19. Über die Matrizengleichung $\exp X=A$

Von Keizô ASANO.

(Eingegangen am 8. Juni, 1936.)

Es sei K der Körper aller komplexen Zahlen. Wir betrachten die Matrizen mit den Elementen aus K . Im Körper K lässt sich jede reguläre Matrix A , d.h. jede Matrix mit von Null verschiedenen Determinante, als die exponentiale Funktion einer Matrix darstellen⁽¹⁾. In der vorliegenden Note werden wir zunächst die Matrizengleichung $\mathfrak{P}(X)=A$ betrachten. Dabei bedeutet $\mathfrak{P}(x)=\sum_0^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe. Dann werden wir weiter eingehend die Matrizengleichung $\exp X=A$ untersuchen. Es handelt sich in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen um die Darstellung $A=\exp X$ im Körper aller reellen Zahlen. Wir erhalten eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine reelle Matrix A sich als die exponentiale Funktion einer reellen Matrix darstellen lässt.

§ 1.

In diesem Paragraphen betrachten wir die Matrizen im Körper aller komplexen Zahlen. Der Vollständigkeit halber entwickeln wir zunächst die Theorie über die Matrizengleichung $\mathfrak{P}(X)=A$, obwohl es zum Teil Bekanntes ist.

Satz 1. *Es sei A eine Matrix n -ten Grades und $\mathfrak{P}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe. Wenn es für jeden Eigenwert λ von A im Inneren des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(x)$ eine Zahl ω mit $\mathfrak{P}(\omega)=\lambda$, $\mathfrak{P}'(\omega)\neq 0$ gibt, so besitzt $\mathfrak{P}(X)=A$ eine Lösung und zwar eine als Polynom von A darstellbare Lösung.*

Beweis. A hat bekanntlich eine Normalform derart, dass

$$A^*=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & A_t \end{pmatrix}, \quad A_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ \varepsilon_1 & \lambda_i & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \varepsilon_{\rho_i-1} & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i=1, \dots, t),$$

wo $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\rho_i-1}$ 0 oder 1 bedeuten und $\lambda_i \neq \lambda_j$ ist. Da die Gültigkeit des Satzes 1 bei der ähnlichen Transformation erhalten bleibt, so kann man

(¹) K. Schröder, Einige Sätze aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen, Dissertation Berlin (1934). Vgl. auch Wedderburn, Lectures on matrices, American math. soc. colloquim publications. 17 (1934).

annehmen, dass A schon diese Normalform ist. Nach Voraussetzung sei ω_i eine Zahl mit $\mathfrak{P}(\omega_i) = \lambda_i$, $\mathfrak{P}'(\omega_i) \neq 0$. Dann gibt es eine in einer Umgebung von λ_i definierte Potenzreihe $\mathfrak{P}^{-1}(x) = \omega_i + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x - \lambda_i)^n$ mit $x \equiv \mathfrak{P}(\mathfrak{P}^{-1}(x))$. Die Matrix $U_i = \mathfrak{P}^{-1}(A_i)$ ist ein Polynom $P_i(A_i)$ von A_i , weil $A_i - \lambda_i E_{p_i}$ nilpotent ist. Es gilt ersichtlich $A_i = \mathfrak{P}(U_i)$. Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_t \end{pmatrix}$$

ist also eine Lösung von $\mathfrak{P}(X) = A$. U ist ein Polynom von A . Dann es gibt wegen $\omega_i \neq \omega_j$ ein Polynom $F(x)$ derart, dass

$$F(x) \equiv P_i(x) \pmod{(x - \omega_i)^{p_i}},$$

und daher ist $F(A_i) = P_i(A_i) = U_i$, d.h. $U = F(A)$.

Dieser Satz lässt sich folgendermassen verschärfen.

Satz 2. Es sei $f(x) = \prod_{i=1}^t (x - \lambda_i)^{v_i}$ das Minimalpolynom der Matrix A .

