11. Über die Struktur der metabelschen Gruppen I.

Von Kiyosi TAKETA.

(Eingegangen am 13. April, 1936.)

Einleitung:

$\mathfrak{G}$ sei eine zweistufige metabelsche Gruppe, die die gegebene Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthält, so daß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ Abelsch ist.

Transformiert man $\mathfrak{A}$ mit beliebigem Element von $\mathfrak{G}$, so erhält man einen Automorphismus von $\mathfrak{A}$, und alle diese Automorphismen bilden eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, da $\mathfrak{A}$ maximaler Abelscher Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Hier möchten wir mit Hilfe dieser Eigenschaft alle möglichen, zweistufigen metabelschen Gruppen $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthalten, konstruieren, insbesondere die Invariante der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ bestimmen⁽¹⁾.

Da die Abelsche Gruppe $\mathfrak{A}$ als direktes Produkt der Untergruppen, deren Ordnungen voneinander verschiedenen Primzahlpotenzen sind, darstellbar ist, und solche Untergruppen bei unseren Automorphismen von $\mathfrak{A}$ invariant sind, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit so voraussetzen, daß $\mathfrak{A}$ von der Primzahlpotenzordnung und zwar vom Typus

$$(p^{a_1}, \dots, n_1\text{-mal}; p^{a_2}, \dots, n_2\text{-mal}; \dots; p^{a_m}, \dots, n_m\text{-mal}), a_1 > \dots > a_m,$$

ist. Dann läßt sich die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ als Abelsche Kongruenzgruppe mit den Elementen von der Gestalt

$$(6) \quad \begin{pmatrix} A_{11} & p^{a_1-a_2}A_{12} & \dots & p^{a_1-a_m}A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & p^{a_2-a_m}A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} \dots & p^{a_{m-1}-a_m}A_{m-1,m} \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

nach dem Modul

⁽¹⁾ Vgl. K. Taketa: Über die Struktur der metabelschen p -Gruppen; Proc. Imp. Acad., 9 (1933), 480.

$$(7) \quad \left(\begin{array}{cccc} p^{a_1} & \dots & p^{a_1} & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ p^{a_2} & \dots & p^{a_2} & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ p^{a_m} & \dots & p^{a_m} & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_1 \text{ Zeilen} \\ \\ \\ n_2 \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ n_m \text{ Zeilen} \end{array}$$

darstellen, wo das Kästchen $A_{\lambda\mu}$ von (6) eine n_λ -zeilige und n_μ -spaltige Matrix mit den Koeffizienten der nicht negativen ganzen rationalen Zahlen ist. Ist umgekehrt eine solche Abelsche Kongruenzgruppe gegeben, so gibt es mindestens eine Erweiterung $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{A}$ der Art, so daß $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ 1-isomorph dieser Kongruenzgruppe wird (§ 1).

Um die Struktur der Abelschen Kongruenzgruppe aus den Matrizen (6) nach dem Modul (7) zu studieren, beschäftigen wir uns zuerst mit den Abelschen Substitutionsgruppen im Galois-Feld $GF(p^s)$, und bestimmen die Invarianten der allen möglichen solchen Abelschen Gruppen vom gegebenen Grade (§ 3).

Dann betrachten wir eine Abelsche Substitutionsgruppe $\mathfrak{A}$ gegebenen Grades n , deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen nach dem Modul von einer Potenz von p , etwa p^a , sind, und wir nennen solche Gruppen eine Kongruenzgruppe mod. p^a vom Grade n .

Dann lassen sich die Invarianten der Abelschen Kongruenzgruppen mod. p^a des Grades n mit Hilfe der Ergebnissen des vorigen Paragraphes 3 bestimmen (§ 4).

Endlich führen wir die Kongruenzgruppe von den Matrizen der Gestalt (6) nach dem Modul (7) auf die Kongruenzgruppe bloß nach dem Modul von einer Potenz von p zurück, und die zuerst gewünschten Invarianten von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ werden somit bestimmt (§ 5).

§ 1. Die homomorphe Darstellung der Faktorgruppe der metabelschen Gruppe und ihres maximalen Abelschen Normalteilers durch den Automorphismen dieses Normalteilers.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine Abelsche Gruppe mit den Basiselementen

$$(1) \quad e_1, e_2, \dots, e_n,$$

und $\mathfrak{G}$ eine zweistufige metabelsche Gruppe, die $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthält.

Transformiert man e_i , $i = 1, 2, \dots, n$; mit einem beliebigen Elemente g von $\mathfrak{G}$, so erhält man ein Element von $\mathfrak{A}$, das sich durch die Basiselemente so

$$(2) \quad g^{-1}e_i g = e_1^{a_{1i}} e_2^{a_{2i}} \dots e_n^{a_{ni}}$$

darstellen läßt, woraus man eine Matrix

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

erhält, die einen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ darstellt. Wenn wir diese Matrix (3) der inversen g^{-1} von g zuordnen, so bilden solche Matrizen gesamt eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Kongruenzgruppe $\bar{\mathfrak{G}}$, nach dem Modul

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_1 \\ \mu_2 & \dots & \mu_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

wo μ_i die Ordnung der Basiselemente e_i bedeutet. Da alle Elemente von $\mathfrak{A}$ und nur sie bei (3) Einheitsmatrix liefern, so ist $\bar{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$, also ist $\bar{\mathfrak{G}}$ Abelsch. Wenn es umgekehrt eine Abelsche Kongruenzgruppe $\bar{\mathfrak{G}}'$ aus den Matrizen von der Gestalt (3) gibt, so kann man stets mindestens eine metabelsche Gruppe $\mathfrak{G}'$ derart konstruieren, die $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthält und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A} \cong \bar{\mathfrak{G}}'$ wird. In der Tat bestimmen wir z. B. jeder Matrix von $\bar{\mathfrak{G}}'$ entsprechend, ein Element $g_i'^{-1}$ für $\mathfrak{G}'$, so daß g_i' dieselbe Ordnung mit der entsprechenden Matrix hat, und setzen die Kompositionsregel von g' mit allen Elementen von $\mathfrak{A}$ durch die Beziehung (2) fest, und endlich nehmen wir an, daß alle $g_1', g_2', \dots$ vertauschbar seien, so erzeugen $g_1', g_2', \dots$ und $\mathfrak{A}$ die gewünschte metabelsche Gruppe $\mathfrak{G}'$.

Also sind beide gleichbedeutend, eine Abelsche Gruppe aus den Kongruenzmatrizen der Form (3) nach dem Modul (4) zu konstruieren und die $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthaltende metabelsche Gruppe zu bestimmen.

Stellt man $\mathfrak{A}$ als direktes Produkt der Untergruppen von voneinander verschiedenen Primzahlpotenzordnungen dar, so ist jede von solchen Untergruppen bei der Transformation mit g invariant, daher zerfällt (3) de-

mentsprechend auch in verschiedene Bestandteile, und wenn man noch die Bedingung hinzufügt, daß $\mathfrak{G}$ die maximale metabelsche Gruppe sei, die $\mathfrak{A}$ als maximalen Abelschen Normalteiler enthält, so muß $\mathfrak{G}$ notwendig aus allen möglichen Kombinationen von solchen Bestandteilen bestehen.

Nun setzen wir also voraus: $\mathfrak{A}$ ist von der Primzahlpotenzordnung und vom Typus

$$(5) \quad (p^{a_1}, \dots, n_1\text{-mal}; p^{a_2}, \dots, n_2\text{-mal}; \dots; p^{a_m}, \dots, n_m\text{-mal}).$$

Dann erhält man statt (3) die Kongruenzmatrix

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & p^{a_1-a_m}A_{12} & \dots & p^{a_1-a_m}A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

nach dem Modul

$$(7) \quad \begin{pmatrix} p^{a_1} & \dots & p^{a_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{a_2} & \dots & p^{a_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{a_m} & \dots & p^{a_m} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \text{ Zeilen} \\ \\ n_2 \text{ Zeilen} \\ \\ \\ n_m \text{ Zeilen} \end{matrix}$$

wo das Kästchen $A_{\lambda\mu}$ eine n_λ -zeilige und n_μ -spaltige Untermatrix bedeutet, wobei man bemerke, daß $g^{-1}e_i g$ und e_i von derselben Ordnung sind.

Wenn man A als Summe von zwei Matrizen:

$$(8) \quad A = A_0 + pA^*$$

darstellt, derart, daß die Koeffizienten von A_0 Null oder positive ganze Zahlen kleiner als p sind, so bilden solche Matrizen wie A_0 nach dem Modul p eine Kongruenzgruppe $\mathfrak{G}_0$ homomorph zu $\mathfrak{G}$, und wenn die Ordnung h von A bei $\mathfrak{G}$ zu p teilerfremd ist, so ist die Ordnung h_0 von A_0 bei $\mathfrak{G}_0$ gleich h . Denn da $\mathfrak{G}_0$ diejenige Gruppe ist, welche aus allen solchen Matrizen wie A erzeugt wird, wenn diese bloß nach dem Modul p betrachtet werden, ergibt sich unmittelbar $A_0^h = E \pmod{p}$ oder $h \geq h_0$.

Da umgekehrt $A_0^{h_0} = E \pmod{p}$ ist, so wird

$$\begin{aligned} A^{h_0} &= (A_0 + pA^{**})^{h_0} \\ &= E + pA^{**}, \end{aligned}$$

und diese Matrix A^{**} muß aber nach dem Modul (7) verschwinden, denn sonst würde $A^{h_0} \neq E \pmod{p}$ sein. Andererseits ist

$$\begin{aligned} A^{h_0 p^{a_1}} &= (E + pA^{**})^{p^{a_1}} \\ &= E + p^{a_1+1}A^{***}, \end{aligned}$$

oder

$$A^{h_0 p^{a_1}} = E \pmod{p^{a_1+1}},$$

was besagt, daß die Ordnung von A durch p teilbar wäre, gegen unsere Annahme.

Wenn wir also sowie $\overline{\mathfrak{G}}$ auch $\overline{\mathfrak{G}}_0$ als direktes Produkt zweier Untergruppen derart darstellen, daß die Ordnung der einen zu p teilerfremd ist, während die der anderen Potenz von p wird, so werden diese ersteren Untergruppen von $\overline{\mathfrak{G}}$ bez. von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ zueinander isomorph, und was die Struktur solcher Untergruppe betrifft, kann man bequem über $\overline{\mathfrak{G}}$ statt über $\mathfrak{G}_0$ erörtern.

§ 2. Die Matrizen im Galois-Felde $GF(p^s)$

In diesem und dem nächstfolgenden Paragraphen behandeln wir die Kongruenzmatrizen mod. p . Da solche Kongruenzmatrizen aber die Matrizen im Galois-Feld $GF(p)$ sind, so beschäftigen wir uns noch allgemeiner mit den Matrizen in $GF(p^s)$.

Hilfssatz 1: Ist A eine irreduzible Matrix⁽²⁾ des Grades n , so bilden alle mit A vertauschbaren Matrizen ein Galois-Feld $GF(p^{sn})$.

Beweis: Alle Matrizen, die mit A vertauschbar sind, bilden offenbar einen Ring $\mathfrak{R}$ mit endlich vielen Elementen, da aber kein Element von $\mathfrak{R}$ außer Nullmatrix die Nulldeterminante haben kann, (denn sonst würde A reduzibel), so muß $\mathfrak{R}$ ein Galois-Feld sein.

Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{R}$ ist höchstens gleich p^{sn} , denn es gibt nur p^{sn} verschiedene Gestalten für eine Spalte der Matrix des Grades n . Hätte $\mathfrak{R}$ also mehr als p^{sn} Elemente, so müßte es mindestens zwei Elemente geben, deren n -te Spalten einander gleich sind, und da die Differenz von diesen beiden Matrizen auch zu $\mathfrak{R}$ gehören muß, so würde $\mathfrak{R}$ ein Element mit verschwindender Determinante enthalten.

Da es andererseits für die Koeffizienten einer Matrix im beliebigen kommutativen Körper, die mit einer gegebenen Matrix des Grades n vertausch-

(2) Wenn nichts besonders ausgesagt, so sollen alle Matrizen in diesem Paragraphen im Galois-Feld $GF(p^s)$ sein.

bar ist, mindestens n unabhängige Parameter gibt⁽³⁾, und da in $GF(p^s)$ die Anzahl der verschiedenen Werte für einen von solchen Parametern gleich p^s sind, so ist die Anzahl der Matrizen, die mit A vertauschbar sind, mindestens gleich p^{sn} , und aus diesen beiden Tatsachen ergibt sich, daß $\mathfrak{K}$ genau p^{sn} Elemente haben muß.

Aus diesem Hilfssatz folgt unmittelbar

Hilfssatz 2: *Alle Matrizen, die mit einer irreduziblen Matrix vertauschbar sind, sind auch untereinander vertauschbar.*

Die Ordnung einer irreduziblen Matrix A des Grades n , und die der mit A vertauschbaren, von Null verschiedenen Matrix sind Teiler von $p^{sn} - 1$.

Da es ferner im beliebigen Körper stets eine irreduzible Matrix des gegebenen Grades gibt, so gilt

Hilfssatz 3: *Es gibt in $GF(p^s)$ stets eine irreduzible Matrix des Grades n und von der Ordnung $p^{sn} - 1$, für beliebige n .*

$\S$ sei eine Abelsche irreduzible Substitutionsgruppe in $GF(p^s)$ des Grades n , dann da die Differenz von zwei beliebigen Elementen von $\S$ wieder mit jedem Element von $\S$ vertauschbar ist, so gibt es stets einen kommutativen Ring $\mathfrak{K}$, der $\S$ enthält, und da $\S$ dazu irreduzibel ist, so kann kein Element von $\mathfrak{K}$ außer Nullmatrix verschwindende Determinante haben, folglich wird $\mathfrak{K}$ ein Galois-Feld, und alle von Null verschiedenen Elemente bilden eine zyklische Gruppe $\mathfrak{K}$, deren Ordnung Teiler von $p^{sn} - 1$ ist (Hilfssatz 2).

$\S$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{K}$ selber zyklisch und hat einen Teiler von $p^{sn} - 1$ als ihre Ordnung. Also erhalten wir den

Satz 1: *Jede irreduzible Abelsche Substitutionsgruppe in $GF(p^s)$ des Grades n ist zyklisch, und die Ordnung der Gruppe geht in $p^{sn} - 1$ auf.*

Ist $\S$ reduzibel, so nehmen wir an, daß $\S$ von vornherein auf ausreduzierte Gestalt gegeben sei, und jedes Element von $\S$ von der Gestalt

$$(1) \quad \begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{21} & B_{22} & \\ & \vdots & \ddots & \\ & & & B_{rr} \\ & B_{r1} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

⁽³⁾ Vgl. Charles Hopkins: An elementary proof of the theorem that the most general Matrix commutative with a given n -rowed square Matrix involves at least n arbitrary parameters. Tôhoku math. Journ., **39** (1934), 358.

ist, wo das Kästchen $B_{ii}, i = 1, 2, \dots, r$; des Grades m_i ist.

Dann bilden solche Kästchen $B_{ii}, i = 1, 2, \dots, r$; die zu $\mathfrak{G}$ homomorphen Gruppen $\mathfrak{B}_i$, und da $\mathfrak{B}_i$ irreduzibel sind, so sind $\mathfrak{B}_i$ zyklisch, und ihre Ordnungen Teiler von $p^{m_i} - 1$ (Satz 1). Daher müssen für die Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen Potenz von p sind, alle $B_{ii}, i = 1, 2, \dots, r$; Einheitsmatrizen E_i sein, falls umgekehrt $B_{ii} = E_i$ sind, so ist die Ordnung des entsprechenden Elements A auch gleich einer Potenz von p , insofern $A \neq E$ ist⁽⁴⁾. Denn bezeichnet man

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & A_{21} & 0 & & \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & & A_{r, r-1} & 0 \\ A_{r1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\bar{A}$, so daß $A = \bar{A} + E$, dann wird

$$A^{p^y} = E + \bar{A}^{p^y}.$$

Da ferner, wie man nach (2) leicht einsehen kann, $\bar{A}^k$ die Gestalt

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \\ & A'_{k+1,1} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ A'_{r1} & \dots & A'_{r, r-k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

nimmt, so wird $\bar{A}^{p^y}$ für genügend große y (wenigstens für $p^y \geq r$) verschwinden, und für solche y besteht $A^{p^y} = E$, w. z. b. w.

(4) Den folgenden Beweis dieser Umkehrung verdanke ich Herrn H. Aramata. Vgl. auch A. Speier: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1923, 165.

Hat $\mathfrak{S}$ die Elemente, deren Ordnungen zu p relativ prim sind, so darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $B_{\lambda\mu} = 0$, $\lambda \neq \mu$, für jedes von diesen Elementen, und sind die Hauptdiagonalkästchen eines Elementes von $\mathfrak{S}$ nicht sämtlich äquivalent, so zerfällt $\mathfrak{S}$ mindestens in zwei Bestandteile.

Daher genügt es nur den Fall zu betrachten, daß (2) für jedes Element von $\mathfrak{S}$ von der Gestalt

$$(4) \quad \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ B_{21} B_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ B_{r1} \dots \dots \dots B_{r,r-1} B_1 \end{pmatrix}$$

ist.

Die Kästchen B_1 von (4) bilden eine zyklische Gruppe $\mathfrak{B}_1$, deren Ordnung t in $p^{sm_1} - 1$ aufgeht (Satz 1). Sei B_1^* ein Basiselement von $\mathfrak{B}_1$, und B^* dasjenige Element von $\mathfrak{S}$, welches B_1^* als Hauptdiagonalkästchen enthält, dann kann man annehmen, daß die Ordnung von B^* gleich t ist, denn da das Hauptdiagonalkästchen von B^{*t} gleich E_1 wird, so muß die Ordnung von B^{*t} nach dem obigen Beweise gleich einer Potenz von p , etwa p^β , sein, falls $B^{*t} \neq E$, und in diesem Falle genügt es von vorneherein B^{*p^β} statt B^* zu brauchen.

