathfrak{X}}{d\bar{\phi}} \right] \right.$$

ein, so dass

$$(65) \quad \left[(tt)_5 = 1, \quad (zz)_5 = 1, \quad (XX)_5 = 1 \right]$$

wird, so sind die fünf Vektoren

$$\mathfrak{r}, \quad t, \quad z, \quad \xi, \quad \mathfrak{X} \quad \left| \quad \mathfrak{v}, \quad -t, \quad X, \quad \mathfrak{X}, \quad \xi \right.$$

voneinander linear unabhängig, da ja

$$|\mathfrak{r} \ t \ z \ \xi \ \mathfrak{X}|^2 = \mu^{-2} \neq 0 \quad \left| \quad |\mathfrak{v} \ -t \ X \ \mathfrak{X} \ \xi|^2 = \nu^{-2} \neq 0 \right.$$

ist. Wir nehmen dabei das Koordinatensystem so an, dass

$$(66) \quad |\mathfrak{r} \ t \ z \ \xi \ \mathfrak{X}| = \mu^{-1} \quad \left| \quad |\mathfrak{v} \ -t \ X \ \mathfrak{X} \ \xi| = \nu^{-1} \right.$$

wird.

Zunächst können wir die folgende Tabelle skalarer Produkte beweisen, indem wir setzen:

$$(67) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{T} \equiv \frac{d\sigma}{ds} \equiv \tau, \\ \frac{1}{P} \equiv \left\{ \left(\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \right)_5 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \equiv \nu (d\mathfrak{v} \ d\mathfrak{v})_5^{\frac{1}{2}} : d\sigma = \nu \frac{d\bar{s}}{d\sigma}. \end{array} \right] \quad \left| \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\mathfrak{T}} \equiv \frac{d\bar{\phi}}{d\bar{s}} \equiv \mathcal{T}, \\ \frac{1}{\mathfrak{P}} \equiv \left\{ \left(\frac{d^2\mathfrak{X}}{d\bar{\phi}^2} \frac{d^2\mathfrak{X}}{d\bar{\phi}^2} \right)_5 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \equiv \mu (d\mathfrak{r} \ d\mathfrak{r})_5^{\frac{1}{2}} : d\bar{\phi} = \mu \frac{ds}{d\bar{\phi}}. \end{array} \right] \right.$$

⁽¹⁾ Dass diese gemeinsame Bezeichnungsweise für t richtig ist, ersieht man aus (68).