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathfrak{P}(X) = A$ eine als Polynom von A darstellbare Lösung besitzt, ist, dass es für jedes λ_i eine Zahl ω_i gibt derart, dass $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}'(x)$, ..., $\mathfrak{P}^{(v_i-1)}(x)$ für $x = \omega_i$ konvergent sind und $\mathfrak{P}(\omega_i) = \lambda_i$, $\mathfrak{P}'(\omega_i) \neq 0$ falls $v_i > 1$, wird.⁽²⁾

Beweis. Zum Beweis genügt es nach dem Beweis des Satzes 1 zu zeigen für die Matrix A der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ \varepsilon_1 & \lambda & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \varepsilon_{p-1} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + S \quad (\varepsilon_r = 0 \text{ oder } 1).$$

Das Minimalpolynom von A ist $(x - \lambda)^p$. Im Falle $S = 0$, d.h. $p = 1$, ist alles klar. Es sei also $S \neq 0$. Das Polynom von A hat die Gestalt

$$\varphi(S) = c_0 E + c_1 S + \dots + c_{p-1} S^{p-1} = \omega E + T \quad (\omega = c_0),$$

wo $S^0 = 0$, $S^{p-1} \neq 0$ ist. Dafür, dass die Gleichung

$$\mathfrak{P}(\omega E + T) = \mathfrak{P}(\omega) E + \mathfrak{P}'(\omega) T + \dots + \frac{\mathfrak{P}^{(p-1)}(\omega)}{(p-1)!} T^{p-1} = \lambda E + S$$

besteht, d.h. $\mathfrak{P}(X) = A$ eine als Polynom von A darstellbare Lösung besitzt, müssen $\mathfrak{P}(\omega)$, $\mathfrak{P}'(\omega)$, ..., $\mathfrak{P}^{(p-1)}(\omega)$ konvergieren und $\mathfrak{P}(\omega) = \lambda$, $\mathfrak{P}'(\omega) \neq 0$ sein. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so kann man sukzessiv $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}$

(²) P. Franklin, Algebraic matrix equations, Journal of math. and physics, Massachusetts Institute of Technology, 10 (1932). Vgl. auch E. Browne, On the matrix equations $P(X) = A$ and $P(A, X) = 0$, Bulletin of the American math. soc. 16, 10 (1935).

eindeutig bestimmen. $c_0=\omega$, $c_1=\frac{1}{\mathfrak{P}'(\omega)}$, $c_2=-\frac{\mathfrak{P}''(\omega)}{2\mathfrak{P}'(\omega)^2}$ u.s.w.

In diesem Fall ist das Minimalpolynom von $\varphi(S)$ gleich $(x-\omega)^v$. Also im allgemeinen Fall ist das Minimalpolynom einer als Polynom von A darstellbaren Lösung gleich $\prod_{i=1}^t (x-\omega_i)^{v_i}$. Es besitzt denselben Grad wie dem von A . Es gilt aber der folgende

Satz 3. Jede Lösung W von $\mathfrak{P}(X)=A$ ist dann und nur dann ein Polynom von A , wenn der Grad des Minimalpolynoms von W gleich dem von A ist.

Hilfssatz. Es sei $A=\mathfrak{P}(U)$. Sind die Elementarteiler von $xE-U$ gleich $(x-\omega_1)^{v_1}, \dots, (x-\omega_m)^{v_m}$, so sind die Elementarteiler von $xE-A$ dann und nur dann gleich $(x-\mathfrak{P}(\omega_1))^{v_1}, \dots, (x-\mathfrak{P}(\omega_m))^{v_m}$, wenn $\mathfrak{P}'(\omega_i) \neq 0$ für $v_i > 1$ ist.