Ist nun C ein beliebiges Element von $\mathfrak{S}$, dann kann man nach passender Wahl der Potenz von B^* so annehmen, daß CB^{*x} das Hauptdiagonalkästchen E_1 besitzt, d. h. die Ordnung von CB^{*x} gleich einer Potenz von p wird.

Also ist $\mathfrak{S}$ als direktes Produkt einer p -Gruppe und einer zyklischen Gruppe, deren Ordnung zu p teilerfremd ist, darstellbar d. h. vom Typus

$$(t, p^{\sigma_1}, p^{\sigma_2}, \dots), \quad t \mid p^{sm_1} - 1.$$

Da B^* von der Gestalt

$$(5) \quad \begin{pmatrix} B_1^* & & \\ & B_1^* & \\ & \ddots & \\ & & B_1^* \end{pmatrix}$$

ist, so ist bei (4)

$$B_{\lambda\mu} B_1^* = B_1^* B_{\lambda\mu},$$

weil $CB^* = B^*C$ ist.

Da aber B_1^* irreduzibel ist, so bilden alle Matrizen, die mit B_1^* vertauschbar sind, wieder ein Galois-Feld $\mathbf{GF}(p^{sm_1})$ (Hilfssatz 1), und zwar ist $B_{\lambda\mu} \in \mathbf{GF}(p^{sm_1})$.

Also kann man die Kästchen $A_{\lambda\mu}$ von (2) bloß als Zahlen aus Galois-Feld $\mathbf{GF}(p^{sm_1})$ betrachten, und $\mathfrak{S}$ als Substitutionsgruppe des Grades r in $\mathbf{GF}(p^{sm_1})$, alsdann ist $B^* = b^*E$, $b^* \in \mathbf{GF}(p^{sm_1})$, wenn folglich $\mathfrak{S}$ maximal Abelsch ist, so muß $t = p^{sm_1} - 1$ sein. Die bisherigen Ergebnisse fassen wir zusammen als

Satz 2: Jede reduzible Abelsche Substitutionsgruppe $\mathfrak{S}$ in $\mathbf{GF}(p^s)$ zerfällt, so daß jeder Bestandteil durch die Matrizen von den Gestalten

$$\begin{pmatrix} E & & \\ A_{21}E & \ddots & \\ & \ddots & \\ A_{r_i1} \dots A_{r_i, r_i-1}E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} B_i & & \\ & B_i & \\ & \ddots & \\ & & B_i \end{pmatrix}$$

erzeugt ist, wo $A_{\lambda\mu}$ und B_i die Elemente eines Galois-Feldes $\mathbf{GF}(p^{sm_i})$, das aus den Matrizen des Grades m_i besteht, sind.

Ist $\mathfrak{S}$ speziell maximal Abelsch, so stellt dieser Bestandteil eine Gruppe vom Typus

$$(p^{sm_i} - 1; p^{\sigma_{i1}}, p^{\sigma_{i2}}, \dots)$$

dar.

§ 3. Die maximalen Abelschen Substitutionsgruppen in $GF(p^u)$.

Wegen des Satzes 2 nehmen wir $\mathfrak{S}$ an, als Abelsche Gruppe erzeugt durch die Matrizen von den Gestalten

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a_{21} & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & a_{r1} & \dots & a_{r, r-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & b \end{pmatrix},$$

wo $a_{\lambda\mu}$ und $b \in GF(p^u)$, $u = sm$, ist, ferner fügen wir noch die Bedingung hinzu, daß $\mathfrak{S}$ maximal Abelsch sei. Wenn man also den Typus von $\mathfrak{S}$ klar machen will, genügt es nur die Invarianten der p zugehörigen Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{S}$ zu bestimmen.

Wir nennen diejenige Matrix *die abgeleitete Gruppenmatrix*, die sich aus einer Gruppenmatrix durch Ersetzung der Hauptdiagonalkoeffizienten mit Null ergeben.

Nun gilt der

Satz 3: $\mathfrak{S}$ sei eine maximale Abelsche Gruppe von den Matrizen der Gestalt (1); sind die ersten $r-1$ Spalten der abgeleiteten Gruppenmatrix $\mathbf{P}$ der p zugehörigen Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{S}$ linear unabhängig, so ist die Ordnung von $\mathfrak{S}$ gleich $(p^u-1)p^{u(r-1)}$ und jedes Element A von $\mathfrak{S}$ durch $r-1$ Elemente $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}$ von $\mathfrak{P}$ und E linear darstellbar, in der Art

$$(2) \quad A = b_1 \bar{A}_1 + b_2 \bar{A}_2 + \dots + b_{r-1} \bar{A}_{r-1} + b_r E, \quad \bar{A}_i = A_i - E,$$

wo die r -ten Zeilen der Matrizen $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{r-1}$ von der Gestalt

$$(3) \quad (0 \dots 0 \ a_{ri}^{(i)} \ 0 \dots 0), \quad a_{ri}^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, r-1;$$

sind.

Beweis: Da die ersten $r-1$ Spalten von $\mathbf{P}$ linear unabhängig sind, so gibt es keine Spalte, deren Koeffizienten sämtlich gleich Null sind, besonders so ist es mit der $(r-1)$ -ten Spalte, folglich hat $\mathfrak{S}$ mindestens ein Element A_{r-1} , dessen r -te Zeile von der gestalt

$$(a_{r1}^{(r-1)} \dots a_{r, r-1}^{(r-1)}), \quad a_{r, r-1}^{(r-1)} \neq 0,$$

ist.

Wir setzen also voraus, daß es k Basiselemente, $k < r-1$,

$$(4) \quad \bar{A}_{r-1}, \bar{A}_{r-2}, \dots, \bar{A}_{r-k}; \quad \bar{A}_{r-j} = A_{r-j} - E,$$

gibt, deren r -te Zeilen von der Gestalt

$$(5) \quad (a_{r1}^{(r-j)} \dots a_{r,r-j}^{(r-j)} 0 \dots 0), \quad a_{r,r-j}^{(r-j)} \neq 0,$$

sind, und beweisen die Existenz eines Basiselementes $\bar{A}_{r-k-1}$, dessen r -te Zeile die Gestalt wie (5), $j = k+1$, nimmt.

Man kann bei jedem Element A von $\mathfrak{B}$, außer $A_{r-1}, A_{r-2}, \dots, A_{r-k}$ durch Addition der Matrix

$$c_{r-1}\bar{A}_{r-1} + c_{r-2}\bar{A}_{r-2} + \dots + c_{r-k}\bar{A}_{r-k}$$

mit passenden Koeffizienten c_i aus $GF(p^u)$ so machen, daß die r -te Zeile von $\bar{A} = A - E$ von der Gestalt

$$(6) \quad (a_{r1} \dots a_{r,r-k-1} 0 \dots 0)$$

ist.

Wenn es ein Element gibt, für welches $a_{r,r-k-1} \neq 0$ bei (6) ist, so ist dies das gewünschte Basiselement.

Im sonstigen Falle transformiert man $\mathfrak{S}$ mit der Matrix

$$(7) \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -\frac{a_{r1}^{(r-1)}}{a_{r,r-1}^{(r-1)}} & \dots & -\frac{a_{r,r-2}^{(r-1)}}{a_{r,r-1}^{(r-1)}} & \frac{1}{a_{r,r-1}^{(r-1)}} & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

so daß die r -te Zeile von $S_1^{-1} \bar{A}_{r-1} S_1$ die Gestalt

$$(8) \quad (0 \dots 0 1 0)$$

nimmt, und dann ferner mit

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ -\frac{a_{r1}^{(r-2)}}{a_{r,r-2}^{(r-2)}} & \dots & -\frac{a_{r,r-3}^{(r-2)}}{a_{r,r-2}^{(r-2)}} & \frac{1}{a_{r,r-2}^{(r-2)}} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

so daß bei $(S_1 S_2)^{-1} \S S_1 S_2$ die r -te Zeile von $\bar{A}_{r-2}$ gleich

$$(9) \quad (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

wird, u.s.w., der Reihe nach bis mit

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ -\frac{a_{r1}^{(r-k)}}{a_{r,r-k}^{(r-k)}} & \dots & -\frac{a_{r,r-k-1}^{(r-k)}}{a_{r,r-k}^{(r-k)}} & \frac{1}{a_{r,r-k}^{(r-k)}} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

so daß die r -te Zeile von $\bar{A}_{r-k}$ die Gestalt

$$(10) \quad (0 \dots 0 \ a_{rk}^{(r-k)} 0 \dots 0), \quad a_{rk}^{(r-k)} = 1,$$

übergehe, indem die Formen (8), (9), dabei alle ungeändert bleiben.

Wir bezeichnen die so erhaltene mit $\S$ äquivalente Abelsche Gruppe mit $\S'$ und zu $A_{r-1}, \dots, A_{r-k}$ und A entsprechende Elemente von $\S'$ mit

$A'_{r-1}, \dots, A'_{r-k}, A'$. Da (6) durch die Transformationen mit $S_1, S_2, \dots$, S_k ungeändert bleibt, so ist $a'_{r, r-k-1} = 0$ für $\bar{A}'$.

Da dann $\bar{A}'$ mit jedem von $\bar{A}'_{r-j}$, $j = 1, 2, \dots, k$; vertauschbar ist, so muß $\bar{A}'$ von der Gestalt

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ a'_{21} 0 & \dots & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ & & & & & \\ a'_{r-k-1, 1} & \dots & a'_{r-k-1, r-k-2} & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ a'_{r1} & \dots & a'_{r, r-k-2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

sein, wie man durch Vergleichung der r -ten Zeilen von $\bar{A}' \bar{A}'_{r-j}$ und von $\bar{A}'_{r-j} \bar{A}'_j$ leicht bestätigen kann.

Also ist die $(r-k-1)$ -te Spalte von $\bar{A}'$ für jedes Element A' von $\mathfrak{S}'$ außer $\bar{A}'_{r-j}$, $j = 1, 2, \dots, k$; die Nullspalte, da andererseits keine Spalte von P die sämtlich verschwindenden Koeffizienten haben kann, so muß es unter $\bar{A}'_{r-1}, \dots, \bar{A}'_{r-k}$ mindestens ein Element $\bar{A}'_{r-j}$ geben, dessen $(r-k-1)$ -te Spalte nicht verschwindet. Sei nun diese Spalte von $\bar{A}'_{r-j}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{r-k-i, r-k-1}^{(r-j)} \\ \vdots \\ a_{r, r-k-1}^{(r-j)} \end{pmatrix}, \quad a_{r-k-i, r-k-1}^{(r-j)} \neq 0,$$

dann hat die r -te Zeile von $\bar{A}'_{r-k-i} \bar{A}'_{r-j}$,

$$(a_{r1}^* a_{r2}^* \dots a_{r, r-1}^* 0)$$

den Koeffizienten $a_{r, r-k-1}^* \neq 0$, und daraus ergäbe sich gegen die Annahme

wie bei S. 139 eine Matrix $\bar{A}'_{r-k-1}$, deren r -te Zeile von der Gestalt wie (6) mit nicht verschwindendem Koeffizienten $a_{r, r-k-1}$ ist, und offenbar $\bar{A}'_{r-k-1} \in \mathfrak{S}'$, weil $\mathfrak{S}'$ maximal Abelsch ist.

Also ist bewiesen, daß es $r-1$ Basiselemente

$$(12) \quad \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{r-1}$$

gibt, deren r -te Zeile von der Gestalt

$$(a_{r1}^{(r-j)} \dots a_{r, r-j}^{(r-j)} 0 \dots 0), \quad a_{r, r-j}^{(r-j)} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1;$$

sind, wobei wir o. B. d. A. annehmen dürfen, daß $a_{r, r-j}^{(r-j)} = 1$ ist, denn sonst brauchen wir $1/a_{r, r-j}^{(r-j)} \bar{A}_{r-j}$ statt $\bar{A}_{r-j}$, und dazu $a_{r1}^{(r-j)} = \dots = a_{r, r-j-1}^{(r-j)} = 0$, weil wir nötigenfalls $\bar{A}_{r-j}$ durch Addition der Matrix von der Gestalt

$$b_1 \bar{A}_1 + \dots + b_{r-j-1} \bar{A}_{r-j-1}$$

mit geeigneten Koeffizienten b_i aus $GF(p^u)$ die gewünschte Eigenschaft geben können.

Die so erhaltenen Matrizen $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{r-1}$, und E bilden ein Basissystem von $\mathfrak{S}$, denn ist die r -te Zeile einer einem Element N von $\mathfrak{P}$ zugehörigen Matrix $\bar{N}$ Nullzeile, so muß $\bar{N}$ Nullmatrix sein, weil da $\bar{N}$ mit jedem von $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{r-1}$ vertauschbar ist, ergeben sich die Beziehungen

$$(13) \quad (0 \dots 0 a_{r, r-j}^{(r-j)} 0 \dots 0) \bar{N} = (0 \dots 0), \quad a_{r, r-j}^{(r-j)} = 1,$$

falls man die r -ten Zeilen von $\bar{A}_j \bar{N}$ und $\bar{N} \bar{A}_j$ vergleicht, und setzt man bei (13) der Reihe nach $j = 1, 2, \dots, r-1$; so ist $\bar{N}$ eine Nullmatrix.

Daher ist die Matrix von $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt, wenn ihre r -te Zeile gegeben ist, aber diese Zeile ist offenbar durch die Zeilen der Elemente von (12) linear darstellbar, und fügt man (12) noch die Einheitsmatrix als Basiselement hinzu, so kann man damit alle Elemente von $\mathfrak{S}$ linear darstellen. Die Ordnung von $\mathfrak{S}$ ist also gleich $(p^u - 1) p^{u(r-1)}$, w. z. b. w.

Sei

$$(14) \quad (a_{\nu_1 1} \dots a_{\nu_1, \nu_1-1} 0 \dots 0)$$

die erste unter den Zeilen der abgeleiteten Gruppenmatrix $\mathbf{P}$, deren Koeffizienten nicht sämtlich verschwinden.

Wir denken uns alle zu $\mathbf{P}$ äquivalenten Matrizen, ist dabei der Unterindex ν_1 möglichst klein gewählt, so sind die Koeffizienten

$$(15) \quad a_{\nu_1 1}, \dots, a_{\nu_1, \nu_1-1}$$

von (14) linear unabhängig. Denn angenommen:

$$c_1 a_{\nu_1 1} + \dots + c_{\nu_1-1} a_{\nu_1, \nu_1-1} = 0.$$

Als dann sei T_1 die Matrix

$$(16) \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & C_{\kappa} & & \\ & & & C_{\kappa+1} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & C_{\nu_1+1} & & & 1 \end{pmatrix},$$

wo $c_i = 0$, $i < \kappa$, $c_{\kappa} \neq 0$ ist. Transformiert man P mit der Matrix

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

dann würde $a_{\nu_1 k} = 0$ bei $T^{-1}PT$ sein, und man kann durch Transformation mit der Permutation $(\kappa, \nu_1-1)(\nu_1-1, \nu_1)$ trotz der Annahme den Index ν_1 um 1 verkleinern.

Ferner machen wir, indem wir diesen Wert des Index ν_1 festhalten, den Index ν_2 derjenigen Zeile $a_{\nu_2 1} \dots a_{\nu_2, \nu_2-1} 0 \dots 0$ möglichst klein, welche die erste unter den Zeilen von P , deren Koeffizienten in den j -ten Spalten, $j \geq \nu_1$, nicht sämtlich gleich Null sind, ist.

Also ist die Untermatrix von P in Bezug auf die ersten ν_2 Zeilen von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \\ \boxed{P_{11}} & & & & \\ \vdots & & & 0 & \\ \vdots & & & 0 & \ddots \\ \alpha_{\nu_2 1} & \dots & \alpha_{\nu_2, \nu_1} & \dots & \alpha_{\nu_2, \nu_2-1} 0 \end{pmatrix},$$

wo P_{11} die Zeile (15) als die erste enthält.

Sind die Koeffizienten von

$$(17) \quad a_{\nu_2 \nu_1} \dots a_{\nu_2, \nu_2-1}$$

linear abhängig, kann man eine von ihnen in analoger Weise wie bei (15) verschwinden lassen, indem man P mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} E_2 & & & \\ & T_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert, wo E_2 die Einheitsmatrix des Grades ν_1-1 , und T_2 die zu (16) entsprechende Matrix des Grades $\nu_2-\nu_1$ sind.

Nach dieser Transformation muß $a_{\nu_2 \nu_1} = 0$ sein, denn sonst könnte man in derselben Weise wie oben den Index ν_2 verkleinern, ohne die Gestalt von (15) zu ändern; und ferner müssen alle Zeilen von P_{11} außer der ersten Nullzeilen sein, denn hätte P_{11} eine Zeile außer der ersten, deren Koeffizienten nicht sämtlich gleich Null sind, so könnte man durch eine gleichzeitige Permutation der Zeilen und Spalten von P diese Zeile statt (15) an die erste Stelle von P_{11} , und $a_{\nu_2 \nu_1}$ an Ende von (17) bringen, und danach könnte man auch in diesem Falle wie oben den Index ν_2 verkleinern, indem man den Wert ν_1 festhält.

Wir machen ferner den Index ν_3 der ersten Zeilen

$$a_{\nu_3 1} \dots a_{\nu_3, \nu_3-1} 0 \dots 0$$

unter denjenigen Zeilen von P , welcher Koeffizienten in den j -ten Spalten, $j \geq \nu_2$, nicht sämtlich verschwinden, möglichst klein, und setzen solches Schlußverfahren fort, so daß wir endlich folgende Gestalt von P erhalten:

(18)

The diagram shows a large matrix structure enclosed in large parentheses. The matrix is sparse, with non-zero elements concentrated in a few blocks. The blocks are labeled as follows:

- P_{11} is a square block in the top-left corner.
- P_{21} and P_{22} are square blocks below P_{11} .
- P_{w1} and P_{w2} are square blocks in the bottom-left corner.
- P_{ww} is a square block in the bottom-right corner.

