10. Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum.

Von Yukio MIMURA

(Eingegangen am 13. April, 1936.)

Es handelt sich im Folgenden um eine Kennzeichnung der „Funktionen“ der Hermiteschen hypermaximalen Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$.⁽¹⁾ Der Kürze halber benutzen wir in dieser Arbeit durchgehend folgende Bezeichnungen:

- $\mathfrak{D}(A)$der Definitionsbereich eines linearen Operators A ;
- $\mathbf{O}$ die Menge aller linearen Operatoren A . (Wir setzen nicht einmal voraus, daß $\mathfrak{D}(A)$ in $\mathfrak{H}$ überall dicht liegt!);
- $\mathbf{H}$ die Menge aller Hermiteschen hypermaximalen Operatoren;
- $\mathbf{B}$ die Menge aller beschränkten (in $\mathfrak{H}$ überall definierten) linearen Operatoren⁽²⁾.

I. Im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ sei ein Hermitescher hypermaximaler Operator H gegeben, dessen Zerlegung der Einheit wir mit E_λ bezeichnen wollen. Es ist also $H \in \mathbf{H}$ und

$$(Hf, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E_\lambda f, g) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{D}(H), \quad g \in \mathfrak{H}.$$

Daß der Definitionsbereich $\mathfrak{D}(H)$ aus allen f mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d \|E_\lambda f\|^2 < +\infty$$

besteht, ist bekannt.

Sei ferner $F(\lambda)$ eine beliebige im Borelschen Sinne meßbare, komplexwertige Funktion der reellen Variablen λ . Die Menge derjenigen f , für die dieses $F(\lambda)$ in Bezug auf $\|E_\lambda f\|^2$ quadratisch integrierbar ist, für die also das sogenannte Radon-Stieltjesche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d \|E_\lambda f\|^2$$

existiert, heiße $\mathfrak{D}(F)$. Dann nennen wir den Operator $F(H)$, der von der Relation

⁽¹⁾ Die vorläufige Mitteilung meines in dieser Arbeit ausgeführten Resultates befindet sich in der Zeitschrift „Sizyōdanwakai“ (Japanisch) **78** (Feb., 1936).

⁽²⁾ Viele sonstigen Begriffsbildungen und Bezeichnungen sind den Arbeiten von J. v. Neumann in Math. Ann. **102** sowie dem Buch von M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space (New York, 1932), insbesondere Chapter VI, The Operational Calculus entliehen.

$$(F(H)f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) d(E_\lambda f, g) \quad \text{für alle} \quad f \in D(F), \quad g \in \mathfrak{S}$$

eindeutig bestimmt wird, die $F(\lambda)$ zugehörige Funktion von H .

Nun fragen wir danach, unter welcher Bedingung ein $A \in \mathbf{O}$ im obigen Sinne eine Funktion von H sein kann, oder genauer, eine solche als dessen Fortsetzung besitzen kann. Eine notwendige Bedingung, deren Erfülltsein man leicht verifizieren kann, ist diese:

i) A ist vertauschbar mit allen $B \in \mathbf{B}$, die ihrerseits mit H vertauschbar sind.—

Natürlich muß dabei die Vertauschbarkeit eines nicht notwendig beschränkten Operators mit einem beschränkten vernünftig definiert sein, und dies ist von J. v. Neumann wie folgt gemacht worden⁽³⁾.

Definition. Es sei $A \in \mathbf{O}$ und $B \in \mathbf{B}$. A heißt vertauschbar mit B , wenn AB eine Fortsetzung von BA ist, oder genauer, wenn aus $f \in \mathfrak{D}(A)$ $Bf \in \mathfrak{D}(A)$ folgt und dann $ABf = BAf$ ist.—

Demselben Autor verdanken wir ferner den folgenden

Satz 1. Es sei $A \in \mathbf{B}$ und $H \in \mathbf{BH}$. So ist die obige Bedingung i) auch hinreichend⁽⁴⁾.—

Hierfür hat kürzlich F. Rieß einen zweiten Beweis gegeben⁽⁵⁾. Er bemerkt dabei, daß der Satz noch besteht, wenn man von A oder von B oder von diesen beiden statt der Beschränktheit die Hermitesche Hypermaximalität voraussetzt. Für den allgemeinen Fall von einem $A \in \mathbf{O}$ liegt aber bis jetzt noch kein Beweis in der Literatur vor, soweit es mir bekannt ist. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es nun den folgenden ganz allgemeinen Satz zu beweisen.