Beweis. U^* sei die Normalform derart, dass

$$U^* = P^{-1}UP = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_m \end{pmatrix}, \quad U_i = \begin{pmatrix} \overbrace{\omega_i}^{v_i} & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \omega_i \end{pmatrix}$$

Es ist

$$A^* = \mathfrak{P}(U^*) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(U_1) & & 0 \\ & \mathfrak{P}(U_2) & \\ 0 & & \mathfrak{P}(U_m) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{P}(U_i) = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(\omega_i) & & 0 \\ \mathfrak{P}'(\omega_i) & \ddots & \\ \frac{\mathfrak{P}^{(v_i-1)}(\omega_i)}{(v_i-1)!} \dots \mathfrak{P}'(\omega_i) & \mathfrak{P}(\omega_i) \end{pmatrix}.$$

Die Elementarteiler von $xE_{v_i} - \mathfrak{P}(U_i)$ sind dann und nur dann gleich $(x-\mathfrak{P}(\omega_i))^{v_i}, 1, \dots, 1$, wenn $\mathfrak{P}'(\omega_i) \neq 0$ ist. Denn $\text{Det.}(xE_{v_i} - \mathfrak{P}(U_i))$ ist gleich $(x-\mathfrak{P}(\omega_i))^{v_i}$ und der g. g. T. aller (v_i-1) -ten Unterdeterminanten von $xE_{v_i} - \mathfrak{P}(U_i)$ ist dann und nur dann gleich 1, wenn $\mathfrak{P}'(\omega_i) \neq 0$ ist. Dann sind die Elementarteiler von $xE - A^*$, d.h. die von $xE - A$, gleich $(x-\mathfrak{P}(\omega_1))^{v_1}, \dots, (x-\mathfrak{P}(\omega_m))^{v_m}$.

Beweis des Satzes 3. Der Grad des Minimalpolynoms $f(x) = \prod_{i=1}^t (x-\omega_i)^{v_i}$ von W sei gleich dem von A . Wir beweisen, dass W ein Polynom von A ist. Es seien

$$(x-\omega_i)^{v_{ij}} (i=1, \dots, t; j=1, \dots, l_i, v_i = \text{Max } v_{ij})$$

die Elementarteiler von $xE - W$. Dann müssen die Elementarteiler von $xE - A$ von der Gestalt

$$(x-\lambda_i)^{v_{ij}} (\lambda_i = \mathfrak{P}(\omega_i), \lambda_i \neq \lambda_j) \quad (i=1, \dots, t; j=1, \dots, l_i)$$

sein, denn sonst wäre der Grad des Minimalpolynoms von A nach dem Beweis des Hilfssatzes kleiner als der von W . Es ist also nach dem Hilfssatz $\mathfrak{P}'(\omega_i) \neq 0$ für $\nu_i > 1$. Nach dem Satz 2 besitzt $\mathfrak{P}(X) = A$ eine als Polynom von A darstellbare Lösung $U = F(A)$ mit den Eigenwerten ω_i . Die Elementarteiler von $xE - U$ müssen nach dem Hilfssatz gleich $(x - \omega_i)^{\nu_i}$ sein. Weil die Elementarteiler von $xE - W$ mit den von $xE - U$ übereinstimmen, so ist die Matrix W der Matrix U ähnlich, d.h. es gibt eine Matrix P mit $W = P^{-1}UP$. Es ist aber

$$A = \mathfrak{P}(W) = P^{-1}\mathfrak{P}(U)P = P^{-1}AP,$$

d.h. P ist mit A vertauschbar. Also ist P mit $U = F(A)$ vertauschbar. Damit ist der Satz bewiesen.

Als ein Spezialfall gilt, dass jede reguläre Matrix im Körper aller komplexen Zahlen sich als die exponentiale Funktion einer Matrix darstellen lässt. Für die Existenz einer Lösung der Matrixengleichung $\exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = A$ ist es notwendig und hinreichend, dass jeder Eigenwert von A von Null verschieden ist, d.h. $\text{Det. } A \neq 0$ ist. Eine Lösung X dieser Gleichung heisst ein Logarithmus von A . Wir wollen jetzt alle Logarithmen von A aufsuchen. Es seien $(x - \lambda_i)^{\rho_i}$ ($i = 1, \dots, m$) die Elementarteiler von $xE - A$. Ein beliebiges X muss einer Matrix U ähnlich sein:

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_m \end{pmatrix}, \quad U_i = \begin{pmatrix} \overbrace{\omega_i}^{\rho_i} & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 & \omega_i \end{pmatrix} \quad (\omega_i = \log \lambda_i).$$

Dann die Elementarteiler von $xE - X$ müssen nach dem Hilfssatz die Gestalt $(x - \omega_i)^{\rho_i}$ mit $\lambda_i = e^{\omega_i}$ besitzen. Wir bezeichnen im folgenden diese zerfallende Matrix U mit $[U_1, \dots, U_m]$ und die Matrix

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\rho}$$

mit F_{ρ} . Es ist

$$A^* = \exp U = [\exp U_1, \dots, \exp U_m], \quad \exp U_i = \lambda_i \exp F_{\rho_i}.$$

A^* hängt also nicht von ω_i ab und sie ist zu A ähnlich. Es ist $X = P^{-1}UP$, $A = \exp X = P^{-1}A^*P$. Wenn umgekehrt U eine beliebige oben genannte Matrix und P eine beliebige Matrix mit $P^{-1}A^*P = A$ bedeutet, so ist $P^{-1}UP$ ersichtlich eine Lösung. Die Matrix P nimmt die Gestalt P_0Q an, wo Q

eine beliebige mit A vertauschbare Matrix und P_0 eine feste Matrix mit $P_0^{-1}A^*P_0=A$.

Satz 4. *Es seien A eine beliebige reguläre Matrix und $(x-\lambda_i)^{p_i}$ ($i=1, \dots, m$) die Elementarteiler von $xE-A$. Setzt man*

$$A^*=[A_1, \dots, A_m], \quad A_i=\lambda_i \exp F_{\rho_i}, \\ U=[U_1, \dots, U_m], \quad U_i=\omega_i E_{\rho_i} + F_{\rho_i} \quad (\omega_i=\log \lambda_i)$$

mit beliebigem Wert von $\log \lambda_i$, so erhält man alle Logarithmen X von A durch $A=Q^{-1}P_0^{-1}UP_0Q$. Dabei bedeutet Q eine beliebige mit A vertauschbare Matrix und P_0 eine feste Matrix mit $P_0^{-1}A^*P_0=A$.

Es braucht nicht $\omega_i=\omega_j$ zu sein im Falle $\lambda_i=\lambda_j$. Wenn man aber verlangt für gleiches λ_i gleiches ω_i anzunehmen, so ist $P_0^{-1}UP_0$ nach Satz 2 ein Polynom von A und Q tritt nicht mehr auf. Es gilt der folgende

Satz 5. *Wenn man ω_i so wählt, dass $\omega_i=\omega_j$ wird, falls $\lambda_i=\lambda_j$ ist, so gibt es nur eine Lösung $X=P_0^{-1}UP_0$ mit den Eigenwerten ω_i , und sie ist ein Polynom von A . Insbesondere ist die Darstellung $A=\exp X$ eindeutig, wenn man festsetzt, dass jeder Eigenwert ω_i von X den geeignet normierten Wert nehmen soll (etwa der Imaginärteil $\Im(\omega_i)$ von ω_i $-\pi < \Im(\omega_i) \leq \pi$ werden soll).*

§ 2.

In diesem Paragraphen untersuchen wir über die Darstellung $A=\exp X$ im Körper aller reellen Zahlen.

