13. Eine Begründung der projektiven Differentialgeometrie in der Form einer Verallgemeinerung der N. E. Differentialgeometrie.

Von Saburô SATÔ.

(Eingegangen am 18. November, 1935)

Die projektive Differentialgeometrie von Wilczynski-Fubini kann, nach der Ansicht von Herrn Prof. Takasu, den folgenden durch Herrn Takasu⁽¹⁾ zur vollendeten Form gebrachten Schemata gemäss noch mit einigen grossen Gebieten ergänzt werden :

Die projektive Differentialgeometrie lässt sich nämlich

- (i) in der Wilczynski-Fubinischen Form,
- (ii) in der Form einer Verallgemeinerung der affinen Differentialgeometrie,
- (iii) in der Form einer Verallgemeinerung der N. E. Differentialgeometrie, und
- (iv) in der Form einer Verallgemeinerung der Euklidischen Differentialgeometrie

entwickeln.

⁽¹⁾ The "Osaka-Zenkoku-Shijō-Danwakwai," Dec, 25 (1934).

Eine Untersuchung des Gebietes (ii) macht Herr S. Sasaki in Sendai.

Nun hat Herr Prof. Takasu mit der Idee von instantanen Absoluten⁽²⁾ die Differentialkugelgeometrie systematisch und durchsichtlichst entwickelt.

Es soll im folgenden daran anschliessend die projektive Differentialgeometrie der Flächen mit der instantanen Absoluten behandelt werden, indem wir die mit der Fläche kovariantverbundenen Flächen zweiten Grades als instantane Absolute ansehen und die Linienelemente der Fläche damit einführen.

1. Normierung. Es seien x^i ($i = 1, 2, 3, 4$) die homogenen Punktkoordinaten des projektiven Raumes und

$$(1) \quad x^i = x^i(u, v) \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

die Gleichungen einer Fläche. Wenn die mit (1) kovariantverbundene nicht-ausgeartete quadratische Fläche:

$$(2) \quad \langle \xi \xi \rangle \equiv \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \xi^i \xi^j = 0$$

die instantane Absolute des N. E. Raumes ist, der die Fläche (1) an der Stelle $u = u, v = v$ anschmiegt, so sind

$$(3) \quad a_{ij} = a_{ij}(u, v),$$

Funktionen von u, v und die Determinante $|a_{ij}|$ verschwindet nicht. Wir normieren die a_{ij} so, dass

$$(4) \quad |a_{ij}| = 1$$

wird. Obgleich die Koordinaten des Flächenpunktes (x) an der Stelle $u = u, v = v$ (2) nicht genügen, wollen wir sie so normieren, dass

$$(5) \quad \langle xx \rangle \equiv \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j = k^2(u, v)$$

wird. Dazu nehmen wir als neue Koeffizienten und Koordinaten:

$$(6) \quad a_{ij}^* = a_{ij} |a_{kl}|^{-\frac{1}{2}}$$

$$(7) \quad x^{*i} = \frac{kx^i}{\sqrt{\langle xx \rangle}}$$

an, wobei $k(u, v)$ eine beliebige nichtverschwindende Funktion ist. Im folgenden werden wir den bei (6) und (7) angebrachten Stern der Kürze halber auslassen und die auf diese Weise normierten Koeffizienten und Koordinaten immer mit a_{ij} und x^i bezeichnen.

(2) T. Takasu, Vortrag bei der Düsseldorfer Tagung, (1926).

T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., vol. **17** (1928), 286 und 291.

Wir nehmen die fünfzehn Funktionen $x^i(u, v)$, $a_{ij}(u, v)$, $k(u, v)$ als stetige und hinreichend oft differentierbare Funktionen an.