	ξ	z	$\mathfrak{z}$	$\bar{\mathfrak{z}}$	t	$\mathfrak{X}$		$\mathfrak{X}$	X	$\mathfrak{y}$	$\bar{\mathfrak{y}}$	$-t$	ξ
ξ	1	0	0	0	0	0	$\mathfrak{X}$	1	0	0	0	0	0
z	0	1	0	0	0	0	X	0	1	0	0	0	0
$\mathfrak{z}$	0	0	0	$2k^2$	0	$\frac{i}{\mu}$	$\mathfrak{y}$	0	0	0	$2k^2$	0	$\frac{i}{\nu}$
$\bar{\mathfrak{z}}$	0	0	$2k^2$	0	0	$-\frac{i}{\mu}$	$\bar{\mathfrak{y}}$	0	0	$2k^2$	0	0	$-\frac{i}{\nu}$
$\frac{d\mathfrak{z}}{ds}$	0	0	0	0	1	0	$\frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}}$	0	0	0	0	1	0
$\frac{dt}{ds}$	0	$\frac{1}{R}$	-1	$-k^2\mu^2$	0	0	$-\frac{dt}{d\bar{s}}$	0	$\frac{1}{\mathfrak{R}}$	-1	$-k^2\nu^2$	0	0
$\frac{dz}{ds}$	$-\frac{1}{T}$	0	0	0	$-\frac{1}{R}$	0	$\frac{dX}{d\bar{s}}$	$-\frac{1}{\mathfrak{T}}$	0	0	0	$-\frac{1}{\mathfrak{R}}$	0
$\frac{d\xi}{ds}$	0	$\frac{1}{T}$	0	0	0	0	$\frac{d\mathfrak{X}}{d\bar{s}}$	0	$\frac{1}{\mathfrak{T}}$	0	0	0	0
$\frac{d\mathfrak{X}}{ds}$	0	0	$-\frac{i}{\mu^2} \frac{d\mu}{ds}$	$-ik^2 \frac{d\mu}{d\sigma}$	0	0	$\frac{d\xi}{d\bar{s}}$	0	0	$-\frac{i}{\nu^2} \frac{d\nu}{d\bar{s}}$	$-ik^2 \frac{d\nu}{d\bar{s}}$	0	0
$\frac{d\mathfrak{z}}{d\sigma}$	0	0	0	0	$\frac{1}{\tau}$	0	$\frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{\mathfrak{s}}}$	0	0	0	0	$\frac{1}{\mathcal{T}}$	0
$\frac{dt}{d\sigma}$	0	$-\frac{1}{P}$	$-\frac{1}{\tau}$	$-\frac{k^2\mu^2}{\tau}$	0	0	$-\frac{dt}{d\bar{\mathfrak{s}}}$	0	$-\frac{1}{\mathfrak{P}}$	$-\frac{1}{\mathcal{T}}$	$-\frac{k^2\nu^2}{\mathcal{T}}$	0	0
$\frac{dz}{d\sigma}$	-1	0	0	0	$\frac{1}{P}$	0	$\frac{dX}{d\bar{\mathfrak{s}}}$	-1	0	0	0	$\frac{1}{\mathfrak{P}}$	0
$\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}$	0	0	$-\frac{i}{\mu^2} \frac{d\mu}{d\sigma}$	$-ik^2 \frac{d\mu}{d\sigma}$	0	0	$\frac{d\xi}{d\bar{\mathfrak{s}}}$	0	0	$-\frac{i}{\nu^2} \frac{d\nu}{d\bar{\mathfrak{s}}}$	$-ik^2 \frac{d\nu}{d\bar{\mathfrak{s}}}$	0	0

(69)

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}} \equiv -t.$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds} = t.$$

In der Tat, nimmt man an:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}} = A\mathfrak{y} + B\mathfrak{z} + Ct + D\xi + E\mathfrak{X},$$

dann folgt aus $0 = \left(\mathfrak{y} \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}}\right)_5$ dass $D = 0$ ist, aus $0 = \left(\mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}}\right)_5$ dass $E = 0$,

aus $1 = \left(-t, \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}}\right)_5$ nach (49) dass $C = 1$, aus $0 = \left(\xi \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}}\right)_5$ dass $A = 0$ und

aus $0 = \left(\mathfrak{X} \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{s}} \right)_s$ dass $B = 0$ ist, so dass wir (69) erhalten. Ebenso beweist

man $\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = t$ für die rechte Seite.

Es ist

$$(70) \quad \left(\frac{dt}{d\mathfrak{s}} \mathfrak{X} \right)_s = 0. \quad \left| \quad \left(\frac{dt}{ds} \xi \right)_s = 0. \right.$$

In der Tat ist es nach (36):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{d\mathfrak{s}^2} - 2 \frac{d\nu}{d\mathfrak{s}} t - \nu \frac{dt}{d\mathfrak{s}} &= \frac{d}{d\mathfrak{s}} \left\{ \left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + i \frac{d\xi}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{d\mathfrak{s}} \right\} \\ &= \left(\frac{d^3\xi}{d\theta^3} + i \frac{d^2\xi}{d\theta^2} \right) \left(\frac{d\theta}{d\mathfrak{s}} \right)^2 + \left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + i \frac{d\xi}{d\theta} \right) \frac{d^2\theta}{d\mathfrak{s}^2}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{d\mathfrak{s}^2} (\mathfrak{y}\mathfrak{X})_s - 2 \frac{d\nu}{d\mathfrak{s}} (t, \mathfrak{X})_s - \nu \left(\frac{dt}{d\mathfrak{s}} \mathfrak{X} \right)_s \\ = \left(\left(\frac{d^3\xi}{d\theta^3} + i \frac{d^2\xi}{d\theta^2} \right) \left(\frac{d\theta}{d\mathfrak{s}} \right)^2 + \left(\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + i \frac{d\xi}{d\theta} \right) \frac{d^2\theta}{d\mathfrak{s}^2}, \mathfrak{X} \right)_s = 0, \\ (\mathfrak{y}\mathfrak{X})_s = 0, \quad (t\mathfrak{X})_s = 0, \end{aligned}$$

