6. *Einige analytische Untersuchungen in linearen, metrischen Ringen.*

Von Mitio NAGUMO

(Eingegangen am 18. März, 1936)

Die Menge $\mathfrak{R}$ aller stetigen, linearen Transformationen in einem linearen, metrischen Raum bildet einen *linearen Ring*. D.h., in $\mathfrak{R}$ sind die Multiplikation mit reellen oder komplexen Zahlen, die Summe und das Produkt⁽¹⁾ zweier linearen Transformationen definiert, die auch $\mathfrak{R}$ gehören, wobei übliche Gesetze von Multiplikation, Summe und Produkt richtig bleiben. Das kommutative Gesetz des Produktes gilt aber nicht immer.

In $\mathfrak{R}$ führen wir die Metrik ein um analytische Behandlungen in $\mathfrak{R}$ zu ermöglichen. In $\mathfrak{R}$ kann man also z.B. Potenzreihe und Infinitesimalrechnung definieren.

Das Gewicht in dieser Untersuchung ist nur auf die analytische Seite gelegt. Algebraische Theorien des Ringes, z.B. Idealtheorie, tritt hier nicht auf.

In § 1. werden Definition und Beispiele der linearen, metrischen Ringe gegeben.

In § 2. werden einige vorbereitende Untersuchungen über Zusammenhängende Gruppen (in bezug auf dem Produkt) in linearen Unterringen gegeben.

In § 3. wird etwas über die Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion (durch eine Potenzreihe definiert) erörtert. Dieses Problem kann man auch so formulieren: Kann eine lineare Transformation durch eine infinitesimale Transformation erzeugt werden?

In § 4. werden Definitionen und einige Sätze über Infinitesimalrechnung in $\mathfrak{R}$ von Funktionen von einem reellen Argumente gegeben. Die da Gegebenen sind meistens nur Analogien von der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung. § 4. ist eine Vorbereitung für § 5.

In § 5. wird die Funktionalgleichung $A(s+t) = A(s)A(t)$ behandelt als eine Anwendung von § 4.

In § 6. werden Definitionen und Sätze über reguläre Funktionen eines komplexen unabhängigen Argumentes gegeben, die alle nur Analogien der gewöhnlichen regulären Funktionen sind. § 6. ist eine Vorbereitung für § 7.

(1) Das Produkt zweier Transformationen bedeutet die Zusammensetzung zweier nach einander ausgeführten Transformationen.

In § 7. wird etwas über die Konstruktion der Resolventen der Integralgleichungen vom Standpunkte vorliegender Untersuchungen aus erörtert.

§ 1 Definitionen und Beispiele.

Eine Menge $\mathfrak{R}$ der Elemente heisst ein *linearer, metrischer Ring*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind. (In dieser Arbeit werden Elemente von $\mathfrak{R}$ mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet, während reelle oder komplexe Zahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden).

(i) In $\mathfrak{R}$ sind Summe und Produkt zweier Elemente und Multiplikation eines Elementes mit einer reellen (komplexen) Zahl eindeutig definiert. D. h.,

Wenn $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}$, dann $A_1 + A_2 \in \mathfrak{R}$ und $A_1 A_2 \in \mathfrak{R}$.

Wenn $A \in \mathfrak{R}$ und a eine reelle (komplexe) Zahl ist, so ist $aA = Aa \in \mathfrak{R}$.

(ii) $\mathfrak{R}$ ist eine kommutative Gruppe in bezug auf die Addition $A + B$. (Das Einheitsselement der Gruppe wird das Nullelement von $\mathfrak{R}$ genannt und durch 0 bezeichnet.)

(iii) $(AB)C = A(BC)$. $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.

(iv) $(a+b)A = aA + bA$, $(ab)A = a(bA)$,

$a(A+B) = aA + aB$, $(aA)(bB) = (ab)(AB)$, $1A = A$.