2. **Linienelemente.** Der Abstand d_{PQ} zwischen den Punkten $P(x)$ und $Q(y)$ des anschmiegenden N. E. Raumes wird mit F. Klein⁽³⁾ durch die formel:

$$(8) \quad \sin^2 \frac{d_{PQ}}{k} = \frac{\begin{vmatrix} \langle xx \rangle & \langle xy \rangle \\ \langle yx \rangle & \langle yy \rangle \end{vmatrix}}{\langle xx \rangle \langle yy \rangle}$$

gegeben. Wenn die Punkte P und Q auf der Fläche unendlich benachbart sind, werden die normierten Koordinaten des Punktes Q durch $(x+dx)$ gegeben. Setzen wir $d_{PQ} = ds$, so erhalten wir

$$(9) \quad \frac{ds^2}{k^2} = \frac{\begin{vmatrix} k^2 & \langle xdx \rangle \\ \langle xdx \rangle & \langle dxdx \rangle \end{vmatrix}}{\langle xdx \rangle \langle dxdx \rangle} : k^4$$

oder

$$(9') \quad ds^2 = \frac{k^2 \langle x_\lambda x_\mu \rangle - \langle xx_\lambda \rangle \langle xx_\mu \rangle}{k^2} du^\lambda du^\mu$$

bis auf die Infinitesimalen höherer Ordnung, wo es in Bezug auf zweimal erscheinenden griechischen Indizes aller Glieden von jetzt an summiert werden soll. Nun setzen wir $u^1 = u$, $u^2 = v$ und

$$(10) \quad x_\lambda = \frac{\partial x}{\partial u^\lambda}, \quad \lambda = 1, 2.$$

Setzt man weiter

$$(11) \quad (\xi\eta) \equiv \langle \xi\eta \rangle : k^2,$$

$$(12) \quad n_\lambda = (xx_\lambda),$$

$$(13) \quad G_{\lambda\mu} = (x_\lambda x_\mu) - n_\lambda n_\mu,$$

so erhalten wir aus (5) und (9')

$$(14) \quad (xx) = 1,$$

$$(15) \quad ds^2 = k^2 G_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu.$$

3. **P-Flächennormale.** Wenn y^i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Koordinaten des Absolutpols der Tangentenebene sind, so erhalten wir

$$(16) \quad \sum_j a_{ij} y^j = \rho \|xx_u x_v\| \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

⁽³⁾ F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Mathematische Annalen, 4 (1871), 6 (1873).

und wenn wir (y) durch

$$(17) \quad \langle yy \rangle = -\rho |xx_u x_v y| = k^2$$

oder

$$(17)' \quad (yy) = 1$$

normieren, so gelten nach (12), (13) und (16) folgende Beziehungen:

$$(18) \quad (xy) = 0, \quad (x_\lambda y) = 0,$$

$$(19) \quad |xx_u x_v y|^2 = k^8 G, \quad G \equiv |G_{\lambda\mu}|.$$

Nehmen wir an, dass der Absolutpol nicht auf der Tangentenebene liegt, so verschwindet die linke Seite von (19) nicht, und es folgt

$$(20) \quad G > 0.$$

Aus (19) und (17)' folgt

$$(21) \quad \rho^2 = \frac{1}{k^4 G}.$$

Durch Parameterwahl kann man den Fall voranssetzen

$$(21)' \quad \rho = \frac{1}{k^2 \sqrt{G}}.$$

Die durch (x) und (y) gehende Gerade nennen wir die *P-Flächennormale*.

4. Ableitungsgleichungen. Die Punkte, welche die Koordinaten (x_λ) haben, liegen auf den Tangenten der Parameterlinien, welche sich im Punkte (x) schneiden. Wenn die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangente $(\overline{x}x_\lambda)$ mit dem Absolutpolar von (x) mit p_λ bezeichnet werden, so erhalten wir

$$(22) \quad p_\lambda = x_\lambda - n_\lambda x,$$

$$(23) \quad (p_\lambda p_\mu) = G_{\lambda\mu},$$

$$(24) \quad |xx_u x_v y| = |xp_1 p_2 y| = -k^4 \sqrt{G}.$$

Wir nehmen vier Raumvektoren (x) , (p_λ) , (y) als die Grundvektoren und die symmetrischen Tensoren $G_{\lambda\mu}$ als die Grundtensoren der kovarianten Ableitungen an.