A dashed line with zeros at each step indicates the sparsity pattern, showing that the matrix is block upper triangular with respect to the partitioning of the variables.

wo die ersten Zeilen von $\mathbf{P}_{jj}$, $j = 1, 2, \dots, w$;

$$a_{\nu_j \nu_{j-1}} \dots a_{\nu_j, \nu_{j-1}}$$

entweder linear unabhängige Koeffizienten haben, oder von der Gestalt

$$(19) \quad 0 \leq a_{\nu_j, \nu_{j-1}+1} \leq \dots \leq a_{\nu_j, \nu_j-1}$$

sind, wo $\alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}+1}, \dots, \alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}}$ linear unabhängig sind, und im letzteren Falle sollen alle Zeilen von $\mathbf{P}_{j-1, j-1}$ außer der ersten Nullzeilen sein.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $w \geq 4$ ist und die Koeffizienten der ersten Zeilen von $\mathbf{P}_{jj}$, $j = 1, \dots, w$; linear unabhängig sind.

(I) Sei $\mathbf{P}$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ \alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}} & & & & \alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}} 0 \end{pmatrix},$$

von (20) als abgeleitete Gruppenmatrix einer zu $\mathfrak{P}$ homomorphen Gruppe $\mathfrak{P}_j$ betrachtet werden kann, und die Ordnung von $\mathfrak{P}_j$ gleich $p^{u(\nu_{j-1})}$ ist, weil $\alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}}, \dots, \alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}}$ linear unabhängig sind (Satz 3), so gibt es genau $p^{u(\nu_{j-1})}$ Formen für die erste Zeile von A_{jj} , wäre also $s_{j-1} > s_j$, müßte es mindestens ein Element B von $\mathfrak{P}$ derart geben, daß nicht alle Koeffizienten der ersten Zeilen von $B_{j-1, j-1}$ verschwinden, während die erste Zeile von B_{jj} eine Nullzeile ist. Da aber $\bar{B}P = P\bar{B}$ ist⁽⁵⁾, so ergäbe sich

$$(22) \quad (0 \dots 0) P_{j-1, j-1} = (\alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}} \dots \alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}}) B_{j-1, j-1},$$

folglich müßte $B_{j-1, j-1}$ gegen die Annahme eine Nullmatrix werden, denn $\alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}}, \dots, \alpha_{\nu_j, \nu_{j-1}}$ sind linear unabhängig.

Also ist bewiesen daß

$$(23) \quad s_{j-1} \leq s_j$$

ist.

Die folgende Untermatrix von (20)

⁽⁵⁾ Hier und im folgenden bezeichnen wir $M-E$ mit $\bar{M}$ für eine Matrix M .

$$(24) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & P_{11} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & P_{21} & & P_{22} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & P_{31} & & P_{32} & & P_{33} \\ & & & & & & 0 \\ \hline & \alpha_{\nu_4 1} & & & & & \alpha_{\nu_4 \nu_3} & \alpha_{\nu_4 \nu_4-1} & 0 \end{array} \right),$$

stellt auch eine zu $\mathfrak{P}$ homomorphe Gruppe $\mathfrak{P}'$, und da die ersten $\nu_4 - 1$ Spalten von (24) linear unabhängig sind, so ist $\mathfrak{P}'$ von der Ordnung $p^{u(\nu_4-1)}$, und lassen sich alle Elemente von $\mathfrak{P}'$ durch die Basiselemente, deren letzte Zeilen von der Gestalt

$$(25) \quad (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$$

sind, und E linear darstellen (Satz 3). Da jedes Element von $\mathfrak{P}'$, dessen zu

$$\alpha_{\nu_4 \nu_3} \dots \alpha_{\nu_4 \nu_4-1}$$

entsprechenden Koeffizienten sämtlich verschwinden, wie bei (22) eine Nullmatrix als zu P_{33} entsprechendes Kästchen hat, so muß (25) für diejenigen Basiselemente die Gestalt

$$(0 \dots 0 \ \alpha_{\nu_4 i} \ 0 \dots 0), \quad i \geq \nu_3, \quad \alpha_{\nu_4 i} = 1,$$

nehmen, die die lineare Unabhängigkeit der ersten Zeilen von P_{33} liefern.

Die ersten Zeilen der zu P_{33} entsprechenden Kästchen aller Basiselemente von $\mathfrak{P}'$ sind aber alle in $A_{33}^{(\nu_3)}$ der folgenden Matrix

$$(26) \quad \bar{A}_{\nu_3} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

enthalten, wie man leicht durch die Vertauschbarkeit von A_{ν_3} mit jedem von diesen Matrizen ershen kann, indem man die ν_4 -ten Zeilen der Matrizen betrachtet. Daher sind die Spalten von $A_{33}^{(\nu_3)}$ linear unabhängig, d. h. $A_{33}^{(\nu_3)}$ ist vom Rang s_3 .

$A_{22}^{(\nu_3)}$ ist auch von Rang s_2 , denn transformiert man (24) mit der Matrix

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right), \quad T^{-1}A_{33}^{(\nu_3)} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots 0 \end{array} \right),$$

so geht (26) in die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{A_{11}^{(\nu_3)}} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{A_{22}^{(\nu_3)}} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

behandeln, wie mit (26), und die lineare Unabhängigkeit der Spalten von $A_{22}^{(\nu_3)}$ beweisen, w. z. b. w., und ferner daraus dasselbe für $A_{11}^{(\nu_3)}$.

Da der Rang von $A_{jj}^{(\nu_3)}$ gleich s_j ist, so kann keine von den ersten Zeilen von $A_{j+1, j+1}^{(\nu_3)}$, $j = 1, 2, 3$; eine Nullzeile werden, denn da $a_{\nu_{j+1}, \nu_j}, \dots, a_{\nu_{j+1}, \nu_{j+1}-1}$ linear unabhängig sind, so müßte $A_{jj}^{(\nu_3)}$ sonst wie bei (22) eine Nullmatrix sein.

Es gibt also eine Matrix T_2 des Grades s_3 , daß

$$T_2^{-1} A_{22}^{(\nu_3)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \quad |T_2| \neq 0,$$

und transformiert man $\mathbf{P}$ mit der Matrix

$$(28) \quad \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & T_2 & \\ & & & T_2 \\ & & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

wo E_1 und E_2 Einheitsmatrizen des Grades s_1 bzw. s_2 sind, dann geht (27) dabei in die Gestalt

$$(29) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \text{---} 0 \\ \begin{array}{c} \boxed{A_{11}^{(\nu_3)}} \\ \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{array} \begin{array}{c} 0 \text{---} 0 \\ \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{array} \begin{array}{c} 0 \text{---} 0 \\ \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{array} \\ 0 \text{---} 0 \quad \alpha_{\nu_4 \nu_2} \text{---} \alpha_{\nu_4 \nu_4^{-1}} 0 \end{array} \right)$$

über.

Ist nun $s_2 < s_3$, so sind die letzteren $s_3 - s_2$ Zeilen von $A_{22}^{(\nu_3)}$ bei (29) Nullzeilen, und aus der Vertauschbarkeit von A_{ν_3} mit P folgt

$$(\alpha_{j\nu_1} \dots \alpha_{j, \nu_2-1}) A_{11}^{(\nu_3)} = (0 \dots 0) P_{11},$$

wo $\alpha_{j\nu_1} \dots \alpha_{j, \nu_2-1}$ eine von den letzteren $s_3 - s_2$ Zeilen von P_{22} bedeutet. Da $A_{11}^{(\nu_3)}$ keine Nullmatrix ist, so besteht zwischen $\alpha_{j\nu_1}, \dots, \alpha_{j, \nu_2-1}$ eine lineare Beziehung. Dies ist aber unmöglich falls $s_2 > 1$, weil da

$$A_{33}^{(\nu_3)} P_{22} = P_{33} A_{22}^{(\nu_3)}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} P_{22} = P_{33} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$$

ist, stimmen die ersten s_2 Spalten derjenigen Untermatrix von $\mathbf{P}_{33}$, welche aus den ersten s_3 Zeilen von $\mathbf{P}_{33}$ besteht, mit den s_2 Spalten von $\mathbf{P}_{22}$ überein, folglich besteht die lineare Beziehung zwischen den Koeffizienten der $a_{j\nu_1} \dots a_{j, \nu_2-1}$ als ein Teil enthaltenden Zeile von $\mathbf{P}_{33}$, die offenbar, wie $A_{33}^{(\nu_3)}$ zeigt, keine Nullzeile ist. Wäre nun $s_2 \neq 1$, könnte man nachdem durch passende Permutation diese Zeile an die erste von $\mathbf{P}_{33}$ gebracht hat, wie bei S. 143 den Unterindex ν_3 verkleinern, denn, wie $A_{22}^{(\nu_3)}$ zeigt, ist die zweite Zeile von $\mathbf{P}_{22}$ von Null verschieden.

Daher und wegen (23) ist $s_2 = s_3$, falls $s_2 \neq 1$, und wird $\mathbf{P}_{22}$ eine quadratische Matrix. Falls $s_2 = 1$ ist, so ist auch $s_1 = 1$, weil $s_1 \leq s_2$ ist.

Im Falle $s_2 \geq 2$, also $s_2 = s_3$, transformieren wir $\mathbf{P}$ ferner mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ & T_3 & & & \\ & & T_3 & & \\ & & & T_3 & \\ & & & & 1 \dots \dots \dots 1 \end{pmatrix},$$

wo das Kästchen T_3 eine Matrix des Grades s_2 ist, daß

$$T_3^{-1} A_{11}^{(\nu_3)} = \begin{pmatrix} 1 \dots \dots \dots 1 \\ 0 \dots \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \dots \dots 0 \end{pmatrix}$$

ist, dann nimmt (29) die Gestalt

$$(30) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A_{21} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_{31} & A_{32} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \\ 0 \dots 0 \alpha_{\nu_4 \nu_1} \dots \alpha_{\nu_4, \nu_4-1} 0 \end{array} \right),$$

und da A_{ν_3} mit $\mathbf{P}$ vertauschbar ist, so sind

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{33} E_2, \quad E_2 \mathbf{P}_{11} = \mathbf{P}_{22} \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder wird $\mathbf{P}$ von der Gestalt

$$(31) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline P_{11} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline P_{21} & P_{22} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline P_{31} & P_{32} & P_{22} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \\ \hline \end{array} \\ 0 \dots 0 \alpha_{\nu_4 \nu_1} \dots \alpha_{\nu_4, \nu_4-1} 0 \end{array} \right),$$

wo die ersten s_1 Spalten von P_{22} mit den Spalten von P_{11} übereinstimmen.

Ferner muß P_{22} irreduzibel sein, denn gäbe es eine Matrix S_2 , die P_{22} reduziert, so könnte man bei (31) durch die Transformation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ & E_2 & & & \\ & & S_2 & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & 1 \dots \dots \dots 1 \end{pmatrix}$$

den Koeffizienten am Ende der ersten Zeile von P_{33} verschwinden lassen, während die erste Zeile von P_{22} dabei von Null verschieden bleibt, wie die erste Zeile von $A_{22}^{(\nu_3)}$ zeigt, die nach unserer Transformation gleich der ersten Zeile von S_2^{-1} wird, folglich müßte der Unterindex ν_3 verkleinert werden.

Seien A_{22} und B_{22} die zu P_{22} entsprechenden Kästchen von zwei beliebigen Elementen A und B von $\mathfrak{P}$, da $AB = BA$ ist, so muß dann auch $A_{22}B_{22} = B_{22}A_{22}$ sein. Also erzeugen die zu P_{22} entsprechenden Kästchen aller Elemente von $\mathfrak{P}$ eine irreduzible Abelsche Substitutionsgruppe $\mathfrak{A}$ des Grades s_2 in $GF(p^\nu)$.

Die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist nach Satze 1 ein Teiler von $p^{us_2} - 1$, da aber bei P_{22} alle möglichen Gestalten der ersten Zeile von A_{22} enthalten sind, (Satz 3), so muß $\mathfrak{A}$ genau von der Ordnung $p^{us_2} - 1$ sein, folglich muß es für beliebiges Element B_{22} von $\mathfrak{A}$ stets ein Element von $\mathfrak{P}$ geben, das B_{22} als zu P_{22} entsprechendes Kästchen besitzt.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (30) von der Gestalt

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -a_{\nu_1+1,1} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -a_{\nu_1+2,1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -a_{r1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ a_{\nu_1+1,1} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}$$

die erste Spalte von A_{ν_1} ist, so nimmt die erste Spalte von $T_1^{-1}A_{\nu_1}T_1$ die gewünschte Gestalt, und ist

$$(34) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ a_{\nu_1+2,2} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}$$

die zweite Spalte von A_{ν_1} , dann transformiert man $T_1^{-1}PT_1$ wieder mit der Matrix T_2 ,

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -a_{\nu_2+2,2} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -a_{r2} & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

so daß (34) in gewünschte Gestalt übergeht, und durch die Fortsetzung dieses Schlussverfahrens erreicht man endlich die Gestalt (32).

Da die i -te Zeile, $\nu_3 + s_2 \leq i < \nu_4$, von (32) Nullzeile ist, so müssen die Koeffizienten dieser Zeile von $A_{\nu_3} \mathbf{P} = \mathbf{P} A_{\nu_3}$ sämtlich verschwinden, daher muß bei (31) $\mathbf{P}_{33}^* = 0$ sein, und müssen die ersten s_1 Koeffizienten jeder Zeile von $\mathbf{P}_{32}^*$ gleich Null werden.

$\mathbf{P}_{32}^*$ ist dann auch eine Nullmatrix, denn sonst könnte man eine Zeile der Matrix $(\mathbf{P}_{31}^* \mathbf{P}_{32}^*)$ durch passende Permutation als die ν_2 -te Zeile von (31) wählen, und den Index ν_2 verkleinern, falls $s_1 \geq 2$ ist; und wenn $s_1 = 1$ ist, müßte die erste Spalte von $\mathbf{P}_{11}$ folglich von $\mathbf{P}_{22}$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

sein, aber dies ist unmöglich, weil $\mathbf{P}_{22}$ irreduzibel ist.

Bei den obigen Transformationen mit $T_1, T_2, \dots$ wird die lineare Unabhängigkeit der ersten Zeilen von $\mathbf{P}_{jj}$, $j = 1, 2, 3, 4$; offenbar nie verloren.

Auch im Falle $s_1 = s_2 = 1$ kann man ein Element A' von $\mathbf{P}'$ in analoger Weise folgende Gestalt nehmen lassen:

Dasselbe gilt auch im Falle $w > 4$, und es gibt zwei Formen von $\mathbf{P}$ die zu (33) bez. (35) entsprechen, aber die Kombinationen beider Formen sind unmöglich, d. h. es gibt keine Form wie

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ a_{21} & 0 & & & & \\ & a_{32} & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & \boxed{P_{33}} & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & \boxed{P_{44}} & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & \boxed{P_{55}} & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{array} \right),$$

denn sonst nähme die erste Spalte von $\mathbf{P}_{33}$ wie bei (35) die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c} a_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right),$$

während $\mathbf{P}_{33}$ wie $\mathbf{P}_{22}$ von (31) irreduzibel würde.

Also gilt der

Satz 4: Sei $\mathfrak{S}$ die maximale Abelsche Substitutionsgruppe in $GF(p^u)$, $\mathfrak{P}$ die Sylowgruppe in bezug auf p , und die abgeleitete Gruppenmatrix $\mathbf{P}$ von $\mathfrak{P}$ von der Gestalt (18).

Sind die Koeffizienten der ersten Zeilen von $\mathbf{P}_{jj}$, $j = 1, 2, \dots, w$; $w \geq 4$, linear unabhängig, so nimmt $\mathbf{P}$ nach passender Transformation entweder die Gestalt

(36)

wo die ersten s_1 Spalten von P_j mit P_{j1} übereinstimmen, und P_1 Gruppenmatrix einer irreduziblen maximalen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ von der Ordnung $p^{s_2}-1$ wird; oder die Gestalt

$$(38) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \boxed{A_{11}} & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

und da umgekehrt alle Matrizen von dieser Gestalt miteinander vertauschbar sind, so muß die Ordnung von $\mathfrak{P}$ gleich $p^{us_1(r-s_1)}$ sein, wobei s_1 die Anzahl der Spalten von A_{11} und r den Grad von A bedeuten, weil $\mathfrak{S}$ maximal Abelsch ist.

Da ferner $\bar{A}^2 = 0$ ist, ist $\mathfrak{P}$ vom Typus

$$(p, p, \dots, p).$$

Also erhalten wir den

Satz 5: $\mathfrak{S}$ ist eine maximale Abelsche Substitutionsgruppe in $GF(p^u)$ des Grades r . Hat jedes Element der p zugehörigen Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ die Gestalt (38), so ist $\mathfrak{S}$ von der Ordnung $p^{us_1(r-s_1)}$ und vom Typus

$$(p, p, \dots, p),$$

wenn s_1 die Anzahl der Spalten der A_{11} bedeutet.

Es gibt stets eine solche Gruppe für beliebige $s_1, s_1 < r$.

(B) Wenn $w = 2$ also

$$(39) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \boxed{P_{11}} & \\ & & 0 \\ & \boxed{P_{21}} & \boxed{P_{22}} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist, gibt es folgende zwei Fälle, daß

(B, 1.) die Koeffizienten der ersten Zeile von $\mathbf{P}_{22}$ linear unabhängig sind, oder

(B, 2.) der erste Koeffizient dieser Zeile verschwindet, während die anderen linear unabhängig sind.

Im Falle (B, 1.) ist die Anzahl s_1 der Spalten von $\mathbf{P}_{11} \leq$ diejenige s_2 von $\mathbf{P}_{22}$.

Sei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von $\mathbf{P}_{11}$, dann kann man o. B. d. A. so annehmen, daß die anderen $\nu_2 - \nu_1 - r_1$ Zeilen von $\mathbf{P}_{11}$ Nullzeilen sind. Denn gibt es die Beziehung

$$(40) \quad (\mu_1 \mu_2 \dots \mu_t) \mathbf{P}_{11} = (0 \dots 0), \quad t = \nu_2 - \nu_1,$$

dann transformiert man (39) mit der Matrix

$$T = \begin{pmatrix} E_1 & & & \\ & T & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_\alpha \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

und kann die α -te Zeile von $\mathbf{P}_{11}$ verschwinden lassen, wo μ_α der letzte unter den Koeffizienten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_t$ ist, die von Null verschieden sind.