Satz 2. Ein $A \in \mathbf{O}$ ist eine Funktion von einem $H \in \mathbf{H}$, wenn die Bedingung i) erfüllt ist.—

Unsere Methode ist in großen Zügen die von F. Rieß. Von dem sogenannten Operatorenkalkül machen wir aber in mehr systematischer Weise Gebrauch. Man beachte, daß wir von A weder die Abgeschlossenheit noch die Fortsetzbarkeit in einen abgeschlossenen Operator verlangen. Wenn man es einmal tut, so läßt sich das Problem leicht auf Bekanntes zurückführen. Denn ein solcher Operator ist nach einem Satz von J. v. Neumann⁽⁶⁾ Produkt zweier Operatoren, von denen einer $\in \mathbf{B}$ und der andere $\in \mathbf{H}$ ist. Wir hätten alsdann nur zu zeigen, daß jeder einzelne von diesen Operatoren die Bedingung i) erfüllt, was keine erhebliche Schwierigkeit bietet.

⁽³⁾ J. v. Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperatoren, Math. Annalen **102** (1929), 404.

⁽⁴⁾ J. v. Neumann, a. a. O. 404.

⁽⁵⁾ F. Rieß, Acta Szeged **7** (1935), 147–159.

⁽⁶⁾ J. v. Neumann, Über adjungierte Funktionaloperatoren, Annals of Math. **33** (1932).

II. Zuerst führen wir zwei Hilfssätze an, die wir später in wesentlichen Stellen brauchen.

Hilfssatz 1. Es sei $A \in \mathbf{O}$. Es existiere ferner eine Folge von paarweise orthogonalen abgeschlossenen linearen Mannigfaltigkeiten

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots,$$

die zusammen den Raum $\mathfrak{H}$ aufspannen, und von denen jede A reduziert. Die entsprechenden Projektionsoperatoren seien

$$P_1, P_2, \dots \quad (7).$$

Dann haben wir

$$a) \quad Af = AP_1f + AP_2f + \dots \quad \text{für jedes} \quad f \in \mathfrak{D}(A).$$

Wenn A noch abgeschlossen ist, so folgt aus $P_i f \in \mathfrak{D}(A)$ und aus der Konvergenz der rechten Seite in a) umgekehrt, daß erstens $f \in \mathfrak{D}(A)$ ist, und daß dann die Gleichung a) besteht⁽⁸⁾.—

Hilfssatz 2. Es sei $H \in \mathbf{H}$. Eine Funktion $G(H)$ ist dann und nur dann $\in \mathbf{B}$, wenn die Funktion $G(\lambda)$ bis auf eine Menge von λ , die in Bezug auf jedem $\|E_\lambda f\|^2$ vom Maße Null ist, beschränkt ist. In diesem Falle ist $G(H)$ sowohl mit H als auch mit jeder Funktion von H vertauschbar⁽⁹⁾.—

Hierauf wollen wir gleich den eigentlichen Beweis von Satz 2 in Angriff nehmen. Wir beginnen mit dem folgenden Spezialfall.

Satz 2'. Es sei $A \in \mathbf{O}$ und $H \in \mathbf{H}$ mit der Zerlegung der Einheit E_λ . Es existiere ferner ein $f_0 \in \mathfrak{D}(A)$ mit der Eigenschaft, daß die von allen $E_\lambda f_0$ ($-\infty < \lambda < +\infty$) aufgespannte abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit, welche wir fortan mit $\mathfrak{M}(f_0)$ bezeichnen wollen, mit dem Raum $\mathfrak{H}$ übereinstimmt.