Wenn wir nun die Bezeichnungen:

$$(25) \quad \alpha_{\mu\nu} = (xp_{\mu\nu}), \quad \text{usw.,}$$

eingeführen, so erhalten wir die folgende Tabelle skalarer Produkte:

(26)

	x	p_μ	y	x_μ	$p_{\mu\nu}$	y_μ
x	1	0	0	n_μ	$\alpha_{\mu\nu}$	h_μ
p_λ	0	$G_{\lambda\mu}$	0	$G_{\lambda\mu}$	$\beta_{\lambda\mu\nu}$	$l_{\lambda\mu}$
y	0	0	1	0	$D_{\mu\nu}$	m_μ

Ohne weiteres können wir auch beweisen, dass

$$(27) \quad \begin{cases} \alpha_{\lambda\mu} = (xx_{\lambda\mu}) - n_{\lambda\mu} - n_\lambda n_\mu \\ \beta_{\lambda\mu\nu} = (x_\lambda x_{\mu\nu}) - n_\lambda (xx_{\mu\nu}) - n_\mu G_{\lambda\nu} \end{cases}$$

wird.

Aus (26) erhalten wir die folgenden Ableitungsgleichungen:

$$(28) \quad x_\lambda = p_\lambda + n_\lambda x,$$

$$(29) \quad p_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} x + G^{\rho\sigma} \beta_{\rho\mu\nu} p_\sigma + D_{\mu\nu} y,$$

$$(30) \quad y_\lambda = h_\lambda x + G^{\rho\sigma} l_{\rho\lambda} p_\sigma + m_\lambda y.$$

5. Dualität. Bezeichnen wir mit (X) , (P_λ) , (Y) bzw. die normierten Ebenenkoordinaten der Absolutpolare von den Punkten (x) , (p_λ) , (y) in Bezug auf (2), dann ist

$$(31) \quad X_i = \sum_j a_{ij} x^j : k^2, \quad P_{\lambda i} = \sum_j a_{ij} p_\lambda^j : k^2, \quad Y_i = \sum_j a_{ij} y^j : k^2.$$

Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$(32) \quad \begin{cases} Xx = (xx) = 1 \\ P_\lambda p_\mu = (p_\lambda p_\mu) = G_{\lambda\mu} \end{cases} \quad \text{usw.}$$

Durch kovariante Ableitung von (32) erhalten wir die folgende Tabelle skalarer Produkte:

(33)

	X	P_λ	Y	X_λ	$P_{\lambda\sigma}$	Y_λ
x	1	0	0	$-n_\lambda$	$-G_{\lambda\sigma}$	0
p_μ	0	$G_{\lambda\mu}$	0	$-\alpha_{\mu\lambda}$	$-\beta_{\lambda\mu\sigma}$	$-D_{\mu\lambda}$
y	0	0	1	$-h_\lambda$	$-l_{\lambda\sigma}$	$-m_\lambda$

Aus (33) erhalten wir die folgenden Ableitungsgleichungen:

$$(34) \quad X_\lambda = -n_\lambda X - G^{\rho\sigma} \alpha_{\rho\lambda} P_\sigma - h_\lambda Y,$$

$$(35) \quad P_{\lambda\mu} = -G_{\lambda\mu} X - G^{\rho\sigma} \beta_{\lambda\rho\mu} P_\sigma - l_{\lambda\mu} Y,$$

$$(36) \quad Y_\lambda = -G^{\rho\sigma} D_{\rho\lambda} P_\sigma - m_\lambda Y.$$