Die Untermatrix

$$(41) \quad \left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & \swarrow & \\ & 0 & \\ \hline \mathbf{P}_{11} & & 0 \\ \hline \alpha_{\nu_2 1} & \alpha_{\nu_2 \nu_1} & \alpha_{\nu_2 \nu_1 - 1} 0 \end{array} \end{array} \right)$$

von $\mathbf{P}$ stellt eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{P}_1$ von der Ordnung $p^{u(\nu_2-1)}$ dar (Satz 3).
Sei B ein Element von $\mathfrak{P}$ von der Gestalt

$$(42) \quad \bar{B} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \\ b_{\nu_2+1,1} & \cdots & b_{\nu_2+1,\nu_2-1} 0 \\ b_{\nu_2+2,1} & \cdots & b_{\nu_2+2,\nu_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{r,\nu_2-1} 0 \end{array} \right) .$$

Da $\bar{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}\bar{B}$ ist, muß dann

$$(43) \quad \left(\begin{array}{cc} b_{\nu_2+1,1} & b_{\nu_2+1,\nu_2-1} \\ \vdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r,\nu_2-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & \swarrow & \\ & 0 & \\ \hline \mathbf{P}_{11} & & \\ \hline \end{array} \end{array} \right) = 0$$

sein, und da r_1 Zeilen von $\mathbf{P}_{11}$ linear unabhängig sind, so müssen dementsprechend r_1 Spalten von

$$(44) \quad \begin{pmatrix} b_{\nu_2+1,1} & \dots & b_{\nu_2+1,\nu_2-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r_1} & \dots & b_{r_1,\nu_2-1} \end{pmatrix}$$

Nullspalten werden.

Umgekehrt sind alle Matrizen von der Gestalt wie B miteinander und mit $\mathbf{P}$ vertauschbar und bilden eine Untergruppe $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{P}$, deren Ordnung gleich $p^{u(r-\nu_2)(\nu_2-r_1-1)}$ ist.

$\mathfrak{P}$ ist also von der Ordnung

$$(45) \quad p^{u\{(r-\nu_2)(\nu_2-r_1-1)+\nu_2-1\}},$$

weil die Faktorgruppe $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_2 \cong \mathfrak{P}_1$ ist.

Nach (39) ist $\bar{A}^3 = 0$ für jedes Element A von $\mathfrak{P}$, folglich

$$(46) \quad A^p = E, \quad p \geq 3,$$

und daher ist $\mathfrak{P}$ vom Typus

$$(47) \quad (p, \dots, p),$$

falls $p \neq 2$ ist.

Die Existenz der Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ der Ordnung (45) und vom Typus (47) kann man folgendermaßen durch Beispiele beweisen⁽⁶⁾.

Alle Elemente von $\mathfrak{P}_1$ sind nach dem Satze 3 durch die Basiselemente

$$(48) \quad A'_1, A'_2, \dots, A'_{\nu_2-1}, E'$$

linear darstellbar, wobei die ν_2 -ten Zeilen von A'_j , $j = 1, 2, \dots, \nu_2-1$; von der Gestalt

$$(49) \quad (0 \dots 0 a_{\nu_2 j}^{(j)} 0 \dots 0), \quad a_{\nu_2 j}^{(j)} = 1$$

sind. Da $A'_\lambda A'_\mu = A'_\mu A'_\lambda$ ist, muß dann notwendig

(6) Hier und in folgenden Beispielen soll die Bedingung weggelassen werden, daß die Unterindizes ν_i als möglichst kleine gewählt seien.

$$(50) \quad \bar{A}'_i = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{array} \right) \\ \\ \begin{array}{ccccccc} \alpha_{i1}^{(\nu_1)} & \cdots & \alpha_{i, \nu_1-1}^{(\nu_1)} & 0 & & & \\ \alpha_{i1}^{(\nu_1+1)} & \cdots & \alpha_{i, \nu_1-1}^{(\nu_1+1)} & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \alpha_{i1}^{(i-1)} & \cdots & \alpha_{i, \nu_1-1}^{(i-1)} & & & & \\ \alpha_{i1}^{(i)} & \cdots & \alpha_{i, \nu_1-1}^{(i)} & 0 & & & \\ \alpha_{i+1,1}^{(i)} & \cdots & \alpha_{i+1, \nu_1-1}^{(i)} & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \alpha_{\nu_2-1,1}^{(i)} & \cdots & \alpha_{\nu_2-1, \nu_1-1}^{(i)} & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array} \right) \quad \text{für } i < \nu_1,$$

sein, und umgekehrt sind die $\nu_2 - 1$ Matrizen miteinander vertauschbar, sofern ihre Koeffizienten dieser Bedingung (50) genügen.

Die Elemente von $\mathfrak{B}$ lassen sich also durch die ν_2 Elemente

$$(51) \quad A_1, A_2, \dots, A_{\nu_2-1}, E;$$

deren zu (41) entsprechenden Untermatrizen (48) sind, und die $(r - \nu_2)(\nu_2 - r_1 - 1)$ Elemente $B_1, B_2, \dots$ von der Gestalt (42) linear darstellen.

Wir bestimmen bei (42) alle j -ten, $\nu_1 \leq j < \nu_1 + r_1$, Spalten also Nullspalten, und geben den Koeffizienten der anderen Spalten alle möglichen Werte aus $GF(p^u)$, so daß wir die $p^{u(\nu_2 - r_1 - 1)(r - \nu_2)}$ Elemente von $\mathfrak{P}_2$ erhalten, und diese Elemente lassen sich durch E und die $(\nu_2 - r_1 - 1)(r - \nu_2)$ Elemente $B_1, B_2, \dots$ linear darstellen, welche nur einen einzigen von Null verschiedenen Koeffizienten, der o. B. d. A. als 1 angenommen werden kann, bei (42) haben.

Nun sei⁽⁷⁾

$$r_1 = \nu s_1 + \rho; \quad 0 \leq \rho < s_1, \quad \nu \geq 1,$$

wir nehmen die s_1 Zeilen des zu P_{11} entsprechenden Kästchens $A_{11}^{(\nu_1)}$ von A_{ν_1} als der Gestalt an

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots \cdots 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

dann sind die ersten Zeilen von $A_{11}^{(\nu_1+1)}, \dots, A_{11}^{(\nu_1+s_1-1)}$ nach (50) vollständig bestimmt; ferner wählen wir die ersten $2s_1$ Zeilen von $A_{11}^{(\nu_1+1)}$ wie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ a_{\nu_1+1,1}^{(\nu_1+1)} & & a_{\nu_1+1,\nu_1-1}^{(\nu_1+1)} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{\nu_1+s_1-1,1}^{(\nu_1+1)} & & a_{\nu_1+s_1-1,\nu_1-1}^{(\nu_1+1)} \\ 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots \cdots 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

(7) Vgl. (53).

und die zweiten Zeilen von $A_{11}^{(\nu_1+2)}, \dots, A_{11}^{(\nu_1+2s_1-1)}$ sind damit bestimmt.

In analoger Weise bestimmen wir im allgemeinen die ersten is_1 , $i \leq n$, Zeilen von $A_{11}^{(\nu_1+i-1)}$ wie

$$\left(\begin{array}{cc} a_{\nu_1+i-1,1}^{(\nu_1)} & a_{\nu_1+i-1,\nu_1-1}^{(\nu_1)} \\ \text{-----} & \\ \text{-----} & \\ \\ a_{\nu_1+i-2,1}^{(\nu_1+i-2)} & a_{\nu_1+i-2,\nu_1-1}^{(\nu_1+i-2)} \\ a_{\nu_1+i-1,1}^{(\nu_1+i-1)} & a_{\nu_1+i-1,\nu_1-1}^{(\nu_1+i-1)} \\ a_{\nu_1+i,1}^{(\nu_1+i-1)} & a_{\nu_1+i,\nu_1-1}^{(\nu_1+i-1)} \\ \text{-----} & \\ \text{-----} & \\ 1 & 0 \text{-----} 0 \\ 0 & 1 \quad 0 \text{-----} 0 \\ & \diagdown \\ 0 & \text{-----} 0 \end{array} \right),$$

endlich die ersten r_1 Zeilen von $A^{(\nu_1+x)}$ wie

$$\left(\begin{array}{cc} a_{\nu_1+\kappa,1}^{(\nu_1)} & a_{\nu_1+\kappa,\nu_1-1}^{(\nu_1)} \\ \text{-----} & \\ \text{-----} & \\ \\ a_{\nu_1+\kappa-1,1}^{(\nu_1+\kappa-1)} & a_{\nu_1+\kappa-1,\nu_1-1}^{(\nu_1+\kappa-1)} \\ a_{\nu_1+\kappa,1}^{(\nu_1+\kappa)} & a_{\nu_1+\kappa,\nu_1-1}^{(\nu_1+\kappa)} \\ a_{\nu_1+\kappa+1,1}^{(\nu_1+\kappa)} & a_{\nu_1+\kappa+1,\nu_1-1}^{(\nu_1+\kappa)} \\ \text{-----} & \\ \text{-----} & \end{array} \right).$$

Die ersten r_1 Zeilen von $A_{11}^{(\nu_1)}, \dots, A_{11}^{(\nu_2-1)}$ sind also nach (50) vollständig bestimmt, und wenn wir alle anderen Koeffizienten der Matrizen $\bar{A}_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu_2 - 1$; außer den der ν_2 -ten Zeilen (49), gleich Null setzen, so erhalten wir eine Schema des gewünschten Basissystemes (51). Wenn $p = 2$ ist, gibt es noch andre Typen für $\mathfrak{A}$.

Wegen (39) kann kein Element die Ordnung 2^3 haben, und für die Existenz des Elementes der Ordnung 2^2 , ist es nötig daß wenigstens einer von

$$(52) \quad A_{\nu_1}, \dots, A_{\nu_2-1}$$

diese Ordnung besitzt, denn das Quadrat jedes Elementes von $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{\nu_1-1}$

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & \\ 0 & 1 \quad 0 \text{-----} 0 \\ \text{-----} & \\ 0 & \text{-----} 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} 1 & \\ 0 & 1 \quad 0 \text{-----} 0 \\ \text{-----} & \\ 0 & \text{-----} 0 \end{array}} \right\} \rho \text{ Zeilen}$$

$$T = \begin{pmatrix} & E_1 & 0 \\ & & \\ 0 & & T_1 \end{pmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ C_1 & \cdots & \cdots & C_\mu \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \leq s_1,$$

die μ -te Zeile von $A_{11}^{(\nu_1+\sigma)}$ Nullzeile machen, dann bestände zwischen den Koeffizienten der μ -ten Zeile von P_{11} eine lineare Beziehung und liesse sich der Unterindex ν_1 nach passender Permutation der Zeilen und Spalten verkleinern. Wäre nun

$$A_j^2 \in \{A_{\nu_1}, A_{\nu_1+1}, \dots, A_{j-1}\},$$

gäbe es ein Element

$$A_j^* = A_j A_{\nu_1}^{*} A_{\nu_1+1}^{*} \dots A_{j-1}^{*},$$

daß die ν_2 -te Zeile von $\bar{A}_j^*$ von der Gestalt

$$(0 \dots 0 \ a_{\nu_2 \nu_1} \dots a_{\nu_2 j} \ 0 \dots 0), \quad a_{\nu_2 j} = 1,$$

ist, und die Unterdeterminante $A_{11}^{(j)*}$ verschwindet.

Da man andererseits A_j^* statt A_j nach passender Permutation wie bei S. 139 als Basiselement brauchen kann, muß $|A_{11}^{(j)*}| \neq 0$ sein. Also sind die Quadrate aller Elemente von (52) linear unabhängig, w.z.b.w.

Für $t < s_1$, also $s_1 < s_2$, kann man eine Schema erhalten, wenn man als die j -te Zeile von $A_{11}^{(\nu_1+j-1)}$

$$(0 \dots 0 \ a_{\nu_1+j-1, j} \ 0 \dots 0), \quad a_{\nu_1+j-1, j} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, t;$$

und

$$(0 \dots 0), \quad j > t,$$

wählt, und die anderen Koeffizienten der Matrizen nach (50) wie im Falle $p \geq 3$ passend bestimmt.

Ist

$$t = \mu_1 s_1 + t_1, \quad \mu_1 \geq 1, \quad 0 \leq t_1 < s_1,$$

muß A_{21}^* von (55) folglich P_{22} nach (54) mindestens μ_1 bez. $\mu_1 + 1$ Zeilen enthalten, je nachdem $t_1 = 0$ oder $t_1 > 0$, und setzt man

$$s_2 = \mu_2 s_1 + t_2, \quad 0 \leq t_2 < s_1,$$

dann ist $\mu_2 \geq \mu_1$, weil $s_2 > t$ ist.

Sei H eine irreduzible Matrix in $GF(2^u)$ des Grades s_1 , und der Ordnung $2^{\mu s_1} - 1$, dann gibt es unter den Elementen der zyklischen Gruppe $\{H\}$ die s_1 Matrizen

$$(56) \quad H_1 = E, H_2, \dots, H_{s_1};$$

die in $GF(2^u)$ linear unabhängig sind (Satz 1).

Dann müssen die Matrizen bei (56) schon in bezug auf die ersten Zeilen linear unabhängig sein, denn wäre die erste Zeile von

$$H^* = c_1 H_1 + c_2 H_2 + \dots + c_{s_1} H_{s_1}, \quad c_i \in GF(2^u),$$

eine Nullzeile, so müßte $H^* = 0$ sein. Also kann man o.B.d.A. annehmen, daß die ersten Zeilen von H_j , $j = 1, \dots, s_1 - 1$; von der Gestalt

$$(0 \dots 0 \ a_{1j} \ 0 \dots 0), \quad a_{1j} = 1,$$

sind.

Da alle Matrizen von $\{H^2\} = \{H\}$ in der Gestalt

$$b_1^2 H_1^2 + b_2^2 H_2^2 + \dots + b_{s_1}^2 H_{s_1}^2, \quad b_i \in GF(2^u),$$

darstellbar sind, so sind auch

$$H_1^2, H_2^2, \dots, H_{s_1}^2$$

folglich die ersten Zeilen von ihnen linear unabhängig.

Wir geben nun

so daß $\bar{A}_{s_1+j}^{\prime 2}$ linear unabhängig sind, während $\bar{A}_{is_1+j}^{\prime 2} = 0$, $\mu_1 \geq i > 1$, dazu lassen wir bei $A_{22}^{(s_1+j)}$, $\mu_1 \geq i \geq 1$, die i -ten Zeilen je gleich den ersten Zeilen von $A_{11}^{(s_1+j)}$ sein, und alle anderen Zeilen gleich den ersten Zeilen von sich selbst.

Die Quadrate von diesen $\kappa_1 s_1$ Basiselementen $A_{\nu_1}, A_{\nu_1+1}, \dots, A_{(\kappa_1+1)s_1}$ sind also offenbar linear unabhängig, und die anderen t_1 Matrizen, die nach Quadrieren voneinander und von den obigen quadrierten $\kappa_1 s_1$ Matrizen linear unabhängig sein sollen, kann man in derselben Weise wie im Falle $t < s_1$ unter $A_{(\kappa_1+1)s_1+1}, \dots, A_{\nu_2-1}$ wählen, indem man $A'_i, \nu_2-1 \geq i \geq (\kappa_1+1)s_1+1$ in der Gestalt

nimmt, und die Koeffizienten aller Zeilen von $A_{22}^{(i)}$ außer den ersten gleich Null setzt.

Wenn $s_1 < s_2$ ist, gibt es auch für $p = 2$ folgendes Beispiel von der Ordnung (45) und vom Typus $(p, \dots, p)$.

Wir machen die Koeffizienten der $(j+1)$ -ten Zeilen von $A_{11}^{(p_1+j)}$, $j = 0, 1, \dots, \nu_2 - 1$; sämtlich gleich Null, und brauchen zu den zwei Matrizen von S. 168 entsprechend die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{-----} & 0 \\ 1 & 0 & \text{-----} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-----} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \text{-----} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bez.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{\nu_1+2,1}^{(\nu_1+1)} & \cdots & a_{\nu_1+2,\nu_1-1}^{(\nu_1+1)} \\ \vdots & & \\ a_{\nu_1+s,1}^{(\nu_1+1)} & \cdots & a_{\nu_1+s,\nu_1-1}^{(\nu_1+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

indem wir die anderen Koeffizienten in derselben Weise wie im Falle $p \geq 3$ bestimmen.

Im Falle (B, 2) sind alle Zeilen von P_{11} außer der ersten Nullzeilen (S. 145), also

$$(57) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ \alpha_{\nu_1,1} & \cdots & \alpha_{\nu_1,\nu_1-1} & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots \\ \alpha_{\nu_2,1} & \cdots & \alpha_{\nu_2,\nu_2-1} & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ \alpha_{r,1} & \cdots & \alpha_{r,\nu_r-1} & & & 0 & \end{pmatrix},$$

dazu können wir voraussetzen, daß die erste Spalte von P_{22} auch Nullspalte ist.

Denn sind die Koeffizienten einer Zeile von P_{22} linear unabhängig, kann

man durch passende Permutation der Zeilen und Spalten von $\mathbf{P}$ diese Zeile als erste Zeile von $\mathbf{P}_{22}$ wählen, ohne die Gestalt von $\mathbf{P}_{11}$ dabei zu ändern, und die Frage führt sich auf den ersten Fall (B, 1.).