(v) Jedem $A \in \mathfrak{R}$ wird eine nicht negative reelle Zahl $|A|$ (Betrag von A genannt) zugeordnet, so dass

$$|A| > 0 \quad \text{für} \quad A \neq 0, \quad |0| = 0.$$

(vi) $|A+B| \leq |A| + |B|$, $|AB| \leq |A| |B|$, $|aA| = |a| |A|$.

Ein linearer, metrischer Ring heisst *reell*, wenn die Multiplikation nur mit reellen Zahlen gestattet ist, dagegen heisst der *komplex*, wenn die Multiplikation mit komplexen Zahlen gestattet ist.

Für ein Paar Punkte A und B heisst $|A-B|$ die *Entfernung* von A und B , die den Relationen

$$|A-B| > 0 \quad \text{für} \quad A \neq B, \quad |A-A| = 0,$$

$$|A-B| = |B-A|, \quad |A-B| + |B-C| \geq |A-C|$$

genügt. Man sagt, dass eine Folge $\{A_n\}$ gegen A *konvergiert*, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - A| = 0$. Man schreibt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Ein linearer, metrischer Ring $\mathfrak{R}$ heisst *vollständig*, wenn aus $|A_n - A_{n'}| < \epsilon$ für $n' > n > N(\epsilon)$, wobei ϵ eine beliebige positive Zahl bedeutet, immer die Existenz eines $A \in \mathfrak{R}$ folgt, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Bemerkung 1. Ein Element $E \in \mathfrak{R}$ heisst *Einselement* von $\mathfrak{R}$, wenn für alle $A \in \mathfrak{R}$ $AE = EA = A$ ist. Es gibt höchstens nur ein Einselement in $\mathfrak{R}$. Besitzt $\mathfrak{R}$ kein Einselement, so kann man durch Hinzufügung von E den $\mathfrak{R}$ erweitern, indem man den Betrag des Elementes in dem erweiterten linearen Ring etwa durch $|aE + A| = |a| + |A|$ ($A \in \mathfrak{R}$) definiert.

Beispiel 1. Es sei $\mathfrak{B}$ ein linearer, normierter, vollständiger Raum⁽²⁾. Die Menge $\mathfrak{R}$ aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$ selbst oder einen Teil von $\mathfrak{B}$ ist ein linearer, metrischer Ring, wenn man jeder Transformation $T \in \mathfrak{R}$ ihren Betrag durch

$$|T| = \text{Obere Grenze von } |T\chi| \text{ für } |\chi| \leq 1 \quad (\chi \in \mathfrak{B})$$

definiert. Dann bedeutet die Relation $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ nichts anders als, dass $T_n\chi$ gegen $T\chi$ für alle $|\chi| \leq 1$ gleichmässig konvergiert. Man kann also leicht beweisen, dass $\mathfrak{R}$ vollständig ist.

Beispiel 2. Die Menge $\mathfrak{R}$ aller quadratischen, k -dimensionalen Matrices ist ein linearer, metrischer Ring, wenn man den Betrag der Matrix $A = (a_{i,j})$ durch

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^k |a_{i,j}|^2}$$

definiert. Dieser Betrag von A ist von *J. v. Neumann* eingeführt⁽³⁾.

Wenn man eine quadratische, k -dimensionale Matrix als eine lineare Transformation in einem k -dimensionalen Vektorraume auffasst, so kann man den Betrag der Matrix nach Beispiel 1 definieren. Dieser Betrag ist aber mit dem von *J. v. Neumann* topologisch äquivalent. Die Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ ist klar.

Beispiel 3. $\mathfrak{R}$ sei die Menge aller in $b \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ definierten stetigen Funktionen $K(x, y)$. Die Multiplikation mit gewöhnlichen Zahlen und die Summe zweier Funktionen aus $\mathfrak{R}$ werden wie üblich definiert. Das Produkt zweier Elemente $K_1(x, y)$ und $K_2(x, y)$ wird dagegen durch

$$\int_a^b K_1(x, t) K_2(t, y) dt$$

definiert. Den Betrag von $K(x, y)$ definieren wir durch

$$(b-a) \text{ Max}_{a \leq x \leq b} (|K(x, y)|).$$

$\mathfrak{R}$ ist dann ein linearer, metrischer, vollständiger Ring. Es ist auch nicht schwer zu beweisen, dass $\mathfrak{R}$ kein Einselement besitzt.