Satz 6. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass im Körper aller reellen Zahlen eine Matrix A sich als die exponentiale Funktion einer Matrix darstellen lässt, ist, dass $\text{Det.} A \neq 0$ ist und jeder Elementarteiler $(x-\lambda)^p$ mit reell negativem λ von $xE-A$ gerademal auftritt, falls negativer Eigenwert von A existiert.*

Beweis. Dass diese Bedingung notwendig ist, folgt aus dem Hilfssatz von § 1, da die Elementarteiler einer reellen Matrix, falls sie imaginär sind, aus Paaren der konjugiertimaginären Faktoren bestehen und kein Elementarteiler mit reellem Eigenwert bei der Exponentierung den Elementarteiler mit negativem Eigenwert liefert. Wir beweisen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Sei jetzt diese Bedingung erfüllt. Dann haben die Elementarteiler von $xE-A$ die Gestalt

$$(x-\lambda_r)^{p_r}, (x-\lambda_s)^{p_s}, (x-\bar{\lambda}_s)^{p_s} \quad (r=1, \dots, m_1, s=m_1+1, \dots, m_1+m_2)$$

wo λ_r reell positiv und $\lambda_s, \bar{\lambda}_s$ konjugiertimaginär sind. (Der Fall $\lambda_s=\bar{\lambda}_s$ sei eingeschlossen. Wir nehmen also an, dass $(x-\lambda_r)^{p_r}$ alle verschieden sind.) Wir setzen mit reellem $\omega_r=\log \lambda_r$ und beliebigem $\omega_s=\log \lambda_s$

$$V=[V_1, \dots, V_{m_1+m_2}], V_r=\omega_r E_{\rho_r} + F_{\rho_r}, V_s=[\omega_s E_{\rho_s} + F_{\rho_s}, \bar{\omega}_s E_{\rho_s} + F_{\rho_s}],$$

wo $\bar{\omega}_s$ zu ω_s konjugiertimaginär ist. Die Matrix $B=\exp V$ ist zu A ähnlich. Es ist

$$B=[B_1, \dots, B_{m_1+m_2}], B_r=\lambda_r \exp F_{\rho_r}, B_s=[\lambda_s \exp F_{\rho_s}, \bar{\lambda}_s \exp F_{\rho_s}].$$

Die Matrizen V, B lassen sich durch eine ähnliche Transformation auf reelle Matrizen bringen. Es ist in der Tat, wenn man λ_s, ω_s in Real- und Imaginärteil zerlegt und $\lambda_s=\alpha_s+\beta_s i$, $\omega_s=a_s+b_s i$ setzt,

$$U_s=T_s V_s T_s^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_s E_{\rho_s} + F_{\rho_s} & b_s E_{\rho_s} \\ -b_s E_{\rho_s} & \alpha_s E_{\rho_s} + F_{\rho_s} \end{pmatrix}, A_s=T_s B_s T_s^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_s \exp F_{\rho_s} & \beta_s \exp F_{\rho_s} \\ -\beta_s \exp F_{\rho_s} & \alpha_s \exp F_{\rho_s} \end{pmatrix}$$

mit
$$T_s=\begin{pmatrix} E_{\rho_s} & iE_{\rho_s} \\ iE_{\rho_s} & E_{\rho_s} \end{pmatrix}.$$

Setzt man $T=[E_{\rho}, T_{m_1+1}, \dots, T_{m_1+m_2}]$ mit Einheitsmatrix E_{ρ} vom Grade $\rho=\sum_r \rho_r$, so ist

$$U=TVT^{-1}=[U_1, \dots, U_{m_1+m_2}] \quad (U_r=V_r),$$

$$A^*=TBT^{-1}=\exp U=[A_1, \dots, A_{m_1+m_2}] \quad (A_r=B_r).$$

A^* hängt also nicht von ω_s ab. Weil die Matrizen A^*, A beide reell und einander ähnlich sind, so gibt es eine reelle Matrix P mit $A=P^{-1}A^*P=\exp P^{-1}UP$.