Gilt nun die Beziehung

$$(58) \quad c_1 a_{\nu_2+i, \nu_1} + c_2 a_{\nu_2+i, \nu_1+1} + \cdots + c_{\nu_2-\nu_1} a_{\nu_2+i, \nu_2-1} = 0, \quad i > 0,$$

für die Koeffizienten der $(i+1)$ -ten Zeile von $\mathbf{P}_{22}$, muß $c_1 \neq 0$ sein, denn sonst könnte man durch die Transformation mit einer Matrix wie (16), wenigstens einen Koeffizienten der $(i+1)$ -ten Zeile von $\mathbf{P}_{22}$ verschwinden lassen, und nachdem in derselben Weise wie bisher diese Zeile an erste Stelle von $\mathbf{P}_{22}$ gebracht hätte, könnte man den Index ν_2 verkleinern, wobei die erste Zeile von $\mathbf{P}_{11}$ ungeändert bleibt.

Nun transformieren wir (57) mit der Matrix T ,

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{\nu_2-\nu_1} \end{array} \end{array} \right) \rightarrow \text{die } \nu_1\text{-te Zeile ,}$$

so geht (57) in die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{P}'_{11} & \\ \hline \mathbf{P}'_{21} & \mathbf{P}'_{22} \\ \hline \end{array} \end{array} \right)$$

von $\mathbf{P}_{11}$ bedeutet, falls die Koeffizienten der ersten Zeile von $\mathbf{P}_{22}$ linear unabhängig sind. Für $p = 2$ gibt es außer (61), was nur möglich ist, falls $\nu_1 - 1 < \nu_2 - \nu_1$ ist, noch den folgenden Typus

$$(p^u - 1; p^2, p^2, \dots, ut\text{-mal}; p \dots p)$$

$$t \leq \text{Min}((\nu_1 - 1)(r - \nu_2 + 1), r_1).$$

Wenn $\mathbf{P}$ von der Gestalt (60) ist, dann ist die Ordnung von $\mathfrak{S}$ gleich

$$(p^u - 1)p^u \{ \nu_1 - 1 + (\nu_2 - 2)(r - \nu_2 + 1) \}$$

und der Typus

$$(p^u - 1; p, p, \dots, p).$$

Umgekehrt gibt es stets die Gruppen von solchen Ordnungen, Typen und mit solchen abgeleiteten Gruppenmatrizen.

(C) $w = 3$

(C, 1.) Wenn die Koeffizienten der ersten Zeilen von $\mathbf{P}_{ii}$, $i = 2, 3$; linear unabhängig sind, ist nach (23)

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3.$$

Man kann auch in diesem Falle wie bei (32) annehmen, daß $\mathfrak{S}$ ein Element A der Art hat, daß

$$(62) \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \diagdown \\ 1 \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \diagdown \\ 1 \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \diagdown \\ 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \diagdown \\ 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \diagdown \\ 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \diagdown \\ 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline A_{33} \\ \hline \end{array} \end{array} \right),$$

und $\mathbf{P}$ von der Gestalt

$$(63) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \begin{array}{|c|c|} \hline P_{11} & \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline P_{21} & P_{22} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline P_{21}^* \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline P_{31} & P_{32} & P_{33} \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

oder

$$(64) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \alpha_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \\ \hline \begin{array}{cccc} \alpha_{\nu_2, 1} & \alpha_{21} & \alpha_{\nu_2, 3} & \alpha_{\nu_2, \nu_2-1} \\ \alpha_{\nu_2+1, 1} & 0 & \alpha_{\nu_2+1, 3} & \alpha_{\nu_2+1, \nu_2-1} \\ \alpha_{\nu_3-1, 1} & 0 & \alpha_{\nu_3-1, 3} & \alpha_{\nu_3-1, \nu_2-1} \\ \alpha_{\nu_3, 1} & \alpha_{\nu_3, 2} & & \alpha_{\nu_3, \nu_3-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{\tau, 1} & & & \alpha_{\tau, \nu_3-1} \end{array} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

ist, wo $\mathbf{P}_{22}$ eine quadratische Matrix des Grades s_2 ist, und deren ersten s_1 Spalten mit $\mathbf{P}_{11}$ übereinstimmen.

(C, 1.1) Sei $s_1 \geq 2$.

Die Untermatrix

$$(65) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{\mathbf{P}_{11}} \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{\mathbf{P}_{21}} \quad \boxed{\mathbf{P}_{22}} \\ \vdots \\ \boxed{\mathbf{P}_{21}^*} \\ \vdots \\ \alpha_{\nu_3} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_{\nu_3, \nu_3-1} \end{array}$$

von (63) stellt eine Gruppe $\mathfrak{P}'$ von der Ordnung $p^{u(\nu_3-1)}$ dar, deren Matrizen durch die folgenden Basiselemente A'_j , $j = 1, 2, \dots, \nu_3-1$; und Einheits-
element E' linear darstellbar sind:

$$(66) \quad \bar{A}'_j = \left(\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \\ & \boxed{A_{11}^{(j)}} & \\ & \boxed{A_{21}^{(j)}} & \boxed{A_{22}^{(j)}} \\ & \boxed{A_{21}^{(j)*}} & \\ 0 & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \text{---} 0 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 0 \\ \text{---} 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \alpha_{\nu_3 j} \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 0 \end{array} \right),$$

$$a_{\nu_3 j} = 1.$$

Da sich jedes Element der Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{S}$ wie bisher durch die Basiselemente E und A_j , $j = 1, 2, \dots, \nu_3 - 1$; die A'_j als die zu (65) entsprechenden Untermatrizen enthalten; und die Matrizen von der Gestalt

(67)

linear darstellen läßt, ist $\mathfrak{P}$ von der Ordnung

$$(68) \quad p^{u\{\nu_3-1+(r-\nu_3)(\nu_3-r_1-1)\}},$$

wobei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von (65) bedeutet.

Die Zeilen von $\mathbf{P}_{22}$ sind aber, wie (62) zeigt, linear unabhängig, diejenigen von $\mathbf{P}_{11}$ sind auch so, denn wäre es nicht der Fall, so könnte man durch die Transformation mit einer Matrix von der Gestalt

$$(69) \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boxed{T_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right) \quad \leftarrow \text{die } \nu_2\text{-te Zeile}$$

wobei T_1 ein Kästchen des Grades s_2 ist (S. 144), die ersten s_1 Koeffizienten einer Zeile von P_{22} verschwinden lassen, ohne P_{11} zu ändern, und, da $s_1 \geq 2$ ist, den Unterindex ν_2 verkleinern. Also wird $r_1 = 2s_2 + r_1^*$, falls r_1^* die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von P_{21}^* ist.

Bei (66) ist $A_{22}^{(j)} = 0$, folglich auch $A_{11}^{(j)} = 0$, für $j \geq \nu_2 + s_2$ oder $< \nu_2$, speziell für $j < \nu_1$ sind dazu auch $A_{21}^{(j)} = 0$ und $A_{21}^{(j)*} = 0$.

Für $\nu_2 \leq j < \nu_2 + s_2$ ist dagegen die Determinante $|A_{22}^{(j)}| \neq 0$, denn hätte ein Element A_{σ} unter s_2 Basiselementen

$$A_{\nu_2}, A_{\nu_2+1}, \dots, A_{\nu_2+s_2-1}$$

die verschwindende Unterdeterminante $|A_{22}^{(\sigma)}|$, so transformiere man P mit einer Matrix von der Gestalt (69). Eine Zeile, etwa die μ -te, von $A_{22}^{(\sigma)}$ würde dann Nullzeile werden. Alsdann bestünde zwischen den s_2 Koeffizienten

$$(70) \quad a_{\nu_2+\mu-1, \nu_1}, \dots, a_{\nu_2+\mu-1, \nu_2-1}$$

der μ -ten Zeile von P_{22} eine lineare Beziehung, denn es gibt also höchstens nur $s_2 - 1$ Basiselemente, deren zu (70) entsprechende Koeffizienten nicht sämtlich verschwinden können.

Nach der Transformation einer Matrix, die von derselben Gestalt wie T von S. 143 ist, wird daher mindestens ein Koeffizient von (70) gleich Null (S. 143). Wäre dies nicht der erste, so könnte man gleicherweise wie bei S. 143 den Unterindex ν_2 verkleinern, im sonstigen Falle müssen alle Zeilen von P_{11} außer der ersten Nullzeilen sein (S. 145). Dies ist aber unmöglich, wie man leicht nach (62) ersieht.

Daher sind

$$(71) \quad \begin{array}{lll} \bar{A}_j' = 0 & (\mu = 4, 3) & \bar{A}_j'^2 \neq 0 \quad \text{für } \nu_2 \leq j < \nu_2 + s_2, \\ \bar{A}_j' = 0 & (\mu = 3, 2) & \text{für } \nu_2 + s_2 \leq j, \end{array}$$

$$\bar{A}_j'^2 = 0, \quad j < \nu_2.$$

Also ist $\mathfrak{P}$ vom Typus

$$(72) \quad (p, \dots, p), \quad p > 3,$$

und

$$(73) \quad (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p) \quad p \leq 3,$$

wobei t die Anzahl der linear unabhängigen Matrizen unter den p -ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{P}$ bedeutet. Daher ist notwendig

$$(74) \quad t \leq s_3 = \nu_3 - \nu_2.$$

Wenn $p = 2$ ist, da $\bar{A}_{\nu_2}'^2, \dots, \bar{A}_{\nu_2+s_2-1}'^2$ aus demselben Grunde wie im Falle $w = 2$ (S. 171) linear unabhängig sind, ist dazu

$$(75) \quad t \geq s_2 = \nu_2 - \nu_1,$$

und falls $t - s_2 > 0$ ist, so muß es unter

$$(76) \quad \bar{A}_{\nu_2+s_2}, \dots, \bar{A}_{\nu_3-1}$$

noch Elemente geben, deren Quadrate $\neq 0$ sind. Da aber jede Matrix von (76) die Gestalt

$$(77) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{c} A_{2l}^{(\nu_2+s_2+j)} \\ A_{2l}^{(\nu_2+s_2+j)*} \end{array}} \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

nimmt, so führt die Frage sich auf den Fall $w = 2$, und ergibt sich wie (54) die Bedingung

$$(78) \quad t \leq \text{Min.} \left((\nu_2 - 1)(r - \nu_3 + 1), r_1^* + s_2 \right).$$

Falls $p = 3$ ist gilt in analoger Weise

$$(79) \quad t \leq \text{Min.} \left(s_1(r - \nu_3 + 1), s_2 \right),$$

und speziell ist, $t = s_2$ für $s_1 = s_2$.

Denn in diesem Falle ist P_{22} , wie im Falle $w = 4$ die Gruppenmatrix einer irreduziblen Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ von der Ordnung $p^{us_2} - 1$.

Nun sei

$$(a_{\nu_4\nu_3}^* \dots a_{\nu_4, \nu_4-1}^*)$$

die erste Zeile des zu P_{33} entsprechenden Kästchens A_{33}^* eines beliebigen Elementes A^* von $\mathfrak{A}$, da A^* dann mit (62) vertauschbar ist, so ist

$$(80) \quad (a_{\nu_4\nu_3}^* \dots a_{\nu_4, \nu_4-1}^*) = (a_{\nu_4\nu_3} \dots a_{\nu_4, \nu_4-1}) A_{22}^*$$

folglich sind die ersten s_1 Koeffizienten der ν_3 -ten Zeile von $(A^{*3})_{33}$ gleich den ersten s_1 Koeffizienten von

$$(81) \quad (a_{\nu_4\nu_3} \dots a_{\nu_4, \nu_4-1}) (A_{22}^*)^3,$$

und nur diese s_1 Koeffizienten bei der ν_3 -ten Zeile von $\bar{A}^{*3}$ von Null verschieden sein können.

Da aber $(3, 3^{us_1} - 1) = 1$ ist, stimmen (81) in Gesamtheit mit (80) überein, wenn A_{22}^* alle Elemente von $\mathfrak{A}$ durchläuft, also ergeben sich die verschiedenen Gestalten von (81) aus den verschiedenen Matrizen aus $\mathfrak{A}$, denn sonst würde

$$(a_{\nu_4\nu_3} \dots a_{\nu_4, \nu_4-1}) (A'_{22} - A''_{22}) = 0, \quad A'_{22}, A''_{22} \in \mathfrak{A}.$$

da aber $A'_{22} - A''_{22} \in \mathfrak{A}$ ist, ist $|A'_{22} - A''_{22}| \neq 0$ (Hilfssatz 2), und folglich müßten $a_{\nu_4\nu_3}, \dots, a_{\nu_4, \nu_4-1}$ sämtlich verschwinden.

$\mathfrak{A}$ hat daher genau $(p^{us_1} - 1)$ Elemente der Ordnung 3^2 , w.z.b.w.

Beispiel 1. Der Typus von $\mathfrak{A}$ ist gleich dem von (72).

Seien

und zwar so, wie im Falle $w = 2$, daß die Bedingung in bezug auf r_1 bei (68) erfüllt wird.

In derselben Weise kann man die folgenden zwei Beispiele erhalten.

Beispiel 2. $\mathfrak{P}$ ist vom Typus (73), $p = 2$,

$$(85) \quad s_2 \leq t \leq \text{Min.} \left((\nu_2 - 1)(r - \nu_3 + 1), r_1^* + s_2 \right)$$

Beispiel 3. $\mathfrak{P}$ ist vom Typus (73), $p = 3$, $s_1 = s_2 = t$.

Ferner geben wir noch folgende Beispiele.

Beispiel 4. $\mathfrak{P}$ ist vom Typus (73), $p = 3$,

$$(86) \quad 0 < t \leq \text{Min.} \left(s_1(r - \nu_3 + 1), s_2 \right).$$

Es genügt nur die Basiselemente

$$(87) \quad A_{\nu_2}, A_{\nu_2+1}, \dots, A_{\nu_2+s_2-1}$$

zu bestimmen, denn mit den anderen Basiselementen läßt es sich in analoger Weise wie beim Beispiele 1 behandeln.

Wenn $t = 1$ ist, seien

$$\bar{A}'_{\nu_2} = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \text{---} 0 \\ \boxed{\begin{array}{cc} 1 & \text{---} 1 \\ & \text{---} 1 \end{array}} & \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} 0 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc} & 1 \\ & \text{---} 1 \end{array}} & \begin{array}{c} 0 \\ \text{---} 0 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc} & \end{array}} & \begin{array}{c} \text{---} 0 \end{array} \end{array} \right),$$

und die Koeffizienten aller Zeilen von $A_{22}^{(j)}$ für A'_j , $\nu_2 < j < \nu_2 + s_2$, außer den ersten, die je mit den ersten Zeilen von $A_{33}^{(j)}$ übereinstimmen, also von der Gestalt $(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ sind, sämtlich gleich Null und ferner bestche $A_{11}^{(j)}$ aus den ersten s_1 Spalten von $A_{22}^{(j)}$.

Falls $t > 1$ ist, bilden wir, um die Existenz der Beispiele durch vollständige Induktion zu beweisen, zuerst die folgenden zwei Schemata für $s_2 = 2$:

$$\bar{A}_{\nu_2} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \boxed{\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \\ 0 \quad 0 \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}} 0 \\ 0 \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \\ \cdots & & & & & \end{array}} 0 \\ 0 \end{array} \right),$$

$$\bar{A}_{\nu_2+1} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \boxed{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}} \\ 0 \quad 0 \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}} 0 \\ 0 \\ \boxed{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \\ \cdots & & & & & \end{array}} 0 \\ 0 \end{array} \right),$$

also $s_1 = 1$, $t = 2$.

$\bar{A}_j = \left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \boxed{A_{11}^{(j)'}} & \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \boxed{A_{22}^{(j)'}} \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}^{(j)'} & 0 & & 0 \end{array} \right),$

$j = \nu_2, \dots, \nu_2 + s_2 - 2;$

$\bar{A}_{\nu_2 + s_2 - 1} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \boxed{0} & \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & \boxed{0} \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{array} \right),$

wo

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

die zu (87) entsprechenden Basiselemente einer Substitutionsgruppe der Ordnung $p^u \{ \nu_3 - 3 + (r - \nu_3)(s_1 + s_3 - s_2 - r_1^*) \}$, vom Typus $(p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p)$ sind⁽⁸⁾.

Ist $t < s_2$, $s_1 = s_2$, seien

$$\bar{A}_j = \left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{array} \right), \quad j = \nu_2, \dots, \nu_2 + s_2 - 2;$$

(8) Bei den Figuren von S. 192 sollen die ersten $s_2 - 1$ Zeilen von $A_{22}^{(\nu_2 + s_2 - 1)}$, die letzten $r - \nu_3$ Zeilen von $A_{33}^{(\nu_3 + s_2 - 1)}$ und die letzte Zeile von $A_{22}^{(j)}$, $\nu_2 \leq j \leq \nu_2 + s_2 - 2$, gleich Null sein, und die letzte Zeile von $A_{11}^{(\nu_2 + s_2 - 1)}$ gleich $(1 \ 0 \dots 0)$. Nach den Schemata von S. 190, 191 kann man für kleinere s_2 so annehmen, daß unter $A^{(j)3}$ stets ein Element gibt, für welches $a_{\nu_3 1} = 1$ und die anderen Koeffizienten sämtlich gleich Null sind.

$$\bar{A}_{\nu_2+s_2-1} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & \begin{array}{|c|} \hline 0 \text{---} 0 | \\ 0 \text{---} 0 | \\ 0 \text{---} 0 | \\ \hline \end{array} & 0 & \\ & 0 & \begin{array}{|c|} \hline 0 \text{---} 0 | \\ 0 \text{---} 0 | \\ 0 \text{---} 0 | \\ \hline \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline 0 \text{---} 0 | \\ 0 \text{---} 0 | \\ \hline \end{array} & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right),$$

wo

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & \begin{array}{|c|} \hline A_{11}^{(j)'} \\ \hline \end{array} & 0 & \\ & 0 & \begin{array}{|c|} \hline A_{22}^{(j)'} \\ \hline \end{array} & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & 0 & \begin{array}{|c|} \hline A_{33}^{(j)'} \\ \hline \end{array} & 0 \end{array} \right)$$

die zu (87) entsprechenden Basiselemente einer Substitutionsgruppe der Ordnung $p^u \{ \nu_3 - 4 + (r - \nu_3)(s_1 + s_3 - s_2 - r_1^* - 1) \}$ und vom Typus

$$(p^2, \dots, u(t-1)\text{-mal}; p, \dots, p)$$

sind⁽⁹⁾.