(2) Dieser Raum $\mathfrak{B}$ wird von *S. Banach* „espace du type (B)“ genannt. Vgl. Banach: *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa), S. 53.

(3) Vgl. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, *Math. Zeit.* **30**, S. 3.

Bemerkung. Setzt man anstatt der Stetigkeit von $K(x, y)$ nur die Existenz von $\iint |K(x, y)|^2 dx dy (< \infty)$ voraus, und den Betrag von $K(x, y)$ durch

$$\int_G \int_G |K(x, y)|^2 dx dy$$

definiert, so ist die Menge aller solchen Funktionen auch ein linearer, metrischer, vollständiger Ring. (Man benutze Schwarzsche Ungleichung und Satz von Riesz-Fischer.)

In dieser Arbeit verstehen wir unter $\mathfrak{R}$ immer einen linearen, metrischen vollständigen Ring.

§ 2. Zusammenhängende Gruppen in $\mathfrak{R}$.

Eine Teilmenge $\mathfrak{G}$ eines linearen, metrischen, vollständigen Ringes $\mathfrak{R}$ heisst eine *Gruppe in $\mathfrak{R}$* , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Wenn $A, A' \in \mathfrak{G}$, dann $AA' \in \mathfrak{G}$.
 - (ii) In $\mathfrak{G}$ gibt es ein Element F (die Einheit von $\mathfrak{G}$), sodass für alle $A \in \mathfrak{G}$ $FA = AF = A$.
 - (iii) Jedem $A \in \mathfrak{G}$ gibt es ein A' , sodass $AA' = A'A = F$.
- (Das assoziative Gesetz ist von selbst erfüllt.)

Die Einheit von $\mathfrak{G}$ braucht nicht das Einselement von $\mathfrak{R}$ zu sein. F muss aber der Bedingung $F^2 = F$ genügen. $\mathfrak{R}_F$ sei die Gesamtheit der Elemente von der Form $FAF (A \in \mathfrak{R})$. $\mathfrak{R}_F$ ist dann wieder ein linearer, metrischer, vollständiger Ring. In $\mathfrak{R}_F$ ist F das Einselement. Nach (ii) folgt auch $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}_F$. Ist F das Einselement von $\mathfrak{R}$, so heisst $\mathfrak{G}$ eine *normale Gruppe in $\mathfrak{R}$* .

Im folgenden setzen wir voraus, dass $\mathfrak{R}$ ein linearer, metrischer, vollständiger Ring mit Einselement E ist. Ein Element $A' (A' \in \mathfrak{R})$, das die Relation $AA' = A'A = E$ erfüllt, heisst *Inverselement* von A . Jedes A besitzt höchstens nur ein Inverselement. Das Inverselement von A bezeichnen wir mit A^{-1} .

Hilfssatz 1. Das Produkt AB hängt von (A, B) stetig ab. D. h., aus $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = AB$.

Beweis: Dem Leser überlassen.

Hilfssatz 2. Für jedes A in $|A - E| < 1$, gibt es Inverselement

$$A^{-1} = E + \sum_{n=1}^{\infty} (E - A)^n.$$

Beweis: Dem Leser überlassen.

Hilfssatz 3. Hat A_0 Inverselement A_0^{-1} , dann haben alle A in $|A - A_0| < \frac{1}{|A_0^{-1}|}$ Inverselemente A^{-1} . A^{-1} hängt von A stetig ab.