6. **Einige Anwendungen.** Aus der Tatsache, dass die Tangentenebenen (Y) und $(Y+dY)$ den Punkt $(x+\delta x)$ enthält, erhalten wir

$$(x+\delta x, Y+dY) = 0, \quad (x+\delta x, Y) = 0,$$

woraus $(\delta x dY) = 0$, d. h. $x_\lambda Y_\mu du^\lambda du^\mu = 0$ folgt: Dies wird nach (33):

$$(37) \quad D_{\lambda\mu} \delta u^\lambda du^\mu = 0.$$

Diese ist die Gleichung der *konjugierten Richtungen* und damit erhalten wir die Gleichung der *Asymptotenlinien*

$$(38) \quad D_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu = 0.$$

Um die Gleichung der *P-Krümmungslinien* zu erhalten, berechnen wir die Bedingungen dafür, dass die vier Punkte (x) , (y) , $(x+dx)$, $(y+dy)$ auf einer und derselben Ebene liegen:

$$|a_{ij}| \cdot |x \ y \ dx \ dy| = 0.$$

Nach (16) ist

$$\begin{vmatrix} (xx) & (xdx) & (xdy) \\ (x_u x) & (x_u dx) & (x_u dy) \\ (x_v x) & (x_v dx) & (x_v dy) \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & h_\mu \\ n_1 & G_{1\lambda} & l_{1\mu} + n_1 h_\mu \\ n_2 & G_{2\lambda} & l_{2\mu} + n_2 h_\mu \end{vmatrix} du^\lambda du^\mu = 0,$$

also erhalten wir als die gesuchte Gleichung

$$(39) \quad \begin{vmatrix} G_{1\lambda} & l_{1\mu} \\ G_{2\lambda} & l_{2\mu} \end{vmatrix} du^\lambda du^\mu = 0.$$

Wir können den *Winkel* θ zwischen den von dem Flächenpunkte (u, v) ausgehenden Richtungen $du:dv$ und $\delta u:\delta v$ wie folgt darstellen:

$$(40) \quad \cos^2 \theta = \frac{(G_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu)^2}{ds^2 \delta s^2}.$$

Dazu betrachten wir zunächst diejenige Ebene, die durch die Flächennormale im (x) sowie durch den Punkt $(x+dx)$ geht und bezeichnen ihre Ebenenkoordinaten mit U_i :

$$U\xi \equiv |a_{ij}| \cdot |\xi \ y \ x \ dx| = 0,$$

wobei ξ^i laufende Koordinaten sind. Dann folgt aus (16):

$$U\xi \equiv \begin{vmatrix} (\xi x) & 1 & 0 \\ (\xi x_u) & n_1 & G_{1\lambda} du_\lambda \\ (\xi x_v) & n_2 & G_{2\lambda} du_\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

so dass

$$(41) \quad U_i = \sum_j a_{ij} \begin{vmatrix} p_1^j & G_{1\lambda} \\ p_2^j & G_{2\lambda} \end{vmatrix} du^\lambda$$

wird. Ebenso erhalten wir die Koordinaten V_i der Ebene, welche durch die Flächennormale sowie durch den Punkt $(x + \delta x)$ geht:

$$(42) \quad V_i = \sum_j a_{ij} \begin{vmatrix} p_1^j & G_{1\lambda} \\ p_2^j & G_{2\lambda} \end{vmatrix} \delta u^\lambda.$$

Mit Benutzung von

$$\cos^2 \theta = \frac{(\sum_{ij} a^{ij} U_i V_j)^2}{(\sum_{ij} a^{ij} U_i U_j)(\sum_{ij} a^{ij} V_i V_j)}$$

erhalten wir (40), wobei a^{ij} die dem Elemente a_{ij} in der Determinante $|a_{ij}|$ entsprechende, durch $|a_{ij}|$ dividierte Unterdeterminante bezeichnet.