Ist $t = s_2$, muß nach (79)

$$s_1(r - \nu_3 + 1) \geq s_2$$

(9) Die ersten $s_2 - 1$ Zeilen von $A_{ii}^{(\nu_2+s_2-1)}$, $i = 1, 2$; und die letzten Zeilen von $A_{ii}^{(j)}$ $i = 1, 2$; von S. 193 sollen verschwinden.

$$(91) \quad \bar{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & A_{11}^{(j)} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $A_{22}^{(j)}$ die Element einer zyklischen Permutation $\{P\}$ der Ordnung $s_2 - 1$ sind, so daß $\bar{A}_j$ und E' eine Abelsche Gruppe der Ordnung $p^{u\{\nu_3 - 3 + (r - \nu_3)(s_1 + s_3 - s_2 - r_1^*)\}}$ und vom Typus

$$(p^2, \dots, u(t-1)\text{-mal}; p, \dots, p)$$

erzeugen.

Die gewünschten Basismatrizen lauten dann folgenderweise:

$$\bar{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & A_{11}^{(j)'} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$j = \nu_2, \dots, \nu_2 + s_2 - 2;$

$$\bar{A}_{\nu_2+s_2-1} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\ 0 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \right),$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ für } s_2-1 \begin{cases} \equiv 0 \\ \not\equiv 0 \end{cases} \pmod{s_1}.$$

Denn bei $\bar{A}_{\nu_2+s_2-1}^3$ ist nur der erste Koeffizient der ν_3 -ten Zeile von Null verschieden, falls $s_2-1 \not\equiv 0 \pmod{s_1}$, andererseits hat unter $\bar{A}_j^3$, $j = \nu_2, \dots, \nu_2+s_2-2$; nur das einzige Element $\bar{A}_\rho^3$ der Gestalt

$$(A_{22}^{(\rho)})^3 = \left(\begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 0 \text{-----} 0 \\ \diagdown \\ 0 \text{-----} 0 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \text{-----} 0 \end{array} \right)$$

die ν_3 -te Zeile der Gestalt $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$, da aber $\bar{A}_\rho^3$ dazu noch andre von Null verschiedene Zeile, d. h. die π^* -te, hat, so ist $\bar{A}_{\nu_2+s_2-1}^3$ von $\bar{A}_j^3$, $j = \nu_3, \dots, \nu_3+s_2-2$; linear unabhängig, w.z.b.w.

Dasselbe gilt auch im Fall, daß $s_2-1 \equiv 0 \pmod{s_1}$ ist, denn in diesem Falle verschwinden die letzten Zeilen von $\bar{A}_j^3$, $j = \nu_2, \dots, \nu_2+s_2-2$; wegen $s_1(r-\nu_3+1) \geq s_2$ sämtlich, während diejenige von $\bar{A}_{\nu_2+s_2-1}^3$ die Gestalt $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$ nimmt.

Beispiel 5. $\mathfrak{P}$ sei vom Typus $(p, \dots, p)$, $p = 3$, $s_1 < s_2$. Es genügt auch in diesem Falle aus demselben Grunde wie beim Beispiele 4 nur die Basismatrizen für $\mathfrak{P}'$ zu bestimmen.

Es gibt die Gruppen, die der Bedingung erfüllen, daß die Koeffizienten der ersten Zeilen von P_{jj} , $j = 1, 2, 3$; linear unabhängig sind, z. B. die Gruppe darstellt durch die folgenden Matrizen:

$$\bar{A}'_{\nu_2} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & & & & & \\ \hline 1 & 0 & & & & \\ 1 & & 0 & & & \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \end{array} \right),$$

$$\bar{A}'_{\nu_2+1} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & & & & & \\ \hline 1 & 0 & & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline \vdots & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \end{array} \right).$$

Da unser Hauptzweck aber darin liegt, die Invarianten der Abelschen Gruppen zu bestimmen, nehmen wir hier nur folgende Schema auf, bei der bloß die Bedingung, daß die Zeilen von

P_{11}	
P_{21}	P_{22}

linear unabhängig sind, genügt wird.

Sei

$$\bar{A}'_{\nu_2+s_2-1} = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \text{---} 0 \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \text{---} 1 \\ 0 \end{array}} \quad 0 \\ 0 \quad \boxed{\begin{array}{c} 1 \text{---} 1 \\ 0 \end{array}} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} 0 \text{---} 0 \end{array} \right),$$

so daß $A_{11}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, \nu_3 - 1$; aus den ersten s_1 Spalten von $A_{22}^{(j)}$ bestehen, und wie bei (50) die letzten Zeilen von $A_{22}^{(j)}$ vollständig von $A_{22}^{(\nu_2+s_2-1)}$ bestimmt sind.

Für die anderen Zeilen von

$$(92) \quad A_{22}^{(\nu_2)}, A_{22}^{(\nu_2+1)}, \dots, A_{22}^{(\nu_2+s_2-2)}$$

setzen wir die Koeffizienten der i -ten Spalte, $i > s_1$, alle gleich Null, und die Formen der Kästchen (92) werden dann vollständig bestimmt, wenn die der entsprechenden $A_{11}^{(j)}$ gegeben sind.

Man läßt ferner die ersten s_1 Zeilen von $A_{22}^{(i)}$, $i = \nu_2, \nu_2+1, \dots, \nu_2+s_2-2$; sämtlich Nullzeilen werden, so daß die Koeffizienten der ersten s_1 Zeilen der Kästchen $A_{11}^{(i)}$ verschwinden.

Ist nun

$$s_2 - 1 = \kappa s_1 + \rho, \quad 0 \leq \rho < s_1,$$

dann seien die ersten $s_2 - 1$ Zeilen von

$$A_{11}^{(\nu_2+\lambda s_1)}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \kappa - 1;$$

von der Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{die } \lambda s_1\text{-te Zeile}$$

und diejenige von $A_{11}^{(\nu_2 + \chi s_1)}$ von der Gestalt :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{die } \mu s_1\text{-te Zeile} \\ \rho \text{ Zeilen} \end{array}$$

$$p^{u\{\nu_3-1+(r-\nu_3)(\nu_3-r_1-2)\}},$$

wobei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen des Kästchens

$$(94) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{\nu_2 1} & 0 & \alpha_{\nu_2 3} & \dots & \alpha_{\nu_2, \nu_2-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu_3-1, 1} & 0 & \alpha_{\nu_3-1, 3} & \dots & \alpha_{\nu_3-1, \nu_2-1} \end{pmatrix}$$

von $\mathbf{P}$ bedeutet, also ist wegen (62) $r_1 \geq s_2$.

$\mathfrak{P}$ ist vom Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für } p > 3,$$

und für $p = 3$ vom Typus

$$(p^2, \dots, u\text{-mal}; p, \dots, p),$$

denn unter den dritten Potenzen der Basismatrizen $\bar{A}_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu_3-1$; ist wegen (93) nur $(\bar{A}_{\nu_2})^3 \neq 0$.

Falls $p = 2$ ist, ist der Typus von $\mathbf{P}$

$$(p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p),$$

wobei t die Anzahl der linear unabhängigen Elemente unter den Quadraten von $\bar{A}_j$, $j = \nu_2, \nu_2+1, \dots, \nu_3-1$; ist, also

$$1 \leq t \leq \text{Min.} (s_2(r-\nu_3+1)+1, s_3).$$

Beispiele für Gruppen von solchen Ordnungen und Typen kann man analog wie in Fällen $s_1 \geq 2$, $w = 3$; und $w = 2$ erhalten.

(C, 2.) Die Koeffizienten der ersten Zeile von $\mathbf{P}_{33}$ sind linear unabhängig, und diejenigen von $\mathbf{P}_{22}$ von der Gestalt (19).

Man kann aus demselben Grunde wie bei (60) annehmen, daß

$$P = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \alpha_{\nu_1 1} & \alpha_{\nu_1, \nu_1-1} & 0 & \\ & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ \alpha_{\nu_2 1} & \alpha_{\nu_2, \nu_1-1} & 0 & \alpha_{\nu_2, \nu_1+1} & \alpha_{\nu_2, \nu_2-1} & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \alpha_{\nu_3 1} & \alpha_{\nu_3, \nu_1-1} & 0 & \alpha_{\nu_3, \nu_1+1} & \alpha_{\nu_3, \nu_2-1} & & \\ \alpha_{\nu_3 1} & & \alpha_{\nu_3 \nu_1} & & & & \alpha_{\nu_3, \nu_3-1} & 0 \\ & & & & & & & \\ \alpha_{r 1} & & & & & & & \alpha_{r, \nu_3-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wobei nach (23) $s_2 - 1 \leq s_3$ ist.

Ist nun

$$(95) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{\nu_3 \nu_1} \\ \alpha_{\nu_3+1, \nu_1} \\ \vdots \\ \alpha_{r \nu_1} \end{pmatrix} = 0,$$

bilden alle Matrizen von P , deren Koeffizienten außer den zu

$$(96) \quad \alpha_{\nu_1 1}, \dots, \alpha_{\nu_1, \nu_1-1}$$

entsprechenden sämtlich verschwinden, eine Untergruppe $\mathfrak{P}_1$ von der Ordnung $p^{u(\nu_1-1)}$, und die Faktorgruppe $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^*$ läßt sich durch die abgeleitete Gruppenmatrix

The diagram shows a triangular lattice structure. A large triangle is formed by dashed lines, with vertices labeled 0. Inside this triangle, there are several smaller triangles and a central square-like region. The nodes are labeled with 0 and 1. The edges are labeled with α and v values. The labels are as follows:

- Top vertex: 0
- Left edge: $\alpha_{v_2, 1}$
- Right edge: α_{v_2, v_2-1}
- Bottom-left edge: $\alpha_{v_3-1, 1}$
- Bottom-right edge: α_{v_3-1, v_3-1}
- Central square region: $\alpha_{v_3, 1}$ (left), α_{v_3, v_3-1} (right), $\alpha_{r, 1}$ (bottom-left), α_{r, v_3-1} (bottom-right)

darstellen, wobei die Spalten der zu (41) entsprechenden Untermatrix von $\mathbf{P}^*$ linear unabhängig sind; weil alle Matrizen des Grades r , deren ν_3 -ten Zeilen von der Gestalt $(\alpha_{\nu_3 1} \dots \alpha_{\nu_3, \nu_1-1} \ 0 \ \alpha_{\nu_3, \nu_1+1} \dots \alpha_{\nu_3, \nu_2-1} \ 0 \dots 0)$ sind und die anderen verschwinden, mit $\mathbf{P}$ vertuschbar sind.

Die Ordnung von $\mathfrak{P}^*$ ist gleich $p^n\{\nu_3-2+(r-\nu_3)(\nu_3-r_1-2)\}$, wobei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von

$$(97) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{\nu_2 1} & \dots & \alpha_{\nu_2, \nu_2-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu_3-1, 1} & \dots & \alpha_{\nu_3-1, \nu_2-1} \end{pmatrix}$$

bedeutet, also ist $r_1 > s_2 - 1$ (S. 149).

$\mathfrak{P}$ ist folglich von der Ordnung

$$(98) \quad p^u \{ \nu_1 + \nu_3 - 3 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 2) \}$$

und vom Typus

$$(p, \dots, p)$$

für $p \geq 3$, und

$$(p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p),$$

$$0 \leq t \leq \text{Min. } ((\nu_2 - 2)(r - \nu_3 + 1), s_3)$$

für $p = 2$, wobei t die Anzahl der linear unabhängigen Elemente unter den Quadraten der Basismatrizen $\bar{A}_j$, $j = \nu_2, \nu_2 + 1, \dots, \nu_3 - 1$; von $\mathfrak{P}$ bedeutet.

Sind die Koeffizienten von (95) nicht alle gleich Null, gibt es zwei Fälle, daß

(α) die $s_3 + 1$ Koeffizienten $\alpha_{\nu_3 \nu_1}, \alpha_{\nu_3 \nu_2}, \alpha_{\nu_3, \nu_2 + 1}, \dots, \alpha_{\nu_3, \nu_3 - 1}$ linear unabhängig sind⁽¹⁰⁾,

(β) oder nicht.

Im Falle (α) ist $\mathfrak{P}$ von der Ordnung

$$p^{u\{\nu_3 - 1 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 2)\}},$$

wobei r_1 von derselben Bedeutung wie bei (98) ist; und vom Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p \geq 3,$$

$$(p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p = 2,$$

$$0 \leq t \leq \text{Min. } ((\nu_2 - 2)(r - \nu_3 + 1), s_3 + 1).$$

Im Falle (β) kann man annehmen, daß $\alpha_{\nu_3 \nu_1} = 0$ ist, denn da es die Beziehung $c_1 \alpha_{\nu_3 \nu_1} + c_2 \alpha_{\nu_3 \nu_2} + \dots + c_{s_3 + 1} \alpha_{\nu_3, \nu_3 - 1} = 0$ besteht, so transformiere man $\mathbf{P}$ eventuell mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & C_1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & C_2 \\ & & & & & C_3 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & C_{s_3} \end{pmatrix}$$

⁽¹⁰⁾ In diesem Falle ist $s_1 \leq s_3 + 1$ nach (23).

Ferner kann man noch voraussetzen, daß keine Zeile von

$$(99) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{\nu_3\nu_1} & \dots & \alpha_{\nu_3\nu_2} & \alpha_{\nu_3, \nu_2+1} & \dots & \alpha_{\nu_3, \nu_3-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r\nu_1} & \dots & \alpha_{r\nu_2} & \alpha_{r, \nu_2+1} & \dots & \alpha_{r, \nu_3-1} \end{pmatrix}$$

linear unabhängige Koeffizienten hat, denn sonst führt sich die Frage auf den Fall (a), weil jede Zeile von (99) durch passende Permutation der Zeilen und Spalten von $\mathbf{P}$ als die erste von (99) gewählt werden kann. Sei $\mathfrak{P}'$ von derselben Bedeutung wie bei S. 148, so ist die Ordnung von $\mathfrak{P}'$ mindestens gleich $p^{u(\nu_3-2)}$, wäre sie größer als $p^{u(\nu_3-2)}$, gäbe es für jede Zeile von (99) ein solches Element von $\mathfrak{P}$, deren Koeffizienten dieser Zeile und der j -ten Zeilen, $\nu_1 < j < \nu_3$, gleich Null und die ν_1 -te Zeile von Null verschieden sind, und nach der Vertauschbarkeit solcher Matrizen mit $\mathbf{P}$ ergäbe sich die Beziehung (95). Also muß $\mathfrak{P}$ in gleicher Weise wie bisher von der Ordnung

$$p^{u\{\nu_3-2+(r-\nu_3)(\nu_3-r_1-2)\}},$$

und vom Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für } p \geq 3,$$

$$(p^2, \dots, \text{ut-mal}; p, \dots, p) \quad \text{für } p = 2,$$

$$0 \leq t \leq \text{Min.} \left((\nu_2-2)(r-\nu_3+1), s_3 \right)$$

werden.

Die Schema für den Fall (a) kann man wie im Falle $w = 2$ leicht erhalten, und für den Fall (b) gibt es folgendes Beispiel.

Seien die ν_3 -ten Zeilen der Basismatrizen $\bar{A}_j$, $j = 1, \dots, \nu_2-1, \nu_2+1, \dots, \nu_3-1$; von der Gestalt

$$(100) \quad (0 \dots 0 \ a_{\nu_3 j} \ 0 \dots 0), \quad a_{\nu_3 j} = 1,$$

seien u. a.

wobei σ eine beliebig im obigen Intervalle gewählte Zahl ist, und für solche σ sei

$$(\alpha_{\nu_1 1}^{(\sigma)} \dots \alpha_{\nu_1, \nu_1-1}^{(\sigma)}) = -(\alpha_{\sigma_1}^{(\sigma)} \alpha_{\sigma_2}^{(\sigma)} \dots \alpha_{\sigma, \nu_1-1}^{(\sigma)}).$$

Die (ν_3+1) -ten Zeilen von anderen $\bar{A}_j$ stimmen je mit den ν_3 -ten Zeilen von sich selbst überein, und die anderen Koeffizienten der Matrizen sind in derselben Weise wie im Falle $w=2$ nach (50) zu bestimmen, so daß die Bedingung in bezug auf r_1 genügt wird.

(C, 3.) Die Koeffizienten der ersten Zeile von P_{22} sind linear unabhängig und die von P_{33} sind von der Gestalt (19), d. h. P sei in der Gestalt

$$(101) \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ \hline & \alpha_{\nu_2 1} & \alpha_{\nu_2, \nu_2-1} & 0 \\ & P_{21}^* & 0 & \\ \hline P_{31} & P_{32} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & P_{33} \\ & & & 0 \end{array} \right)$$

gegeben⁽¹¹⁾.

Wenn r_0 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von

$$(102) \quad \begin{array}{|c|} \hline P_{11} \\ \hline P_{21}^* \\ \hline \end{array}$$

⁽¹¹⁾ Vgl. (60).

$$(104) \quad \bar{A}_j = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & A_{11}^{(j)} & & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ \hline & & a_{\nu_2-1}^{(j)} & & a_{\nu_2, \nu_2-1}^{(j)} & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & A_{21}^{(j)*} & & 0 & & \\ & & & & & & \\ \hline & & A_{31}^{(j)} & & A_{32}^{(j)} & & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & & A_{33}^{(j)} & & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{array} \right).$$

Wenn auch es in der Tat jetzt noch fraglich ist, ob es stets die gewünschte Matrix für jede von diesen $\nu_3 - 2$ Werten von j gibt, kann man wenigstens ein System der Matrizen von dieser Gestalt so bestimmen, daß die ν_3 -te Zeile von

$$\bar{M} = \sum c_j \bar{A}_j, \quad c_j \in GF(p^u),$$

Nullzeile wird, wenn M eine beliebige Matrix von $\mathfrak{P}$ ist.