Unter diesen Voraussetzungen ist A eine Funktion von H , wenn die Bedingung i) erfüllt ist.—

Beweis. Wir bemerken zuerst⁽¹⁰⁾, daß für beliebiges $f \in \mathfrak{H}$ das oben definierte $\mathfrak{M}(f)$ mit der Menge aller $F(H)f$ übereinstimmt. In unserem Fall ist nun $\mathfrak{M}(f_0) = \mathfrak{H}$. Es existiert also für jedes $f \in \mathfrak{H}$ ein $F(H)$ mit $f = F(H)f_0$. Sei insbesondere

$$Af_0 = \phi(H)f_0.$$

Von diesem $\phi(H)$ werden wir zeigen, daß es eine (abgeschlossene) Fortsetzung von A ist, d. h., daß aus $f \in \mathfrak{D}(A)$ $f \in \mathfrak{D}(\phi)$ folgt, und daß dann

(7) Daß $\mathfrak{M}_i$ A reduzieren, besagt, nicht anders als daß die entsprechenden P_i mit A vertauschbar sind.

(8) J. v. Neumann, Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Annalen **102** (1929), 79, Satz 21.

(9) M. H. Stone, Satz 6.1. Satz 6.5.

(10) M. H. Stone, Satz 6.2. Satz 7.2.

$Af = \phi(H)f$ ist.⁽¹¹⁾

Sei also

$$f = F(H)f_0 \in \mathfrak{D}(A).$$

Wir setzen zuerst voraus, daß $F(H) \in \mathbf{B}$ ist. Nach dem Hilfssatz 2 ist dann $F(H)$ vertauschbar mit H . Folglich ist es auch mit A vertauschbar und wir sehen erstens, daß mit f_0 auch

$$f = F(H)f_0 \in \mathfrak{D}(\phi)$$

ist, und zweitens, daß dann

$$Af = AF(H)f_0 = F(H)Af_0 = F(H)\phi(H)f_0 = \phi(H)F(H)f_0 = \phi(H)f$$

ist, womit der Fall von einem $F(H) \in \mathbf{B}$ erledigt ist.

Sei jetzt $F(\lambda)$ beliebig (nur ist es in Bezug auf $\|E_\lambda f_0\|^2$ quadratisch integrierbar) und $f = F(H)f_0 \in \mathfrak{D}(A)$ wie vorhin. Sei ferner

M_n die Menge von λ mit $n-1 \leq F(\lambda) < n$,

$X_n(\lambda)$ die sogenannte charakteristische Funktion der Menge M_n ,

$$F_n(\lambda) = F(\lambda)X_n(\lambda)$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$

gesetzt. Es ist dann fast überall in Bezug auf $\|E_\lambda f_0\|^2$

$$X_i(\lambda)X_j(\lambda) = X_i(\lambda),$$

$$X_i(\lambda)X_j(\lambda) = 0, \quad \text{für } i \neq j$$

$$X_1(\lambda) + X_2(\lambda) + \dots = 1.$$

Die $X_n(\lambda)$ zugehörigen Operatoren $X_n(H)$ sind also Projektionsoperatoren und paarweise orthogonal. Wenn wir also die entsprechenden abgeschlossenen Mannigfaltigkeiten mit $\mathfrak{M}_n$ bezeichnen, so sehen wir, daß sie ebenfalls paarweise orthogonal sind und den Raum $\mathfrak{H}$ aufspannen. Als Projektionsoperatoren sind ferner $X_n(H)$ beschränkt. Nach dem Hilfssatz 2 sind also $X_n(H)$ mit allen Funktionen von H vertauschbar, also insbesondere mit $\phi(H)$ und mit H selbst und folglich auch mit A . Daraus folgt, daß jedes $\mathfrak{M}_n$ sowohl A als auch $\phi(H)$ reduziert.