Das *P-Flächenelement* $d\Omega$ der Stelle (u, v) des infinitesimalen Parallelogramms lässt sich nach (40) berechnen; nämlich:

$$(43) \quad d\Omega = k^2 \sqrt{G} \, dudv.$$

Damit definieren wir die *P-Minimalfläche* als Extremale der Gleichung:

$$(44) \quad \delta \int k^2 \sqrt{G} \, dudv = 0.$$

7. Fundamentalsatz. Wir stellen für die Ableitungsgleichungen die Integrabilitätsbedingungen folgendermassen auf:

$$(45) \quad \frac{1}{2} (x_{\lambda\mu} - x_{\mu\lambda}) = x_{[\lambda\mu]} = 0, \quad p_{\lambda[\mu\nu]} = -\frac{1}{2} R^\tau_{\lambda\mu\nu} p_\tau, \quad y_{[\lambda\mu]} = 0$$

(Jeder neu angehängte Index bedeutet kovariante Ableitung).

$$R^\tau_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\nu}}{\partial u^\mu} + \Gamma^\tau_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\tau_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\nu}$$

ist der Riemannsche Krümmungstensor der Form $G_{\lambda\mu}$ wobei

$$\Gamma^\tau_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} G^{\sigma\tau} \left(\frac{\partial G_{\sigma\mu}}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial G_{\lambda\sigma}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial G_{\lambda\mu}}{\partial u^\sigma} \right).$$

Indem wir die in den Integrabilitätsbedingungen auftretenden Ableitungen der Grundvektoren mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (28), (29), (30) in Linearkombinationen der Grundvektoren selbst verwandeln und die einzelnen Koeffizienten jedesmal gleich Null setzen, werden wir auf folgende Tensorgleichungen geführt:

$$(46) \quad a_{[\lambda\mu]} + n_{[\lambda\mu]} = 0,$$

$$(47) \quad \beta_{\rho[\lambda\mu]} + n_{[\lambda} G_{|\rho|\mu]} = 0,$$

$$(48) \quad D_{[\lambda\mu]} = 0,$$

$$(49) \quad \alpha_{\lambda[\mu\nu]} + \alpha_{\lambda[\mu} n_{\nu]} + G^{\rho\sigma} \alpha_{\sigma[\nu} \beta_{|\rho\lambda|\mu]} + D_{\lambda[\mu} h_{\nu]} = 0,$$

$$(50) \quad D_{\lambda[\mu\nu]} + D_{\lambda[\mu} m_{\nu]} + G^{\rho\sigma} \beta_{\rho\lambda[\mu} D_{|\sigma|\nu]} = 0,$$

$$(51) \quad G^{\rho\sigma} (\beta_{\rho\lambda[\mu\nu]} + \alpha_{\lambda[\mu} G_{|\rho|\nu]} + G^{\sigma\epsilon} \beta_{\epsilon\lambda[\mu} \beta_{|\rho\sigma|\nu]} + D_{\lambda[\mu} l_{|\rho|\nu]}) = \frac{1}{2} R^{\tau}_{\lambda\mu\nu},$$

$$(52) \quad h_{[\lambda\mu]} + h_{[\lambda} n_{\mu]} + G^{\rho\sigma} l_{\rho[\lambda} \alpha_{|\sigma|\mu]} + m_{[\lambda} h_{\mu]} = 0,$$

$$(53) \quad l_{\rho[\lambda\mu]} + m_{[\lambda} l_{|\rho|\mu]} + G^{\sigma\lambda} l_{\lambda[\mu} \beta_{|\rho\sigma|\mu]} + G_{\rho[\mu} h_{\lambda]} = 0,$$

$$(54) \quad m_{[\lambda\mu]} + G^{\rho\sigma} l_{\rho[\lambda} D_{|\sigma|\mu]} = 0.$$

Nach unmittelbaren Berechnungen können wir beweisen, dass die Integrabilitätsbedingungen von (34), (35), (36) mit den Integrabilitätsbedingungen von (28), (29), (30) übereinstimmen.