woraus (70) folgt.

Auf Grund der Formeln (57), (63), (69) und der Tabelle (68) kann man die folgenden Ableitungsgleichungen herleiten, die konforme Verallgemeinerungen⁽¹⁾ der Frenetschen Formeln und ihre dualen Gegenstücke sind:

$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{x}}{ds} &= t, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{z}{R} - \mu^2 \mathfrak{x} + \mu i \mathfrak{X}, \\ \frac{d\xi}{ds} &= \frac{z}{T}, \\ \frac{dz}{ds} &= -\frac{\xi}{T} - \frac{t}{R}, \\ \frac{d\mathfrak{X}}{ds} &= -i \frac{d\mu}{ds} \mathfrak{x} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{ds} \mathfrak{X}; \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{s}} &= -t, \\ -\frac{dt}{d\mathfrak{s}} &= \frac{X}{\mathfrak{R}} - \nu^2 \mathfrak{y} + \nu i \xi, \\ \frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{s}} &= \frac{X}{\mathfrak{T}}, \\ \frac{dX}{d\mathfrak{s}} &= -\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{T}} + \frac{t}{\mathfrak{R}}, \\ \frac{d\xi}{d\mathfrak{s}} &= -i \frac{d\nu}{d\mathfrak{s}} \mathfrak{y} - \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\mathfrak{s}} \xi; \end{aligned}$
---	---

(71)

⁽¹⁾ Wegen der geometrischen Bedeutungen auftretender Grössen und Vektoren siehe T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, I, Tôhoku Sci. Rep., vol. 17 (1928) S. 290—291.

$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\sigma} &= z, \\ \frac{dz}{d\sigma} &= \frac{t}{P} - \xi, \\ \frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma} &= \frac{t}{\tau}, \\ \frac{dt}{d\sigma} &= -\frac{\mu^2}{\tau} \mathfrak{x} - \frac{z}{P} + \frac{\mu i}{\tau} \mathfrak{x}, \\ \frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma} &= -i \frac{d\mu}{d\sigma} \mathfrak{x} - \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\sigma} \mathfrak{X}. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{X}}{d\phi} &= X, \\ \frac{dX}{d\phi} &= -\frac{t}{\mathfrak{P}} - \mathfrak{X}, \\ \frac{d\mathfrak{y}}{d\phi} &= -\frac{t}{\mathcal{T}}, \\ -\frac{dt}{d\phi} &= -\frac{\nu^2}{\mathcal{T}} \mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{P}} + \frac{\nu i}{\mathcal{T}} \xi, \\ \frac{d\xi}{d\phi} &= -i \frac{d\nu}{d\phi} \mathfrak{y} - \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{d\phi} \xi. \end{aligned}$
---	---

Wir wollen noch Verallgemeinerungen einiger bekannter Formeln in der N. E. Geometrie ableiten.

Es ist

$(73) \quad \mathfrak{x} = \nu \ \mathfrak{y} \mathfrak{x} - t \xi\ .$	$\mathfrak{y} = \mu \ \mathfrak{x} \mathfrak{y} - t \mathfrak{X}\ .$
--	--

In der Tat, z. B. aus $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5 = (\mathfrak{x}t)_5 = (\mathfrak{x}\xi)_5 = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})_5 = 0$ ergibt sich etwa

$$\rho \cdot \mathfrak{x} = \nu \|\mathfrak{y} \mathfrak{x} - t \xi\|$$

und (73) ergibt sich aus (65) und $(\mathfrak{x}\mathfrak{X})_5 = \frac{i}{\mu}$.