Da die letzteren $s_2 - r_1$ und $s_3 - r_2 - 1$ Zeilen von $\mathbf{P}_{11}$ bzw. $\mathbf{P}_{21}^*$ Nullzeilen sind, werden alle solche Matrizen mit $\mathbf{P}$ vertauschbar, die beliebige Zahlen aus $GF(p^u)$ für die Koeffizienten der letzteren $s_2 - r_1$ und $s_3 - r_2 - 1$ Spalten von $A_{32}^{(j)}$ bzw. $A_{33}^{(j)}$, und für die zu

$$(105) \quad a_{\nu_2 1}, \dots, a_{\nu_2, \nu_1 - 1}; a_{\nu_2, \nu_2 - s_2 + r_1}, \dots, a_{\nu_2, \nu_2 - 1},$$

entsprechenden Koeffizienten, ferner Null für alle anderen Koeffizienten nehmen. Also ergeben sich folgende $s_2 + s_3 - r_0 - 1$ Basismatrizen

$$(106) \quad \bar{A}_\lambda, \quad \nu_2 - s_2 - r_1 \leq \lambda < \nu_2 \quad \text{oder} \quad \nu_3 - s_3 + r_2 < \lambda \leq \nu_3 - 1.$$

Nun sei

$$(107) \quad (a_{\nu_3 1} \dots a_{\nu_3 j} \ 0 \dots 0), \quad a_{\nu_3 j} = 1,$$

die ν_3 -te Zeile von einer anderen Matrix $\bar{A}_j$, dann kann man durch die Transformation von $\mathbf{P}$ mit der Matrix S ,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ -a_{\nu_3 1} & \dots & -a_{\nu_3 j} & 1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

die Zeile (107) in gewünschte Gestalt übergehen lassen, wobei die Bedingung in bezug auf r_1 und r_2 invariant bleibt, weil man bei (107) alle zu den Basiselementen (106) entsprechenden Koeffizienten gleich Null setzen kann.

Wenn h Matrizen von

$$\bar{A}_{\nu_2+1}, \bar{A}_{\nu_2+2}, \dots, \bar{A}_{\nu_2+r_2}$$

Nullmatrizen als zu $\mathbf{P}_{11}$ entsprechende Kästchen haben, dann nimmt man an, daß die h' von den ersten r_2 Zeilen von $\mathbf{P}_{21}^*$ schon in bezug auf den Zeilen dieser h Matrizen linear unabhängig sind, und ferner aus demselben Grunde wie oben daß die ersten h' Zeilen von $A_{21}^{(\nu_2+i)*}$, $1 \leq i \leq h$, in solchen Zeilen von $\mathbf{P}_{21}^*$ enthalten seien, und die anderen Zeilen von $\bar{A}_{21}^{(\nu_2+i)*}$ sämtlich verschwinden.

Es ist $h = h'$, d. h. A_{ν_2+i} , $1 \leq i \leq h'$, hat das Kästchen $A_{11}^{(\nu_2+i)} = 0$.

Z. B. ist $A_{11}^{(\nu_2+1)} = 0$, denn da jede Matrix, deren ν_3 -te Zeile Nullzeile ist, wieder Nullzeile als zu

$$(109) \quad a_{\nu_2+1,1} \dots a_{\nu_2+1,\nu_1-1}$$

entsprechende Zeile enthält, so muß die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{(\nu_2+1)} \\ A_{21}^{(\nu_2+1)*} \end{pmatrix}$$

wie im Falle $w = 3$ vom Rang s_1 sein (S. 149).

Wäre $A_{11}^{(\nu_2+1)} \neq 0$, so müßte $(a_{\nu_2\nu_1}^{(\nu_2+1)} \dots a_{\nu_2, \nu_2-1}^{(\nu_2+1)}) \neq 0$ sein, denn sonst würden $a_{\nu_2\nu_1}, \dots, a_{\nu_2, \nu_2-1}$ linear abhängig sein; folglich würde $A_{11}^{(\nu_2+1)}$ aus demselben Grunde wie oben vom Rang s_1 sein. Man könnte dann durch die Transformationen von P mit den Matrizen von der Gestalt (103) das Kästchen $A_{21}^{(\nu_2+1)*}$ verschwinden lassen, und ferner gegen die Annahme die erste Zeile von $A_{21}^{(\nu_2+i)*}$, $1 \leq i \leq h$, wegen (50).

Dasselbe gilt auch für $\bar{A}_j$, $\nu_2+1 < j \leq \nu_2+h'$. Für solche A_j , $\nu_2 < j \leq \nu_2+h$, verschwinden die Koeffizienten $a_{\nu_2\nu_1}^{(j)}, \dots, a_{\nu_2, \nu_2-1}^{(j)}$ sämtlich, und da ferner die zu (105) entsprechenden Koeffizienten auch als Null angenommen werden können, erhalten wir die h Basismatrizen von der Gestalt

$$(108) \quad \bar{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & A_{21}^{(j)*} & 0 \\ & A_{31}^{(j)} & A_{32}^{(j)} & A_{33}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$$j = \nu_2+1, \dots, \nu_2+h.$$

Es muß also noch ν_2-1 Basismatrizen C_j , $j = 1, 2, \dots, \nu_2-1$; von der Gestalt

(109) $\bar{C}_j =$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & C_{11}^{(j)} & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & \cdots & 0 & C_{\nu_2 j} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & & 0 \\ & C_{31}^{(j)} & C_{32}^{(j)} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & C_{33}^{(j)} & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{array} \right),$$

$c_{\nu_2 j} = 1,$

geben, die die Untermatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ & 0 \\ & & P_{11} \\ & & & 0 \\ \alpha_{\nu_1} & & & & \alpha_{\nu_1, \nu_1-1} & 0 \end{array} \right)$$

erzeugen, und da ferner keine Matrix von der Gestalt

$$\nu_2 + h < \sigma < \nu_2 + r_2,$$

existieren kann, (denn sonst wäre eine von den ersten r_2 Zeilen von $\mathbf{P}_{21}^*$ Nullzeile), ist $\mathfrak{P}'$ von der Ordnung $p^{u(\nu_2 + l + h + s_1 + s_2 + s_3 - r_0 - 2)}$, folglich $\mathfrak{P}$ von der Ordnung

$$p^{u\{\nu_2 + l + h + s_1 + s_2 + s_3 - r_0 - 2 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_0 - 2)\}},$$

wobei l die Anzahl der Basismatrizen der Gestalt

(110)

The diagram shows a matrix structure within large parentheses. It consists of several blocks and rows of zeros connected by dashed lines, indicating a sparse or block-diagonal structure. A central block is labeled $A_{21}^{(j)**}$. To its right, there is a row of zeros with a label $a_{\nu_3 j}^{(j)}$ under one of the zeros. Above this row, there is a bracketed section labeled " h Zeilen" (h rows). The matrix is surrounded by a large right parenthesis. Below the matrix, the text $a_{\nu_3 j}^{(j)} = 1, \quad \nu_1 \leq j < \nu_2,$ is written.

$a_{\nu_3 j}^{(j)} = 1, \quad \nu_1 \leq j < \nu_2,$

bedeutet, und vom Typus

$$(p, \dots, p), \quad p \geq 3.$$

Wenn $p = 2$ ist, so wendet man die Ergebnisse im Falle $w = 2$ auf die Matrizen von (108) bzw. von (109), (110), und erhält den Typus

$$(p^2, \dots, u(t_1 + t_2 + t_3)\text{-mal}; p, \dots, p)$$

$$0 \leq t_1 \leq \text{Min.}(s_1(r - \nu_3 + 2), s_2), \quad 0 \leq t_2 \leq \text{Min.}(s_1(r - \nu_3 + 1), h),$$

$$0 \leq t_3 \leq \text{Min.}(s_1(r - \nu_3), l), \quad t_1 + t_2 + t_3 \leq s_1(r - \nu_3 + 2).$$

Die Beispiele für diesen fall (C, 3) kann man mit Hilfe der Ergebnisse im Falle $w = 2$ folgendermaßen bilden:

Da alle matrizen von $\mathbf{P}$, deren ν_3 -te Zeilen von der Gestalt

$$(0 \dots 0 \ a_{\nu_3, \nu_2+i} \ 0 \dots 0), \quad a_{\nu_3, \nu_2+i} = 1, \quad h < i \leq r_2,$$

sind, nicht verschwindendes Kästchen $A_{11}^{(\nu_2+i)}$, $i = h+1, h+2, \dots, r_2$; haben, und da dazu solche Kästchen linear unabhängig sind, (denn sonst gäbe es mehr als h Basismatrizen der Gestalt (108)), so müssen diese Matrizen durch $\bar{C}_j$, $j = \nu_1, \nu_1+1, \dots, \nu_2-1$; von (106) linear dargestellt werden.

Also ist

$$(111) \quad r_2 - h \leq s_2.$$

Die $(\nu_2-1) - (r_2-h)$ Matrizen von (109) können also angenommen werden, daß ihre zu

$$a_{\nu_3, \nu_2+h+1}, a_{\nu_3, \nu_2+h+2}, \dots, a_{\nu_3, \nu_2+r_2}$$

entsprechenden Koeffizienten sämtlich verschwinden, da aber solche Matrizen wegen ihrer Vertauschbarkeit mit den Matrizen der Gestalt (110) mindestens l gemeinsame Nullzeilen haben, müssen um die lineare Unabhängigkeit der ersten r_1 Zeilen von P_{11} beizubehalten die entsprechenden l Zeilen von $\bar{A}_j$, $j = \nu_2+h+1, \dots, \nu_2+r_2$; linear unabhängig sein. Daher ist⁽¹²⁾

$$(112) \quad l \leq (r_2-h)s_1.$$

Diese beiden Bedingungen (111) und (112) sind also stets nötig, falls man die Schema für unsre Gruppe bilden will.

Bei den Basismatrizen der Gestalt (109), stimmen r_2-h von ihnen (z. B. $\bar{C}_j$, $j = \nu_1, \nu_1+1, \dots, \nu_1+r_2-h-1$) mit $\bar{A}_j$, $j = \nu_2+h+1, \dots, \nu_2+r_2$; überein, die ersten s_1+l Zeilen aller anderen Matrizen seien gleich Null, und dementsprechend bestimmen wir die Matrizen von (110), so daß $j = \nu_1, \nu_1+1, \dots, \nu_1+l-1$ ist, ferner die Koeffizienten der Kästchen $A_{21}^{(j)**}$ nach (50) durch die Koeffizienten von $\bar{A}_j$, $j = \nu_2+h+1, \nu_2+h+2, \dots, \nu_2+r_2$. Die Bedingungen in bezug auf r_1, r_2, t_1, t_2 und t_3 sind bei den Matrizen von (108), (109) und (110) analog wie im Falle $w = 2$, zu genügen.

(C, 4.) Die ersten Zeilen von P_{22} und P_{33} seien von der Gestalt (19), d. h. P sei von der Gestalt

(12) Vgl. den Fall $w = 2$.

$$(113) \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & & & & \\ & \begin{array}{c|c} \alpha_{\nu_1} & \alpha_{\nu_1, \nu_1-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array} & & & \\ & & 0 & & \\ & \begin{array}{c|c|c|c} \alpha_{\nu_2} & \alpha_{\nu_2, \nu_1-1} & \alpha_{\nu_2, \nu_1+1} & \alpha_{\nu_2, \nu_2} \\ \hline P_{21}^* & 0 & & \end{array} & 0 \\ & & & & \\ P_{31} & P_{32} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & P_{33}^* & 0 \end{array} \right).$$

In diesem Falle kann man analog wie im Falle (B) die Ordnungen und Typen von $\mathfrak{P}$ bestimmen.

(C, 4.1) Wenn die Spalten der Matrix

$$(114) \quad \left(\begin{array}{c} \alpha_{\nu_3 \nu_1} \\ \alpha_{\nu_3+1, \nu_1} \\ \vdots \\ \alpha_{r, \nu_1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{P_{33}^*} \end{array} \right)$$

linear abhängig sind, ist $\mathbf{P}$ von der Ordnung

$$p^u \{ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 6 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1^* - 3) \},$$

wobei r_1^* die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von $\mathbf{P}_{21}^*$ bedeutet, und vom Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für } p \geq 3,$$

$$(p^2, \dots, \text{ut-mal}; p, \dots, p),$$

$$0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r - \nu_3 + 1), s_3 - 1) \quad \text{für } p = 2.$$

(C, 4.2) Wenn die Koeffizienten einer Zeile von (114) linear unabhängig sind, hat $\mathfrak{P}$ die Ordnung

$$(115) \quad p^u \{ \nu_2 + \nu_3 - 4 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1^* - 3) \},$$

und den Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für } p \geq 3,$$

$$(p^2, \dots, \text{ut-mal}; p, \dots, p),$$

$$0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r - \nu_3 + 1), s_3) \quad \text{für } p = 2.$$

(C, 4.3) Wenn die Spalten von (114) linear unabhängig sind, während es keine Zeile wie bei (C, 4.2) gibt; so ist $\mathfrak{P}$ der Ordnung

$$p^u \{ \nu_2 + \nu_3 - 5 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 3) \}$$

und vom Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für } p \geq 3,$$

$$(p^2, \dots, \text{ut-mal}; p, \dots, p),$$

$$0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r - \nu_3 + 1), s_3 - 1), \quad \text{für } p = 2.$$

Die Beispiele kann man analog wie bisher erhalten⁽¹³⁾.

Also gilt der

Satz 7: Sei $\mathbf{P}$ die abgeleitete Gruppenmatrix der p zugehörigen Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ einer maximalen Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von den Matrizen der Gestalt (1).

Wenn $\mathbf{P}$ von der Gestalt (63) ist, ist $\mathfrak{P}$ von der Ordnung

$$(68) \quad p^u \{ \nu_3 - 1 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 1) \}$$

und vom Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für } p > 3,$$

$$(p^2, \dots, \text{ut-mal}; p, \dots, p) \quad \text{für } p \leq 3.$$

Für $p = 3$ ist

$$0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r - \nu_3 + 1), s_2), \quad \text{falls } s_1 \neq s_2,$$

$$t = s_2, \quad \text{,, } s_1 = s_2,$$

und für $p = 2$

$$s_2 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r - \nu_3 + 1), r_1^*) + s_2.$$

wobei r_1 und r_1^* die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von (65) bzw. von $\mathbf{P}_{21}^*$ bedeuten.

⁽¹³⁾ Vgl. den Fall $w = 2$.

Wenn $\mathbf{P}$ von der Gestalt (64) ist, so soll r_1 von (68) um 1 größer als die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von (94) sein, und ist der Typus von $\mathfrak{P}$

$$\begin{aligned} (p, \dots, p) & \quad \text{für} \quad p > 3, \\ (p^2, \dots, u\text{-mal}; p, \dots, p) & \quad ,, \quad p = 3, \\ (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p) & \quad ,, \quad p = 2, \\ 1 \leq t \leq \text{Min. } (s_2(r - \nu_3 + 1) + 1, s_3) \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{P}$ der Gestalt von S. 204, so gibt es folgende drei Fälle:

(i) $\mathfrak{P}$ hat die Ordnung

$$p^u \{ \nu_1 + \nu_3 - 3 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 2) \},$$

wobei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von (97) ist, und den Typus

$$\begin{aligned} (p, \dots, p) & \quad \text{für} \quad p \geq 3, \\ (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p) & \quad ,, \quad p = 2. \\ 0 \leq t \leq \text{Min. } ((\nu_2 - 2)(r - \nu_3 + 1), s_3). \end{aligned}$$

(ii) $\mathfrak{P}$ hat die Ordnung

$$p^u \{ \nu_3 - 1 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 2) \},$$

wobei r_1 von derselben Bedeutung wie bei (i) ist, und den Typus

$$\begin{aligned} (p, \dots, p) & \quad \text{für} \quad p \geq 3, \\ (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p) & \quad ,, \quad p = 2. \\ 0 \leq t \leq \text{Min. } ((\nu_2 - 2)(r - \nu_3 + 1), s_3 + 1) \end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{P}$ ist von der Ordnung

$$p^u \{ \nu_3 - 2 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 2) \}$$

und vom Typus

$$\begin{aligned} (p, \dots, p) & \quad \text{für} \quad p \geq 3, \\ (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p) & \quad ,, \quad p = 2. \\ 0 \leq t \leq \text{Min. } ((\nu_2 - 2)(r - \nu_3 + 1), s_3) \quad \text{für} \quad p = 2. \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{P}$ der Gestalt (101), so ist der Ordnung von $\mathfrak{P}$ gleich

$$p^u \{ \nu_2 + l + h + s_1 + s_2 + s_3 - r_0 - 2 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_0 - 2) \},$$

wobei r_0 die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von (102) bedeutet, und $r_1 + r_2 = r_0$, $h \leq s_3$, $r_2 - h \leq s_2$, $l \leq \text{Min. } ((r_2 - h)s_1, s_2)$ sind, und ist der Typus von $\mathfrak{P}$

$$\begin{aligned}
 & (p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p \geq 3, \\
 & (p^2, \dots, u(t_1+t_2+t_3)\text{-mal}; p, \dots, p) \\
 & 0 \leq t_1 \leq \text{Min.} (s_1(r-\nu_3+2), s_2), \quad 0 \leq t_2 \leq \text{Min.} (s_1(r-\nu_3+1), h), \\
 & 0 \leq t_3 \leq \text{Min.} (s_1(r-\nu_3), l) \quad t_1+t_2+t_3 \leq s_1(r-\nu_3+2).
 \end{aligned}$$

Wenn $\mathbf{P}$ endlich von der Gestalt (113) ist, gibt es folgende drei Fälle:

(i) $\mathfrak{P}$ ist von der Ordnung

$$p^u \{ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 6 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 3) \},$$

wobei $\mathbf{P}_{21}^*$ die r_1 linear unabhängigen Zeilen hat, und vom Typus

$$\begin{aligned}
 & (p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p \geq 3 \\
 & (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p), \\
 & 0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r-\nu_3+1), s_3-1) \quad \text{für} \quad p = 2.
 \end{aligned}$$

(ii) Die Ordnung von $\mathfrak{P}$ ist

$$p^u \{ \nu_2 + \nu_3 - 4 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 3) \},$$

und der Typus von $\mathfrak{P}$ ist

$$\begin{aligned}
 & (p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p \leq 3, \\
 & (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p), \\
 & 0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r-\nu_3+1), s_3) \quad \text{für} \quad p = 2.
 \end{aligned}$$

(iii) $\mathfrak{P}$ ist der Ordnung

$$p^u \{ \nu_2 + \nu_3 - 5 + (r - \nu_3)(\nu_3 - r_1 - 3) \}$$

und vom Typus

$$\begin{aligned}
 & (p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p \geq 3; \\
 & (p^2, \dots, ut\text{-mal}; p, \dots, p), \\
 & 0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r-\nu_3+1), s_3-1); \quad \text{für} \quad p = 2.
 \end{aligned}$$

(III) Um nun die Invarianten der Abelschen Gruppen des Satzes 4 zu bestimmen betrachten wir zuerst den Fall, daß $\mathbf{P}$ der Gestalt (36) ist.