Aus (47) folgt:

$$(55) \quad n_{\lambda} = \beta^{\sigma}_{\sigma\lambda} - \beta^{\sigma}_{\lambda\sigma}$$

und nach (48) erkennen wir, dass die Tensoren $D_{\lambda\mu}$ symmetrisch sind. Wenn $|D_{\lambda\mu}| \equiv D \neq 0$ ist, so lassen sich h_{λ} , $l_{\lambda\mu}$, m_{λ} nach (49), (50), (51) mittels der $\alpha_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu\nu}$, $G_{\lambda\mu}$, $D_{\lambda\mu}$ allein eindeutig darstellen.

Nach (46), (52), (53), (54) sind auch fünf Beziehungen zwischen $\alpha_{\lambda\mu}$, $\beta_{\lambda\mu\nu}$, $G_{\lambda\mu}$, $D_{\lambda\mu}$ gegeben. So haben wir jetzt den folgenden

Fundamentalsatz der Flächentheorie im projektiven Raum. Die zwei symmetrischen Tensoren $G_{\lambda\mu}$ und $D_{\lambda\mu}$ und zwei Tensoren $\alpha_{\lambda\mu}$ und $\beta_{\lambda\mu\nu}$ sind als stetige und hinreichend oft differenzierbare Funktionen von zwei Parametern u, v vorgegeben, zwischen denen die fünf Integrabilitätsbedingungen (46), (52), (53), (54) und $G > 0$, $D \neq 0$ bestehen. Dann wird eine Fläche im projektiven Raum, dem die oben angegebenen Tensoren angehören, bis auf projektiven Transformationen eindeutig bestimmt.

Durch geeignete Wahl der quadratischen Flächen⁽⁴⁾ und $k(u, v)$ sind zwölf Komponenten der Tensoren $\alpha_{\lambda\mu}$ und $\beta_{\lambda\mu\nu}$ mittels der $G_{\lambda\mu}$ und $D_{\lambda\mu}$ allein darstellbar.

8. Fubinisches fundamentale Differentialformen. Fubini⁽⁵⁾ hat die zwei Differentialformen:

$$(56) \quad F_2 = \alpha_{\lambda\mu} du^{\lambda} du^{\mu} = \xi d^2 x,$$

(4) Ein bereits entdeckter Muster solcher Fläche befindet sich bei: B. Su, On the surface whose asymptotic curves belong to linear complexes, I, II. Tôhoku Math. Journ., vol. 40 (1935), 408-420; 433-448. Besonders 442, Art. 5.

(5) Fubini-Cech, Geometria proiettiva differenziale tomo I, Capitolo II § 12 B.

$$(57) \quad F_3 = a_{\lambda\mu\nu} du^\lambda du^\mu du^\nu = \frac{1}{2} (dx d^2\xi - d\xi d^2x)$$

eingeführt, in denen ξ_i die Ebenenkoordinaten der Tangentenebene sind, und

$$(58) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \|x \ x_u \ x_v\|, \quad A = |a_{\lambda\mu}|$$

ist.

Aus (16), (21) und (31) erhalten wir:

$$(59) \quad \xi = \tau Y = \frac{\tau}{k^4 \sqrt{G}} \|x \ x_u \ x_v\|,$$

$$(60) \quad F_2 = \tau Y d^2x = \tau D_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu.$$

Also folgt:

$$(61) \quad a_{\lambda\mu} = \tau D_{\lambda\mu}, \quad A = \tau^2 D.$$

Aus (58), (59) und (61) ergibt sich:

$$(62) \quad \tau^2 = \frac{k^4 \sqrt{G}}{\sqrt{|D|}}.$$

Aus (57) erhalten wir

$$(63) \quad F_3 = -\frac{3}{2} d\tau Y d^2x - \frac{\tau}{2} d(Y d^2x) - \tau dY d^2x,$$

wobei

$$d(Y d^2x) = D_{\lambda\mu\nu} du^\lambda du^\mu du^\nu + 2D_{\lambda\mu} du^\lambda \delta^2 u^\mu$$

ist. Durch Benutzung der skalaren Produkte (33) ergibt sich

$$\begin{aligned} dY d^2x &= Y_\lambda du^\lambda (x_\mu \delta^2 u^\mu + x_{\mu\nu} du^\mu du^\nu) \\ &= -D_{\lambda\mu} du^\lambda \delta^2 u^\mu - (D_{\sigma\lambda} \beta_{\mu\nu}^\sigma + m_\lambda D_{\mu\nu} + D_{\lambda\nu} n_\mu) du^\lambda du^\mu du^\nu. \end{aligned}$$