Es ist

$\begin{aligned} \mu^2 d s^2 &= \mu^2 (d\mathfrak{x} d\mathfrak{x})_5 \\ &= \left(\left(\frac{d^2 \mathfrak{X}}{d\phi^2} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{d\phi^2} \right)_5 - 1 \right) d\phi^2 \\ &= \bar{\mu}^2 d \bar{s}^2 = \bar{\mu}^2 (d\bar{\mathfrak{x}} d\bar{\mathfrak{x}})_5. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \nu^2 d \bar{s}^2 &= \nu^2 (d\mathfrak{y} d\mathfrak{y})_5 \\ &= \left(\left(\frac{d^2 \xi}{d\sigma^2} \frac{d^2 \xi}{d\sigma^2} \right)_5 - 1 \right) d\sigma^2 \\ &= \bar{\nu}^2 d \bar{s}^2 = \bar{\nu}^2 (d\bar{\mathfrak{y}} d\bar{\mathfrak{y}})_5. \end{aligned}$
---	---

Dies folgt aus (36).

Es ist

$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \left\{ \left(\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d s^2} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{d s^2} \right)_5 - \mu^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \nu \frac{d\sigma}{ds} = -\mu i \left \mathfrak{x} \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{d s^2} \xi \right . \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{R}} &= \left\{ \left(\frac{d^2 \mathfrak{y}}{d \bar{s}^2} \frac{d^2 \mathfrak{y}}{d \bar{s}^2} \right)_5 - \nu^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \mu \frac{d\phi}{d\bar{s}} = -\nu i \left \mathfrak{y} \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{s}} \frac{d^2 \xi}{d \bar{s}^2} \xi \right . \end{aligned}$
---	---

Die erste Gleichheit folgt ohne weiteres aus (71). Die dritte Gleichheit beweist man von rechts nach links mittels der Formeln (71) und (65). Hier ist es zu bemerken, dass $\nu\sigma$ der K-Kontingenzwinkel ist.

Auf Grund der Ableitungsgleichungen (71), (72), können wir wie üblich schliessen, dass *die drei Funktionen*

$$(76) \quad \begin{array}{|c|} \hline R = R(s), \\ T = T(s), \\ \mu = \mu(s); \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \Re = \Re(\mathfrak{s}), \\ \Im = \Im(\mathfrak{s}), \\ \nu = \nu(\mathfrak{s}); \\ \hline \end{array} \right.$$

oder

$$(77) \quad \begin{array}{|c|} \hline P = P(\sigma), \\ \tau = \tau(\sigma), \\ \mu = \mu(\sigma) \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\phi), \\ \mathcal{T} = \mathcal{T}(\phi), \\ \nu = \nu(\phi) \\ \hline \end{array} \right.$$

für die natürlichen Gleichungen der Kugelschar

$$\xi(\sigma) \quad \left| \quad \mathfrak{X}(\phi)\right.$$

brauchbar sind,

Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kugelscharen im konformen Raume.
Auf Grund der vollständigen Zuordnung der Formeln (11)—(77) gilt ein neues Dualitätsprinzip bei den Kugelscharen $\xi = \xi(\sigma)$ im konformen Raume.

3. Ein neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raume.

Methode I. Indem man den speziellen Fall

$$(78) \quad \begin{array}{|c|} \hline \phi(\sigma) = \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \phi(\phi) = \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array} \right.$$

vom Art. 2 betrachtet, erhält man ein neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raume. Berechnet man nämlich

$$(79) \quad \cot(\xi, y) = 0 \quad \left| \quad \cot(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = 0\right.$$

mittels der Formeln (71), so erhält man

$$(80) \quad \cot(\xi, y) = \frac{T}{R} \frac{dR}{ds} = 0 \quad \left| \quad \cot(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \frac{\Im}{\Re} \frac{d\Re}{d\mathfrak{s}} = 0\right.$$

d. h.