Nun folgt aus $f = F(H)f_0 \in \mathfrak{D}(A)$ und $X_n(H) \in \mathbf{B}$

$$f_n = F_n(H)f_0 = X_n(H)F(H)f_0 = X_n(H)f \in \mathfrak{D}(A).$$

Es ist aber $F_n(H) \in \mathbf{B}$, folglich gilt nach dem oben Bewiesenen

$$f_n = F_n(H)f_0 \in \mathfrak{D}(\phi),$$

und zwar

⁽¹¹⁾ Wenn $\mathfrak{D}(A)$ in $\mathfrak{H}$ überall dicht liegt, so läßt sich leicht einsehen, daß $\phi(H)$ die kleinste abgeschlossene Fortsetzung ist.

$$b) \quad Af_n = \phi(H)f_n.$$

Ferner ist nach dem Hilfssatz 1

$$Af = Af_1 + Af_2 + \dots$$

nach b) ist dies aber

$$= \phi(H)f_1 + \phi(H)f_2 + \dots$$

und, da $\phi(H)$ abgeschlossen ist, so sehen wir wiederum nach dem Hilfssatz 1, daß $f \in \mathfrak{D}(\phi)$ und zwar $\phi(H)f = Af$ ist.

Der Beweis von Satz 2' ist damit beendet.

III. Um jetzt den Satz 2 in aller Allgemeinheit zu beweisen, wählen wir aus $\mathfrak{D}(A)$ eine Folge

$$f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathfrak{D}(A),$$

die zusammen dieselbe abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit — es sei mit $\mathfrak{S}_1$ bezeichnet — wie $\mathfrak{D}(A)$ aufspannen, und machen die folgende Konstruktion. Wir setzen nämlich

$$f'_1 = f_1,$$

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(f'_1), \quad P_1 = \text{der } \mathfrak{M}_1 \text{ entsprechende Projektionsoperator,}$$

$$f'_2 = f_2 - P_1 f_2,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}(f'_2), \quad P_2 = \text{der } \mathfrak{M}_2 \text{ entsprechende Projektionsoperator,}$$

....

und allgemein

$$f'_n = f_n - P_1 f_n - \dots - P_{n-1} f_n,$$

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}(f'_n), \quad P_n = \text{der } \mathfrak{M}_n \text{ entsprechende Projektionsoperator.}$$

Daß die so konstruierten $\mathfrak{M}_n$ sowohl H als auch alle Funktionen von H reduzieren, ist bekannt⁽¹²⁾. Folglich reduzieren sie auch A . In unserem Fall sind sie ferner paarweise orthogonal und spannen den Raum $\mathfrak{S}_1$ auf. Betrachten wir jetzt die in $\mathfrak{M}_n$ liegenden Teile von A bzw. H , so sehen wir, daß alle Voraussetzungen von Satz 2' im Raum $\mathfrak{M}_n$ erfüllt sind. (Es kann sein, daß $\mathfrak{M}_n$ von einer endlichen Dimension ist. Daß aber der Satz 2' auch in diesem Falle gilt, ist klar.)

Es existiert also für jedes n eine Funktion $\phi_n(\lambda)$ mit

$$Af = \phi_n(H)f \quad \text{für} \quad f \in P_n \mathfrak{D}(A).$$

Von diesen $\phi_n(\lambda)$ werden wir jetzt zeigen, daß sie alle gleich gewählt werden

(12) M. H. Stone, Satz 7.2.

können. Dazu benutzen wir denselben Kunstgriff wie F. Rieß⁽¹³⁾. Wir betrachten nämlich den Produktraum $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ als einen neuen Hilbertschen Raum. Seine Elemente seien mit $\{f, g\}$ bezeichnet. Ein linearer Operator in einem solchen Raum ist als eine Matrix darstellbar, deren Elemente Operatoren in dem ursprünglichen Raum $\mathfrak{H}$ sind. Sei insbesondere

$$\bar{A}\{f, g\} = \{Af, Ag\}, \quad \bar{H}\{f, g\} = \{Hf, Hg\}$$

gesetzt.