Beweis: Ist $|A - A_0| < \frac{1}{|A_0^{-1}|}$, dann $|A_0^{-1}A - E| < 1$ und $|AA_0^{-1} - E| < 1$. $A_0^{-1}A$ und AA_0^{-1} besitzen also Inverselemente B bzw B' . Man setze $BA_0^{-1} = A'$ und $A_0^{-1}B' = A''$. Dann $A'A = AA'' = E$. Folglich auch $A'AA'' = A' = A''$. Also $A' = A^{-1}$. Aus $A^{-1} - A_0^{-1} = \{(A_0^{-1}A)^{-1} - E\}A_0^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \{E - (A_0^{-1}A)\}^n A_0^{-1}$ folgt;

$$|A^{-1} - A_0^{-1}| \leq |A_0^{-1}| \sum_{n=1}^{\infty} |A_0^{-1}(A_0 - A)|^n \leq \frac{|A_0^{-1}|^2 |A - A_0|}{1 - |A_0^{-1}| |A - A_0|}.$$

A^{-1} hängt also von A stetig ab. W. z. b. w.

Definition. Es sei $\mathfrak{R}_0$ ein linearer Unterring von $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}_0^*$ sei die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{R}_0$, die Inverselemente in $\mathfrak{R}$ besitzen. Die grösste zusammenhängende Untermenge von $\mathfrak{R}_0^*$, die das Einselement E enthält, heisse der *Kern von $\mathfrak{R}_0$ (in bezug auf $\mathfrak{R}$)*. Der Kern von $\mathfrak{R}_0$ bezeichnen wir mit $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{R}_0$ ein linearer, abgeschlossener Unterring von $\mathfrak{R}$ mit dem Einselement. Dann ist $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ (in bezug auf $\mathfrak{R}$) die grösste zusammenhängende normale Gruppe in $\mathfrak{R}_0$.*

Beweis: Man bezeichne die Umgebung von E $|A - E| < 1$ in $\mathfrak{R}_0$ mit $\mathfrak{U}_0$. $\mathfrak{U}_0$ ist zusammenhängend und offen in $\mathfrak{R}_0$. Ist $A \in \mathfrak{U}_0$, so ist $A^{-1} \in \mathfrak{R}_0$ (nach Hilfssatz 2). Es bezeichne $\mathfrak{U}_0^{-1}$ die Menge aller A^{-1} , sodass $A \in \mathfrak{U}_0$. Nach Hilfssatz 3 ist $\mathfrak{U}_0^{-1}$ auch zusammenhängend und offen in $\mathfrak{R}_0$. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{U}_0 + \mathfrak{U}_0^{-1}$, die wieder zusammenhängend und in $\mathfrak{R}_0$ offen ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}$. Ist $A \in \mathfrak{U}$, so ist auch $A^{-1} \in \mathfrak{U}$.

Es seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ beliebige endlich viele Elemente von $\mathfrak{U}$. Die Menge aller Produkte $A_1 A_2, \dots, A_n$ heisse $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ ist auch zusammenhängend und offen in $\mathfrak{R}_0$. Man beweist leicht, dass $\mathfrak{S}$ eine normale Gruppe in $\mathfrak{R}_0$ ist. Wir wollen nun beweisen, dass $\mathfrak{S} = \text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ ist. Es ist klar, dass $\mathfrak{S} \subset \text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$. Wäre $\mathfrak{S} \neq \text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$, so gibt es ein $A^* \in (\text{Kern}[\mathfrak{R}_0] - \mathfrak{S})$, sodass eine Folge $\{A_n\} \subset \mathfrak{S}$ gegen A^* konvergiert, (weil $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ zusammenhängend, und $\mathfrak{S}$ in $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ offen ist). Da $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{-1} = A^{*-1}$, so gibt es eine positive Zahl α , dass $|A_n^{-1}| < \alpha$. Für genügend grosse n gilt also

$$|A_n - A^*| < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{|A_n^{-1}|}.$$

Dann $|E - A_n^{-1}A^*| < 1$, folglich $A_n^{-1}A^* \in \mathfrak{U}$. Nach der Definition von $\mathfrak{S}$ und wegen $A_n \in \mathfrak{S}$ muss auch

$$A^* = A_n(A_n^{-1}A^*) \in \mathfrak{S},$$

was widerspricht mit $A^* \in (\text{Kern}[\mathfrak{R}_0] - \mathfrak{S})$. $\mathfrak{S}$ muss also mit $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ übereinstimmen.