$$(81) \quad \begin{array}{|c|} \hline R \equiv -\frac{P}{\tau} = \text{konst.} \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \Re \equiv -\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{T}} = \text{konst.} \\ \hline \end{array} \right.$$

so dass an Stelle von (76) bzw. (77) die Funktionen.

$$(82) \quad \begin{array}{|c|} \hline \hat{T} = \hat{T}(\mathfrak{s}), \\ \hat{\mu} = \hat{\mu}(\mathfrak{s}); \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathfrak{T}} = \hat{\mathfrak{T}}(\mathfrak{s}), \\ \hat{\nu} = \hat{\nu}(\mathfrak{s}); \\ \hline \end{array} \right.$$

$$(83) \quad \begin{array}{|c|} \hline \hat{P} = \hat{P}(\theta), \\ \hat{\mu} = \hat{\mu}(\theta), \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathfrak{P}} = \hat{\mathfrak{P}}(\Sigma), \\ \hat{\nu} = \hat{\nu}(\Sigma) \\ \hline \end{array} \right.$$

für die natürlichen Gleichungen der Kurve

$$(84) \quad \hat{\mathfrak{x}} = \hat{\mathfrak{x}}(\hat{s}) \quad | \quad \hat{\mathfrak{y}} = \hat{\mathfrak{y}}(\hat{s})$$

brauchbar sind.

Methode II. Indem man den speziellen Fall

$$(85) \quad \boxed{\phi(\sigma) = \frac{\pi}{4}} \quad | \quad \boxed{\psi(\mathfrak{s}) = \frac{\pi}{4}}$$

vom Art. 2 betrachtet, erhält man ein *neues Dualitätsprinzip bei den Kurven im konformen Raume*. Es ist nämlich

$$(86) \quad \begin{aligned} \cot(\xi, \eta) &= \frac{\dot{T}}{R} \frac{dR}{ds} \\ &= \frac{d \log R}{d\sigma} = 1 \end{aligned} \quad | \quad \begin{aligned} \cot(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) &= \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{R}} \frac{d\mathfrak{R}}{d\mathfrak{s}} \\ &= \frac{d \log \mathfrak{R}}{d\mathfrak{s}} = 1 \end{aligned}$$

d. h.

$$(87) \quad \boxed{\check{R} = e^{\check{\sigma} - \check{\sigma}_0},} \quad | \quad \boxed{\check{\mathfrak{R}} = e^{\check{\mathfrak{s}} - \check{\mathfrak{s}}_0},}$$

wenn man die (85) entsprechenden Grössen mit

$$\checkmark \quad | \quad \smile$$

bezeichnet, so dass an Stelle von (76) bzw. (77) die Funktionen

$$(88) \quad \boxed{\begin{aligned} \check{T} &= \check{T}(\check{s}), \\ \check{\mu} &= \check{\mu}(\check{s}); \end{aligned}} \quad | \quad \boxed{\begin{aligned} \check{\mathfrak{T}} &= \check{\mathfrak{T}}(\check{\mathfrak{s}}), \\ \check{\mathfrak{v}} &= \check{\mathfrak{v}}(\check{\mathfrak{s}}); \end{aligned}}$$

und

$$(89) \quad \boxed{\begin{aligned} \check{P} &= \check{P}(\check{\sigma}), \\ \check{\mu} &= \check{\mu}(\check{\sigma}) \end{aligned}} \quad | \quad \boxed{\begin{aligned} \check{\mathfrak{P}} &= \check{\mathfrak{P}}(\check{\mathfrak{s}}), \\ \check{\mathfrak{v}} &= \check{\mathfrak{v}}(\check{\mathfrak{s}}) \end{aligned}}$$

für die natürlichen Gleichungen der Kurve

$$(90) \quad \check{\mathfrak{x}} = \check{\mathfrak{x}}(\check{s}) \quad | \quad \check{\mathfrak{y}} = \check{\mathfrak{y}}(\check{s})$$

brauchbar sind.