Wie im Satz 4 sieht man leicht, dass der folgende Satz gilt:

Satz 7. *A sei eine reelle Matrix, die der Bedingung des Satzes 6 genügt, d.h. die Elementarteiler von $xE-A$ bestehen aus den einander verschiedenen $(x-\lambda_r)^{\rho_r}$ mit $\lambda_r>0$ und Paaren der konjugiertkomplexen $(x-\lambda_s)^{\rho_s}$, $(x-\bar{\lambda}_s)^{\rho_s}$. Es sei $\pi_r=\log \lambda_r$ reell und $\omega_s=\log \lambda_s=a_s+b_s i$ beliebig und es werde gesetzt*

$$U=[U_1, \dots, U_{m_1+m_2}], U_r=\omega_r E_{\rho_r} + F_{\rho_r}, U_s=\begin{pmatrix} a_s E_{\rho_s} + F_{\rho_s} & b_s E_{\rho_s} \\ -b_s E_{\rho_s} & a_s E_{\rho_s} + F_{\rho_s} \end{pmatrix},$$

$$A^*=[A_1, \dots, A_{m_1+m_2}], A_r=\lambda_r \exp F_{\rho_r}, A_s=\begin{pmatrix} \alpha_s \exp F_{\rho_s} & \beta_s \exp F_{\rho_s} \\ -\beta_s \exp F_{\rho_s} & \alpha_s \exp F_{\rho_s} \end{pmatrix} \quad (\lambda_s=\alpha_s+\beta_s i).$$

Dann erhält man alle reellen Logarithmen X von A durch $X=Q^{-1}P_0^{-1}UP_0Q$. Dabei bedeutet Q eine beliebige reelle mit A vertauschbare Matrix und P_0 eine feste reelle Matrix mit $P_0^{-1}A^*P_0=A$.

Aus Satz 5 folgt unmittelbar der

Satz 8. *Dann und nur dann, wenn eine reelle Matrix A keinen negativen Eigenwert besitzt, ist der Logarithmus mit denjenigen Eigenwerten, deren Imaginärteile absolut genommen nicht grösser als π sind, reell und eindeutig bestimmt. Er ist sogar ein Polynom von A . Ist A ins-*

besondere eine reelle Matrix mit positiven Eigenwerten, so gibt es nur einen Logarithmus von A mit reellen Eigenwerten. Er ist reell und ein Polynom von A .

Man kann auch ohne Mühe beweisen.

Satz 9. *Dafür, dass im Körper aller reellen Zahlen die Darstellung $A=\exp X$ eindeutig ist, ist es notwendig und hinreichend, dass die Eigenwerte von A alle positiv und die Elementarteiler von $xE-A$ alle verschieden sind.*

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass im Körper aller reellen Zahlen die Matrixgleichung $\exp X=A$ eine Lösung besitzt, ist nach M. Nagumo⁽³⁾, dass es eine A enthaltende, zusammenhängende, multiplikative abelsche Gruppe gibt. Es gilt also nach Satz 8 der folgende

Satz 10. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es im vollständigen Matrizenring im Körper aller reellen Zahlen eine reguläre Matrix A enthaltende, zusammenhängende, multiplikative abelsche Gruppe gibt, ist, dass jeder Elementarteiler $(x-\lambda)^p$ mit negativem λ von $xE-A$ gerademal auftritt.*

Es sei nun A eine reelle orthogonale Matrix vom Grade n mit der Determinante 1. A lässt sich bekanntlich⁽⁴⁾ durch eine orthogonale Matrix P_0 auf die zerfallende Form

$$P_0 A P_0^{-1} = [(1), A_1, \dots, A_m] \quad \left(m = \left[\frac{n}{2} \right] \right)$$

bringen mit

$$A_\nu = \begin{pmatrix} \cos \theta_\nu & \sin \theta_\nu \\ -\sin \theta_\nu & \cos \theta_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_\nu} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (\nu=1, \dots, m).$$