Es läßt sich dann leicht nachweisen, daß die Bedingung i) für diese beiden Operatoren erfüllt ist. Folglich sind alle unsere bisherigen Überlegungen hierauf anwendbar. Indem wir also die abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}(\{f'_1, f'_2\})$ sowie die in ihr liegenden Teile von $\bar{A}$ bzw. $\bar{H}$ betrachten, sehen wir, daß es eine solche Funktion $\bar{\varphi}_2(\lambda)$ gibt, daß die Gleichung

$$Af = \bar{\varphi}_2(H)f \quad \text{sowohl für } f \in P_1\mathfrak{D}(A) \\ \text{als auch für } f \in P_2\mathfrak{D}(A)$$

gilt. Dieses $\bar{\varphi}_2(\lambda)$ schreiben wir jetzt einfach $\varphi_2(\lambda)$. Es ist

$$\varphi_2(H)f = \varphi_1(H)f \quad \text{für } f \in P_1\mathfrak{D}(A),$$

also insbesondere

$$\varphi_2(H)E_\lambda f'_1 = \varphi_1(H)E_\lambda f'_1 \quad \text{für jedes } \lambda$$

und aus diesem folgt weiter

$$(\varphi_2(H)E_\lambda f'_1, f'_1) = (\varphi_1(H)E_\lambda f'_1, f'_1)$$

oder, was dasselbe besagt,

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_2(\lambda) d\|E_\lambda f'_1\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_1(\lambda) d\|E_\lambda f'_1\|^2 \quad \text{für jedes } \lambda.$$

Dies bedeutet aber, daß

$$\varphi_2(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$$

bis auf eine Menge von λ , die in Bezug auf $\|E_\lambda f'_1\|^2$ von Maße Null ist.

Es ist nun klar, daß wir dieselbe Überlegung statt für zwei $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ auch für eine beliebige Anzahl von $\mathfrak{M}_n$ — es seien $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ — durchführen können. Zusammenfassend haben wir also u. a. folgendes gezeigt: wir können die $\varphi_n(\lambda)$ so wählen, daß erstens

$$Af = \varphi_n(H)f \quad \text{für } f \in P_n\mathfrak{D}(A),$$

und zweitens

(13) F. Rieß, a. a. O. 152.

$$\phi_n(\lambda) = \phi_m(\lambda) \quad \text{für} \quad n > m$$

bis auf eine Menge $M_{n,m}$, die in Bezug auf $\|E_\lambda f'_m\|^2$ vom Maße Null ist.

Alle diese $\phi_n(\lambda)$ werden wir jetzt durch ein und dasselbe $\phi(\lambda)$ ersetzen. Sei nämlich

$$M_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} M_{n,m}$$

gesetzt. Es ist eine Nullmenge in Bezug auf $\|E_\lambda f'_m\|^2$, und wir haben

$$\phi_m(\lambda) = \phi_n(\lambda) \quad \text{für jedes} \quad n > m$$

und für jedes λ außerhalb M_m .

Das gewünschte $\phi(\lambda)$ definieren wir dann

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \phi_m(\lambda) && \text{für } \lambda \text{ außerhalb } M_m \\ &= 0 && \text{z.B. für } \lambda \in \bigcap_{m=1}^{\infty} M_m. \end{aligned}$$

Für dieses $\phi(\lambda)$ haben wir zuerst

$$A f'_m = \phi(H) f'_m \quad \text{für jedes } m.$$

Aus diesem können wir aber genau so wie beim Beweis von Satz 2' zeigen, daß

$$A f = \phi(H) f \quad \text{für} \quad f \in P_m \mathfrak{D}(A)$$

ist. Nun ist es ein Leichtes weiter zu zeigen, daß dies auch für ein beliebiges $f \in \mathfrak{D}(A)$ gilt. Es gilt hier nämlich wieder derselbe Schluß, den wir am Ende des Beweises von Satz 2' unter Berufung auf den Hilfssatz 1 gezogen haben. Der Satz 2 wird damit vollständig bewiesen.

IV. Zum Schluß wollen wir noch einen Spezialfall betrachten, wo H von einem einfachen Spektrum ist. Bekanntlich ist ein $H \in \mathbf{H}$ dann und nur dann von einem einfachen Spektrum, wenn in Raum $\mathfrak{H}$ ein f mit $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{S}$ existiert⁽¹⁴⁾. Für diesen Fall hat M.H. Stone den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3. Ein $A \in \mathbf{B}$ ist eine Funktion von einem H mit einem einfachen Spektrum, wenn ii) A mit E_λ vertauschbar ist⁽¹⁵⁾.—

Dieser Satz besteht im Allgemeinen nicht mehr, wenn man nur $A \in \mathbf{O}$ voraussetzt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Der Einfachheit halber realisieren wir den Raum $\mathfrak{H}$ als den Raum $\mathfrak{L}_2$ der im Intervall $-\infty < x < +\infty$ (im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne)

⁽¹⁴⁾ M. H. Stone, Satz 7.9.