Nach der Definition von $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ ist klar, dass jede zusammenhängende normale Gruppe in $\mathfrak{R}_0$ eine Teilmenge von $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ sein soll. $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ ist also die grösste zusammenhängende normale Gruppe in $\mathfrak{R}_0$. W. z. b. w.

Bemerkung 2. Zuerst ist $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ in bezug auf $\mathfrak{R}$ definiert. Nach Satz 1 ist aber klar geworden, dass $\text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ von $\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}_0$) unabhängig ist, wenn $\mathfrak{R}_0$ einen linearen vollständigen Unterring bedeutet.

Zusatz. Es sei $\mathfrak{R}_0$ ein linearer, abgeschlossener Unterring von $\mathfrak{R}$. Wenn $A \in \text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$ (in bezug auf $\mathfrak{R}$), dann ist $A^{-1} \in \text{Kern}[\mathfrak{R}_0]$.

Beweis: Nach Satz 1 klar.

Satz 2. Es sei $\mathfrak{R}(A, E)$ der durch A und E erzeugte, lineare, abgeschlossene Ring ($A \in \mathfrak{R}$, $E \in \mathfrak{R}$). $\text{Kern}[\mathfrak{R}(A, E)]$ ist dann eine zusammenhängende, Abelsche, normale Gruppe in $\mathfrak{R}$.

Beweis: Nach Satz 1 klar.

§ 3. Exponentialfunktion und ihre Umkehrung.

Durch die Potenzreihe

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

definieren wir die *Exponentialfunktion* von $A \in \mathfrak{R}$, die immer konvergiert.

Hilfssatz 4. Die Exponentialfunktion $\exp(A)$ hängt von A stetig ab.

Beweis: Da die Potenzreihe $E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ für $|A| \leq l$ (l : beliebige positive Zahl) gleichmässig konvergiert, so ist $\exp(A)$ eine stetige Funktion von A .

Hilfssatz 5. Wenn $AB = BA$, dann

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(A+B).$$

Beweis: Dem Leser überlassen.

Bemerkung 3. Nach Hilfssatz 5 bildet $\exp(tA)$, wo A ein festes Element in $\mathfrak{R}$ und t eine reelle Veränderliche bedeutet, eine zusammenhängende, Abelsche, normale Gruppe in $\mathfrak{R}$. Die Gruppe $\{\exp(tA)\}$ oder ein Element davon heisst *durch die Infinitesimaltransformation A erzeugt*.

Hilfssatz 6. Ist $|A - E| < 1$, so gibt es ein B derart, dass

$$A = \exp(B)$$

ist. B wird dabei etwa durch $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} (E - A)^n$ gegeben.

Beweis: Dem Leser überlassen.

Satz 3. Dafür, dass die Gleichung

$$A = \exp(X)$$

eine Lösung $X \in \mathfrak{R}$ besitzt, ist es notwendig und hinreichend, dass $A \in \mathfrak{U}$, wo $\mathfrak{U}$ eine zusammenhängende, Abelsche, normale Gruppe in $\mathfrak{R}$ bedeutet. Ist $A \in \mathfrak{U}$, so ist eine Lösung $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$, wo $\mathfrak{R}(\mathfrak{U})$ den durch alle Elemente von $\mathfrak{U}$ erzeugten, abgeschlossenen, linearen Ring bedeutet.

Beweis: Ist $A = \exp(B)$, so ist $A \in \{\exp(tB)\} \quad (-\infty < t < \infty)$, wo $\exp(tA)$ eine zusammenhängende, Abelsche, normale Gruppe in $\mathfrak{R}$ bildet. Die Bedingung des Satzes ist also notwendig.