Setzt man diese Formeln in (63) ein, so folgt

$$(64) \quad F_3 = -\frac{\tau}{2} b_{\lambda\mu\nu} du^\lambda du^\mu du^\nu,$$

$$(64)' \quad b_{\lambda\mu\nu} = 3(\log \tau) D_{\lambda\mu} + (D_{\lambda\mu\nu} - 2D_{\sigma\lambda} \beta_{\mu\nu}^\sigma - 2m_\lambda D_{\mu\nu} - D_{\lambda\nu} n_\mu).$$

Da $a_{\lambda\mu\nu}$ symmetrisch ist, muss man setzen

$$(65) \quad a_{\lambda\mu\nu} = -\frac{\tau}{2} b_{(\lambda\mu\nu)} = -\frac{\tau}{2} \bar{a}_{\lambda\mu\nu}.$$

Durch kovariante Ableitung von (24) folgt

$$\begin{aligned} \delta |x \ p_1 \ p_2 \ y| &= |x \ p_1 \ p_2 \ y| (\beta_{\sigma\nu}^\sigma + n_\nu + m_\nu) du^\nu \\ &= -\sqrt{G} k^4 (2\beta_{\sigma\nu}^\sigma - \beta_{\nu\sigma}^\sigma + m_\nu) du^\nu \\ &= \delta(-\sqrt{G} k^4). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$(66) \quad \delta \log(k^4 \sqrt{G}) = (2\beta_{\sigma\nu}^\sigma - \beta_{\nu\sigma}^\sigma + m_\nu) du^\nu,$$

und aus (62)

$$(67) \quad 2(\log \tau)_\nu du^\nu = (2\beta_{\sigma\nu}^\sigma - \beta_{\nu\sigma}^\sigma + m_\nu) du^\nu - \frac{\delta D}{2D}.$$

Aus (61), (65) berechnen wir weiter die folgende Formel:

$$(68) \quad \phi = A^{-\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Damit haben wir

$$(69) \quad \phi = \frac{1}{4} D^{-\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} \bar{a}_{111} & \bar{a}_{121} & \bar{a}_{221} \\ \bar{a}_{112} & \bar{a}_{122} & \bar{a}_{222} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \end{vmatrix}.$$

Definieren wir die Funktion $k(u, v)$ durch die Forderung:

$$(70) \quad \phi = k^2 \sqrt{G}$$

so ist nach (4) die *P-Minimalfläche* gleichzeitig *Thomsensche projektive Minimalfläche*⁽⁶⁾.

Führen wir nun die Asymptotenlinien als Parameterkurven $u, v = \text{konst.}$ ein, so muss

$$(71) \quad F_2 = 2\tau D_{12} du dv$$

sein. Durch Benutzung von (67) (50), und wenn

$$(72) \quad \beta = \Gamma_{11}^2 + \beta_{11}^2, \quad \gamma = \Gamma_{22}^1 + \beta_{22}^1$$

gesetzt wird, erhalten wir

$$(73) \quad F_3 = \tau D_{12} (\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

Ferner folgt aus (69), (70) und (73)

$$(74) \quad k^2 \sqrt{G} = \epsilon \beta \gamma, \quad \epsilon = -\operatorname{sgn} \tau D_{12}.$$

Aus (72) und (73) erkennen wir die *Apolaritätsbeziehungen* zwischen F_2 und F_3 .

⁽⁶⁾ G. Thomsen, Über eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung, *Hamburger Abhandlungen*, 4 (1926), 232-266.

G. Thomsen, Sulle superficie minime proiettive, *Annali di Matematica*, (4) 5 (1928), 169-184.