⁽¹⁵⁾ M. H. Stone, Satz 8.1. Es sei hier darauf aufmerksam gemacht, daß ein $A \in \mathbf{B}$ dann und nur dann die Bedingung ii) erfüllt, wenn A mit H vertauschbar ist.

quadratisch integrierbaren Funktionen. H sei der Operator, der folgendermaßen definiert ist:

$$Hf(x) = xf(x).$$

Wie man sofort erkennt, ist dann $H \in \mathbf{H}$ und seine Zerlegung der Einheit E_λ ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} E_\lambda f(x) &= f(x) & \text{für} & \quad x \leq \lambda \\ &= 0 & \text{für} & \quad x > \lambda \end{aligned}$$

definiert. Um weiter zu zeigen, daß H von einem einfachen Spektrum ist, wählen wir aus $\mathfrak{L}_2$ irgend eine Funktion $f_0(x)$, welche höchstens in einer Menge vom Maße Null verschwinden kann. Wir zeigen, daß für dieses $f_0(x)$ $\mathfrak{M}(f_0) = \mathfrak{S}$ ist, oder, was dasselbe besagt, daß aus $(E_\lambda f_0, f) = 0$ $f = 0$ folgt. Es sei also

$$(E_\lambda f_0, f) = \int_{-\infty}^{\lambda} f_0(x) \overline{f(x)} dx = 0 \quad \text{für jedes } \lambda.$$

Hieraus folgt aber

$$f_0(x) \overline{f(x)} = 0 \quad \text{fast überall}$$

und wegen der über $f_0(x)$ gemachten Voraussetzung haben wir endlich

$$f(x) = 0 \quad \text{fast überall} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nun bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(f_0)$ die kleinste (nicht abgeschlossene!) lineare Mannigfaltigkeit, welche alle $E_\lambda f_0$ sowie f_0 enthält. Sie besteht aus allen f von der Form

$$f = a_0 f_0 + \sum_{i=1}^n a_i E_{\lambda_i} f_0.$$

Es ist klar, daß dieses $\mathfrak{B}(f_0)$ im Raum $\mathfrak{S}$ überall dicht, aber nicht $= \mathfrak{S}$ ist. Es existiert also ein $g_0 \in \mathfrak{S}$, das nicht zu $\mathfrak{B}(f_0)$ gehört. Sei insbesondere dieses g_0 so gewählt, daß in keinem Intervall der x -Gerade die Gleichung von der Form $af_0(x) = bg_0(x)$ besteht, oder was auf dasselbe hinausläuft, daß die zwei linearen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{B}(f_0)$ und $\mathfrak{B}(g_0)$ außer 0 kein Element gemeinsam haben. Sei ferner $g' \in \mathfrak{S}$ irgend ein Element, das nur nicht $= g_0$ ist.

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir einen Operator C wie folgt:

$$Cf = f, \quad \text{für } f \in \mathfrak{B}(f_0)$$

$$Cg = a_0 g' + \sum_{i=1}^n a_i E_{\lambda_i} g' \quad \text{für } g \in \mathfrak{B}(g_0) \quad \text{mit} \quad g = a_0 g_0 + \sum_{i=1}^n a_i E_{\lambda_i} g_0$$

und schließlich

$$C(af + bg) = af + bCg \quad \text{für } f \in \mathfrak{B}(f_0) \quad \text{und} \quad g \in \mathfrak{B}(g_0).$$

Für den so definierten Operator C , der ja $\in \mathbf{O}$ ist, ist klar, daß es die Bedingung ii) erfüllt. Dieses C ist aber keine Funktion von H . Zum Beweis haben wir nur zu zeigen, daß C in keinen abgeschlossenen Operator fortgesetzt werden kann. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Folge

$$f_1, f_2, \dots \quad \text{mit} \quad f_i \in \mathfrak{B}(f_0),$$

die zu g_0 konvergiert. (Eine solche Folge existiert stets, da $\mathfrak{B}(f_0)$ überall dicht in $\mathfrak{H}$ liegt.) Da $Cf_i = f_i$ ist, so haben wir einerseits $f_i \rightarrow g_0$ und andererseits $Cf_i \rightarrow g_0 \neq Cg_0$, was offenbar der Bedingung der Abgeschlossenheit widerspricht.