Ist $A \in \mathfrak{U}$ und $|A - E| < 1$, so gibt es ein $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$, sodass $A = \exp(B)$. Wäre nicht jedes $A \in \mathfrak{U}$ in der Form $\exp(B)$, $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$, darstellbar, so zerfällt $\mathfrak{U}$ in zwei Klassen: Die erste Klasse $\mathfrak{U}_1$ besteht aus allen in der Form $\exp(B)$, $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$, darstellbaren Elementen von $\mathfrak{U}$. Die zweite Klasse $\mathfrak{U}_2$ wird durch $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U} - \mathfrak{U}_1$ definiert.

$\mathfrak{U}_1$ ist in $\mathfrak{U}$ offen. Denn, es sei $A_1 \in \mathfrak{U}_1$ und $A_1 = \exp(B_1)$, $B_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$. Dann für alle $A \in \mathfrak{U}$ in $|A - A_1| < \frac{1}{|A_1^{-1}|}$ gilt $|AA_1^{-1} - E| < 1$, folglich $AA_1^{-1} = \exp(B)$, $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$. Weil alle Elemente von $\mathfrak{R}(\mathfrak{U})$ mit einander kommutativ sind, so besteht $A = (AA_1^{-1})A_1 = \exp(B) \cdot \exp(B_1) = \exp(B + B_1)$, $B + B_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$.

Da $\mathfrak{U}$ zusammenhängend und $\mathfrak{U}_1$ in $\mathfrak{U}$ offen ist, so muss es ein A^* in $\mathfrak{U}_2$ gegeben, sodass eine Folge $\{A_n\} \subset \mathfrak{U}_1$ gegen A^* konvergiert, wo $A_n = \exp(B_n)$ ($B_n \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$). Es gibt dann ein n , sodass $|A_n - A^*| < \frac{1}{|A^{*-1}|}$, oder $|A^{*-1} \cdot A_n - E| < 1$. Folglich $A^{*-1}A_n = \exp(B)$, $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$. Also $A^* = A_n \cdot (\exp(B))^{-1} = \exp(B_n) \exp(-B) = \exp(B_n - B)$, $B_n - B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{U})$. Dies widerspricht mit $A^* \in \mathfrak{U}_2$. Es muss daher $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1$, w. z. b. w.

Satz 4. *Dafür, dass die Gleichung*

$$\exp(X) = A$$

in $\mathfrak{R}(A, E)$ lösbar sei, ist es notwendig und hinreichend, dass $A \in \text{Kern}[\mathfrak{R}(A, E)]$ ist. ($\mathfrak{R}(A, E)$ bedeutet den durch A und E erzeugten, abgeschlossenen, linearen Ring.)

Beweis: Es sei $A = \exp(B)$, $B \in \mathfrak{R}(A, E)$. Dann

$$A \in \{\exp(tB)\} \subset \text{Kern}[\mathfrak{R}(A, E)].$$

Die Bedingung ist also notwendig. Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt aus Satz 2 und Satz 3.

Satz 5. *$\mathfrak{R}$ sei die Menge aller n -dimensionalen quadratischen, komplexen Matrices. Jede Matrix, A für die $\text{Det}(A) \neq 0$ ist, ist in der Form $A = \exp(B)$ ($B \in \mathfrak{R}$) darstellbar.*

Beweis: Nach Satz 4 genügt es zu beweisen, dass $A \in \text{Kern}[\mathfrak{R}(A, E)]$ ist. Man betrachte die Matrix $A_\lambda = (1 - \lambda)E + \lambda A$, (λ : komplexe Zahl).

$\text{Det}(A_\lambda)$ verschwindet höchstens für n verschiedene Werte von λ . $\{A_\lambda\}^*$ sei die Menge aller A_λ , sodass $\text{Det}(A_\lambda) \neq 0$. $\{A_\lambda\}^*$ ist zusammenhängend und jedes Element von $\{A_\lambda\}^*$ besitzt das Inverse A_λ^{-1} in $\mathfrak{R}$. Also $A \in \{A_\lambda\}^* \subset \text{Kern}[\mathfrak{R}(A, E)]$. W. z. b. w.