Die 1 am Anfang tritt nur für ungerades n auf. Die Matrix $P_0^{-1} A P_0$ ist gerade die Matrix A^* im Satz 7. Nach dem Satz 7 erhält man also alle reellen Logarithmen von A durch $X = Q^{-1} P_0^{-1} U P_0 Q$

$$U = [(0), U_1, \dots, U_m], \quad U_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \theta_\nu \\ -\theta_\nu & 0 \end{pmatrix},$$

wobei Q eine beliebige reelle mit A vertauschbare Matrix bedeutet und $\theta_\nu \bmod 2\pi$ bestimmt ist. (Die 0 am Anfang tritt für ungerades n auf.) Ist Q ausserdem orthogonal, so ist X schiefsymmetrisch. Ist umgekehrt X schiefsymmetrisch, so kann man Q durch eine reell-orthogonale Matrix P ersetzen. Denn alsdann sind beide Matrizen $X = Q^{-1} W Q$ und $W = P_0^{-1} U P_0$ schiefsymmetrisch, also gilt $X = Q' W Q'^{-1}$. Da $Q Q'$ reell symmetrisch und

(³) Er hat diesen Satz allgemein für gewissen metrisierten Ring bewiesen. Vgl. M. Nagumo, Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Jap. Journ. of Math. 13 (1936).

(⁴) Muth. Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig (1899). Vgl. auch Bieberbach, Math. Ann. 70 (1911).

positiv definit ist, kann man QQ' durch eine orthogonale Matrix S auf die Diagonalform $SQQ'S'=[\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2]$ mit $\alpha_i > 0$ bringen. Dann ist die Matrix

$$P=S'[\alpha_1, \dots, \alpha_n]SQ'^{-1}=\sqrt{Q}Q'Q'^{-1}$$

eine reelle orthogonale Matrix mit $X=P^{-1}WP^{(5)}$. Alle reell-schiefsymmetrischen Logarithmen von A werden durch $P^{-1}P_0^{-1}UP_0P$ gegeben, wo P eine beliebige reell-orthogonale mit A vertauschbare Matrix ist.

Satz 11. *Es sei A eine beliebige reelle orthogonale Matrix n -ten Grades der Determinante 1 und P_0 eine reelle orthogonale Matrix mit*

$$A^*=P_0AP_0^{-1}=[(1), A_1, \dots, A_m] \left(m=\left[\frac{n}{2}\right] \right), A_\nu=\begin{pmatrix} \cos \varphi_\nu & \sin \varphi_\nu \\ -\sin \varphi_\nu & \cos \varphi_\nu \end{pmatrix} (-\pi < \varphi_\nu \leq \pi).$$

Dann erhält man alle reell-schiefsymmetrischen Logarithmen X von A durch

$$X=P^{-1}P_0^{-1}[(0), U_1, \dots, U_m]P_0P, U_\nu=\begin{pmatrix} 0 & \theta_\nu \\ -\theta_\nu & 0 \end{pmatrix} (\theta_\nu=\varphi_\nu+2\kappa_\nu\pi),$$

wobei P eine beliebige reell-orthogonale mit A vertauschbare Matrix bedeutet⁽⁶⁾.

Wenn man jeden Eigenwert ω von A auf $|\omega| \leq \pi$ beschränkt, so erhält man ohne Weiteres

Satz 12. *Derjenige Logarithmus von A , dessen Eigenwerte absolut genommen nicht grösser als π sind, ist dann und nur dann eindeutig bestimmt, wenn A den Eigenwert -1 nicht besitzt. Er ist dann reell-schiefsymmetrisch und ein Polynom von A . Tritt der Eigenwert -1 2μ -mal auf und ist $A_\nu=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ($\nu=m-\mu, m-\mu+1, \dots, m$), so wird solcher schiefsymmetrischer Logarithmus durch*

$$P_0^{-1}[E_{n-2\mu}, Q^{-1}][(0), U_1, \dots, U_m][E_{n-2\mu}, Q]P_0 \quad (|\theta_\nu| \leq \pi)$$

mit beliebiger orthogonaler Matrix Q vom Grade 2μ gegeben.

Mathematisches Institut
Kaiserliche Universität zu Osaka.

(⁵) Frobenius, Über die kogredienten Transformationen der bilinearer Formen, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. (1896).

(⁶) Dieser Satz befindet sich in der in 1) zitierten Arbeit von K. Schröder. Dort gibt es aber einen Fehler. Es muss wie oben berichtigt werden.