Wir können aber den folgenden Satz beweisen.

Satz 4. Ein $A \in \mathbf{O}$ mit einer abgeschlossenen Fortsetzung ist eine Funktion von einem $H \in \mathbf{H}$ mit einem einfachen Spektrum, wenn die Bedingung ii) erfüllt ist.—

Da es sich leicht nachweisen läßt, daß ein solches A nur dann die Bedingung ii) erfüllt, wenn seine kleinste abgeschlossene Fortsetzung dieselbe Bedingung erfüllt, so genügt es den Satz nur für den Fall zu beweisen, wo A ein abgeschlossener linearer Operator ist.

Zuerst beweisen wir den folgenden

Hilfssatz 3. Es sei $A \in \mathbf{O}$ abgeschlossen und $H \in \mathbf{H}$. Sei ferner die Bedingung ii) erfüllt. A ist dann mit jeder beschränkten Funktion von H vertauschbar.—

Beweis. Sei $f \in \mathfrak{D}(A)$ $B(H) \in \mathbf{B}$, sonst beliebig. Da es $B(H)f \in \mathfrak{M}(f)$ ist und $\mathfrak{M}(f)$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{B}(f)$ ist, so existiert eine Folge

$$f_i = B_i(H)f \in \mathfrak{B}(f), \quad i = 1, 2, \dots$$

derart daß

$$B_i(H)f \rightarrow B(H)f$$

ist. Indem wir jetzt wieder den Produktraum $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ betrachten, können wir mit demselben Kunstgriff wie beim Beweis von Satz 2 zeigen, daß es eine Folge $B_i(H)$ gibt, derart daß zugleich

$$B_i(H)f \rightarrow B(H)f \quad \text{und} \quad B_i(H)Af \rightarrow B(H)Af$$

gilt. $B_i(H)$ ist aber der Operator von der Form $a_0E + \sum_{i=1}^n a_i E_{\lambda_i}$. Wegen ii) ist also

$$B_i(H)Af = AB_i(H)f.$$

Folglich haben wir

$$B_i(H)f \rightarrow B(H)f \quad \text{und} \quad AB_i(H)f \rightarrow B(H)Af,$$

woraus wegen der Abgeschlossenheit von A folgt, daß erstens $B(H)f \in \mathfrak{D}(A)$

ist und zweitens $AB(H)f = B(H)Af$ ist. Der Beweis des Hilfssatzes ist damit erbracht.

Jetzt können wir den Beweis von Satz 3 sowie von Satz 4 in wenigen Zeilen erbringen.

Beweis von Satz 3. Man beachte, daß es zum Beweis von Satz 2' genügt, statt der Bedingung i) nur die Vertauschbarkeit von A mit jedem $B(H) \in \mathbf{B}$ vorauszusetzen. Nach dem eben Bewiesenen ist dies aber in unserem Fall erfüllt.

Beweis von Satz 4. Sei $B \in \mathbf{B}$ mit H vertauschbar. Dann ist B auch mit jedem E_λ vertauschbar⁽¹⁶⁾. Nach dem Satz 3 ist also jedes $B \in \mathbf{B}$, das mit H vertauschbar ist, eine Funktion von H , nach dem Hilfssatz 3 ist es also mit A vertauschbar. D.h. in unserem Fall folgt aus dem Erfülltsein der Bedingung ii) das der Bedingung i), w. z. b. w.

Mathematisches Institut,
Kaiserliche Universität zu Osaka.

⁽¹⁶⁾ Siehe Anmerkung⁽¹⁵⁾