Die Ordnung von $\mathfrak{P}$ ist wie im Falle $w = 3$

$$(116) \quad p^u \{ \nu_w - 1 + (r - \nu_w)(s_1 + s_w - s_2 - r_1^*) \},$$

wobei r_1^* die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen des Kästchens $\mathbf{P}_{w-1,1}^*$ ist. Bezeichnet man die Anzahl der verschiedenen Elemente unter den p^λ -ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{P}'$ mit p^{i_λ} , so ist die Anzahl der Basiselemente der Ordnung p^λ bekanntlich gleich

$$(117) \quad (i_{\lambda-1} - i_\lambda) - (i_\lambda - i_{\lambda+1}) = i_{\lambda-1} - 2i_\lambda + i_{\lambda+1}.$$

Jedes Element von $\mathfrak{P}'$ wird durch die Basismatrizen $\bar{A}'_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu_w - 1$; und E' linear dargestellt, und unter den p^λ -ten Potenzen von

$\bar{A}_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu_w - 1$; sind alle von Null verschiedenen Matrizen linear unabhängig⁽¹⁴⁾, denn wäre

so müßte

$$\sum_{j=1}^{\nu_w-1} c_j \bar{A}_j^{p^\lambda} = 0, \quad c_j \in GF(p^u),$$

sein.

$$\sum_{j=1}^{\nu_w-1} p^{\lambda} \sqrt[p]{c_j} \bar{A}_j = 0$$

Bezeichnet man also die Anzahl solcher von Null verschiedenen Potenzen der Basismatrizen mit j_λ , so ist

$$(118) \quad i_\lambda = u j_\lambda.$$

Nach (36) nimmt $\bar{A}'_j$ die Gestalt

$$(119)$$

(14) Seien $\mathfrak{B}'$ und $\bar{A}'_j$ von gleicher Bedeutung wie bei (24) bez. (26).

für

$$s_1 + (w - \kappa - 2)s_2 < j \leq s_1 + (w - \kappa - 1)s_2, \quad \kappa \leq w - 2,$$

und

für

$$s_1 + (w - 1)s_2 < j,$$

und

$$(121) \quad \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 0 \mid 0 \cdots 0 \end{array} \right)$$

für $j \leq \nu_1 - 1$,

folglich werden wie bei (8) von S. 135 die p^λ -ten Potenzen der s_2 Matrizen von (119) sämtlich verschwinden, wenn $(\kappa+1)p^\lambda > w$ ist, und falls $(\kappa+1)p^\lambda = w$ ist, so sind s_1 von ihnen von Null verschieden, und ferner falls $(\kappa+1)p^\lambda < w$ ist, so ist keine von ihnen gleich Null (S. 187).

Sei k_λ eine ganze rationale Zahl, die der Bedingung

$$(k_\lambda + 1)p^\lambda < w \leq (k_\lambda + 2)p^\lambda$$

genügt, so ist

$$(122) \quad j_\lambda = s_2 k_\lambda; \quad \lambda \geq 0 \quad \text{für} \quad p \geq 3, \quad \lambda > 1 \quad \text{für} \quad p = 2,$$

falls $w \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Wenn $w \equiv 0 \pmod{p}$ ist, besteht (122) für $\lambda > \beta$, wobei p^β die höchste Potenz von p , die in w aufgeht, bedeutet, und für $\lambda \leq \beta$ ergibt sich

$$j_\lambda = s_2 k_\lambda + s_1.$$

Die Anzahl der Basiselemente der Ordnung p^λ ($\lambda \geq 1$, für $p > 2$; $\lambda > 2$, für $p = 2$) von $\mathfrak{P}$ stimmt mit derjenigen von $\mathfrak{P}'$ überein falls $w \not\equiv 0 \pmod{p}$, denn als dann aus $\bar{A}_j^{p^\lambda} = 0$ folgt $\bar{A}_j^{p^\lambda} = 0$, und umgekehrt, und ist $w \equiv 0 \pmod{p}$ so soll bei der obigen Gleichung statt, s_1 eine konstante s_1^* , $s_1 \leq s_1^* \leq \text{Min.}(s_2, s_1 r_w)$, brauchen, wobei r_w die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von $\mathbf{P}_{ww}$ ist, also $r_w \leq s_2$.

Falls $p = 2$ ist, gilt

$$\begin{aligned} j_1 &= s_2 k_1 + t & \text{für} & \quad w \not\equiv 0 \pmod{2} \\ j_1 &= s_2 k_1 + s_1 + t' & \text{für} & \quad w \equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

wobei t, t' die Anzahl der Basismatrizen, die man nach Quadrieren von $\bar{A}_j$, $j = s_1 + (w-1)s_2 + 1, \dots, \nu_w - 1$; erhält, bedeuten. Daher müssen wie im Falle $w = 2$

$$0 \leq t \leq \text{Min.}(s_1(r - \nu_w + 1), s_w - s_2), \quad 0 \leq t' \leq \left\{ \text{Min.}(s_1(r - \nu_w + 1), s_w - s_2) \right\} - s_1$$

sein.

Setzt man (117) entsprechend

$$t_\lambda = j_{\lambda-1} - 2j_\lambda + j_{\lambda+1},$$

so erhalten wir folgenden Typus von $\mathfrak{P}$

$$(p^\sigma, \dots, ut_\sigma\text{-mal}; p^{\sigma-1}, \dots, ut_{\sigma-1}\text{-mal}; \dots; p, \dots, p),$$

(123) $p^\sigma \leq w < p^{\sigma+1}.$

Sei $\mathbf{P}$ von der Gestalt (37). $\mathfrak{P}$ ist von der Ordnung

$$p^u \{ \nu_w - 1 + (r - \nu_w + 1)(\nu_w - w - s' - r_1 + 1) \},$$

wobei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Koeffizienten der Spalte

$$(124) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{w-1, 1} \\ \alpha_{w, 1} \\ \vdots \\ \alpha_{w+s'-3, 1} \\ \alpha_{w+2s'-2, 1} \\ \vdots \\ \alpha_{\nu_w-1, 1} \end{pmatrix}$$

ist. Alle Elemente von $\mathfrak{P}'$ werden auch in diesem Falle durch $\nu_w - 1$ Basismatrizen $\bar{A}'_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu_w - 1$; und E' linear dargestellt.

$$(125) \quad (\bar{A}'_{\nu_{w-1}})^{j+1} =$$

$$\left. \begin{array}{c} j+1 \text{ Zeilen} \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{j+1}^{(w-j)} \\ \vdots \\ a_{w-2}^{(w-j)} \quad a_{j+1}^{(w-j)} \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \\ \vdots \\ a_{w+s-2,1}^{(w-j)} \quad a_{w+s-2,w-j-1}^{(w-j)} \quad 0 \quad 0 \\ a_{w+s-1,1}^{(w-j)} \quad a_{w+s-1,w-j-1}^{(w-j)} \quad 0 \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad \vdots \quad \vdots \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad \vdots \quad \vdots \quad 0 \\ a_{w+s-2,1}^{(w-j+1)} \quad a_{w+s-2,w-j}^{(w-j+1)} \quad 0 \quad 0 \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$a_{w+s-2,w-j-1}^{(w-j)} \neq 0,$$

$(\bar{A}'_{\nu_{w-1}})^{w-1} =$

$$(A'_{\nu_{w-1}})^w =$$

Dann können alle anderen Basismatrizen

$$(126) \quad \bar{A}'_w, \bar{A}'_{w+1}, \dots, \bar{A}'_{\nu_{w-1}-1}, \bar{A}'_{\nu_{w-1}+1}, \dots, \bar{A}'_{\nu_{w-1}}$$

o.B.d.A. so angenommen werden, daß sie von der Gestalt

(127)

sind, denn man kann eventuell durch Addition der Matrizen der Gestalt $c_j(\bar{A}'_{\nu_{w-1}})^j$, $c_j \in GF(p^u)$, die ersten $w-1$ Zeilen der Matrizen von (126) verschwinden lassen.

Die Matrizen von (125) stellt eine Gruppe $\mathfrak{P}^*$ der Ordnung p^{uw} dar, deren Typus wie im vorigen Falle

$$(128) \quad (p^0, \dots, ut_p\text{-mal}; p^{0-1}, \dots, ut_{p-1}\text{-mal}; \dots; p, \dots, p),$$

$$p^{0-1} \leq w < p^0, \quad t_\mu = l_{\mu-1} - 2l_\mu + l_{\mu+1}, \quad (l_\mu + 1)p^\mu \leq w < (l_\mu + 2)p^\mu;$$

ist.

Die Matrizen der Gestalt (127) bilden zusammen mit E' auch eine Gruppe $\mathfrak{P}^{**}$, deren Typus

$$(p, \dots, p) \quad \text{für} \quad p > 3.$$

ist, und falls $p = 2$ ist, hat $\mathfrak{P}^{**}$ genau s_{w-1} Basiselemente der Ordnung 2^2 , die zu $\mathfrak{P}^*$ nicht gehören (S. 171), unter Umständen dazu noch ein Basiselement dieser Ordnung; wenn nicht alle von α_{i1} , $i = w-1, w, \dots, w+s'-3$; verschwinden⁽¹⁵⁾.

Im Falle $p = 3$ ist, hat $\mathfrak{P}^{**}$ entweder kein oder nur einziges Basiselement der Ordnung 3^2 , je nachdem $\mathfrak{P}_{\wedge}^* \mathfrak{P}^{**} = E$ ist oder nicht.

Daher ist $\mathfrak{P}$ vom Typus

$$(p^0, \dots, ut_{\rho}\text{-mal}; p^{\rho-1}, \dots, ut_{\rho-1}\text{-mal}; \dots, p^3, \dots, ut_3\text{-mal}; p^2, \dots, u(t_2+t_2^*)\text{-mal}; p, \dots, p),$$

wobei $t_2^* = 0$ für $p > 3$,

$$\begin{aligned} 0 \leq t_2^* \leq \text{Min.}(r - \nu_w, s' - 2) & \quad \text{falls } w \equiv 0 \pmod{3} \\ 1 \leq t_2^* \leq \text{Min.}(r - \nu_w + 1, s' - 1) & \quad \text{falls } w \not\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned} \quad \text{für } p = 3,$$

$$\begin{aligned} s_{w-1} \leq t_2^* \leq s_{w-1} + \text{Min.}(r - \nu_w, r_1^*) & \quad \text{falls } w \equiv 0 \pmod{2} \\ s_{w-1} \leq t_2^* \leq s_{w-1} + \text{Min.}(r - \nu_w + 1, r_1^*) & \quad \text{falls } w \not\equiv 0 \pmod{2} \end{aligned} \quad \text{für } p = 2,$$

falls nicht alle $\alpha_{i1} = 0$, $w-1 \leq i \leq w+s'-3$.

$$\begin{aligned} 0 \leq t_2^* \leq \text{Min.}(s_{w-1}(r - \nu_w + 1), s' + r_2^{**} - 1) - 1 & \quad \text{falls } 2 \mid w \text{ für } p=2, \begin{pmatrix} \alpha_{w-1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{w+s'-3,1} \end{pmatrix} = 0; \\ 0 \leq t_2^* \leq \text{Min.}(s_{w-1}(r - \nu_w + 1), s' + r_2^{**} - 1) & \quad \text{falls } 2 \nmid w \text{ für } p=2, \begin{pmatrix} \alpha_{w-1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{w+s'-3,1} \end{pmatrix} = 0; \end{aligned}$$

wobei r_2^{**} die Anzahl der linear unabhängigen Koeffizienten unter α_{i1} , $w+2s'-2 \leq i \leq \nu_w-1$, ist.

Es gilt also

Satz 8. Sei $\mathfrak{P}$ die p zugehörige Sylowgruppe einer maximalen Abelschen Substitutionsgruppe $\mathfrak{S}$ von den Matrizen (1). Wenn die abgeleitete Gruppenmatrix $\mathbf{P}$ von $\mathfrak{P}$ von der Gestalt (36) ist, wobei $\mathbf{P}_1$ ein Galois-Feld $GF(p^{u_{32}})$ darstellt, und die Koeffizienten der ersten Zeilen von $\mathbf{P}_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, w$; linear unabhängig sind, dann ist $\mathfrak{P}$ von der Ordnung

$$(129) \quad p^u \{ \nu_w^{-1} + (r - \nu_w)(s_1 + s_w - s_2 - r_1^*) \},$$

falls r_1^* die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von $\mathbf{P}_{w-1,1}^*$ bedeutet.

Der Typus von $\mathfrak{S}$ ist

$$(p^u - 1; p^{\sigma}, \dots, ut_{\sigma}\text{-mal}; p^{\sigma-1}, \dots, ut_{\sigma-1}\text{-mal}; \dots; p, \dots, p)$$

$$p^{\sigma} \leq w < p^{\sigma+1}, \quad t_{\lambda} = j_{\lambda-1} - 2j_{\lambda} + j_{\lambda+1}$$

(15) In diesem Falle ist $s' = s_{w-1}$; und sind α_{i1} , $w-1 \leq i \leq w+s'-3$, alle gleich Null, so vgl. den Fall $w = 2$.

$$j_\lambda = \begin{cases} s_2 k_\lambda & (\lambda \geq 0 \quad \text{für } p \geq 3, \quad \lambda > 1 \quad \text{für } p = 2; p \nmid w) \\ s_2 k_\lambda & (\lambda > \beta, \quad p^\beta \parallel w, \quad \beta \geq 1) \\ s_2 k_\lambda + s_1^* & (p \mid w; \quad \beta \geq \lambda \geq 0 \quad \text{für } p \geq 3, \quad \beta \geq \lambda > 1 \quad \text{für } p = 2) \\ s_2 k_\lambda + s_1 & (p \nmid w; \quad \beta \geq \lambda \geq 0 \quad \text{für } p \geq 3, \quad \beta \geq \lambda > 1 \quad \text{für } p = 2) \end{cases}$$

$$j_1 = \begin{cases} s_2 k_1 + t & (p = 2, \quad 2 \nmid w) \quad 0 \leq t \leq \text{Min.} (s_1(r - \nu_w + 1), s_w - s_2) \\ s_2 k_1 + s_1 + t' & (p = 2, \quad 2 \nmid w) \quad 0 \leq t' \leq \left\{ \text{Min.} (s_1(r - \nu_w + 1), s_w - s_2) \right\} - s_1 \end{cases}$$

wobei s_1^* eine Konstante $\geq s_1$ und $\leq \text{Min.} (s_2, s_1 r_w)$ ist.

Wenn $\mathbf{P}$ von der Gestalt (37), so ist $\mathfrak{P}$ der Ordnung

$$p^u \{ \nu_w^{-1} + (r - \nu_w + 1)(\nu_w - w - s' - r_1 + 1) \}$$

wobei r_1 die Anzahl der linear unabhängigen Koeffizienten der Spalte (124) bedeutet, und $\mathfrak{S}$ ist vom Typus

$$(p^u - 1; p^0, \dots, ut_p\text{-mal}; p^{p-1}, \dots, ut_{p-1}\text{-mal}; \dots; \\ p^3, \dots, ut_3\text{-mal}; p^2, \dots, u(t_2 + t_2^*)\text{-mal}; p, \dots, p)$$

$$p^{p-1} \leq w < p^p, \quad t_\mu = l_{\mu-1} - 2l_\mu + l_{\mu+1}, \quad (l_\mu + 1)p^\mu \leq w < (l_\mu + 2)p^\mu.$$

$$t_2^* = 0 \quad \text{für } p > 3;$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t_2^* \leq \text{Min.} (r - \nu_w, s' - 2) & \quad \text{falls } 3 \mid w \\ 1 \leq t_2^* \leq \text{Min.} (r - \nu_w + 1, s' - 1) & \quad \text{falls } 3 \nmid w \end{aligned} \quad \text{für } p = 3,$$

$$\begin{aligned} s_{w-1} \leq t_2^* \leq s_{w-1} + \text{Min.} (r - \nu_w, r_1^{**}) & \quad \text{falls } 2 \mid w \\ s_{w-1} \leq t_2^* \leq s_{w-1} + \text{Min.} (r - \nu_w + 1, r_1^{**}) & \quad \text{falls } 2 \nmid w \end{aligned} \quad \text{für } p = 2, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{w-1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{w+s'-3,1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{aligned} 0 \leq t_2^* \leq \text{Min.} (s_{w-1}(r - \nu_w + 1), s' + r_2^{**} - 1) - 1 & \quad \text{falls } 2 \mid w \\ 0 \leq t_2^* \leq \text{Min.} (s_{w-1}(r - \nu_w + 1), s' + r_2^{**} - 1) & \quad \text{falls } 2 \nmid w \end{aligned} \quad \text{für } p = 2, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{w-1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{w+s'-3,1} \end{pmatrix} = 0;$$

wobei r_2^{**} die Anzahl der linear unabhängigen Koeffizienten unter α_{j1} , $w + 2s' - 2 \leq j \leq \nu_w - 1$, ist.

Beispiele für Gruppen dieses Satzes kann man analog wie Beispiel 1 von S. 187 erhalten.