Satz 6. $\mathfrak{R}$ sei die Menge aller n -dimensionalen quadratischen reellen Matrices. Jede Matrix $A \in \mathfrak{R}$, die keine negative oder verschwindende reelle charakteristische Wurzel besitzt, ist in der Form $A = \exp(B)$, $B \in \mathfrak{R}(A, E)$, darstellbar⁽⁴⁾.

Beweis: Der Beweis läuft ähnlich wie der von Satz 5. $\{A_\lambda\}^*$ muss aber aus allen A_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, bestehen.

Satz 7. Eine reelle Fredholmsche Operation

$$(E+A)f(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

lässt sich durch eine reelle Infinitesimaltransformation

$$Bf(x) = \int_a^b K'(x, y)f(y)dy$$

erzeugen, wenn es keinen reellen Eigenwert im Intervall $-1 \leq \lambda < 0$ gibt. ($K(x, y)$ und $K'(x, y)$ sind in $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ stetige Funktionen.)

Beweis: Die Menge $\mathfrak{R}$ aller reellen Fredholmschen Operationen $cE + A$ ist ein linearer, metrischer, vollständiger Ring, indem man den Betrag durch $|cE + A| = |c| + |A|$ und $|A| = (b-a) \cdot \text{Max}|K(x, y)|$ definiert. (Vgl. Beispiel 3 und Bemerkung 1 in § 1.)

Da es keinen Eigenwert in $-1 \leq \lambda \leq 0$ gibt, so existiert nach dem Fredholmschen Satz $(E + \lambda A)^{-1}$ in $\mathfrak{R}$ für $-1 \leq \lambda \leq 0$. Folglich $(E + \lambda A) \in \text{Kern}[\mathfrak{R}(A, E)]$ für $-1 \leq \lambda \leq 0$. Also nach Satz 4

$$E + A = \exp(B), \quad B \in \mathfrak{R}(A, E).$$

($\mathfrak{R}(A, E)$ ist von derselben Bedeutung wie in Satz 4.) Man setze $B = cE + B'$, $B' \in \mathfrak{R}(A)$, (c : reelle Zahl), wo $\mathfrak{R}(A)$ der durch A erzeugte lineare abgeschlossene Ring ist. Dann ist $E + A$ von der Form

$$\begin{aligned} \exp(cE + B') &= e^c \exp(B') = e^c E + e^c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'^n}{n!} \\ &= e^c E + A', \quad A' \in \mathfrak{R}(A). \end{aligned}$$

Daher $c = 0$. B ist also von der Form

$$Bf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(4) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine reelle Matrix A in der Form $A = \exp(B)$ (B : reelle Matrix) darstellbar sei, ist von Herrn K. Asano gegeben, was in kurzer Zeit in diesem Journal erscheinen wird.

§ 4. Infinitesimalrechnung in $\mathfrak{R}$.

Für eine Funktion $A(t)$ ($A(t) \in \mathfrak{R}$. t : reelles Argument.) definieren wir den *Differentialquotient* $\frac{dA}{dt} = A'(t)$ durch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} = A'(t).$$

Wenn $\frac{dA}{dt}$ existiert, so heisst $A(t)$ *differenzierbar*. Eine differenzierbare Funktion $A(t)$ ist stetig.

Hilfssatz 7. Sind $A_1(t)$ und $A_2(t)$ differenzierbar, dann

$$\frac{d}{dt} \{A_1(t) + A_2(t)\} = \frac{dA_1(t)}{dt} + \frac{dA_2(t)}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \{A_1(t) \cdot A_2(t)\} = \frac{dA_1}{dt} \cdot A_2(t) + A_1(t) \cdot \frac{dA_2}{dt}$$

$$A(u(t)) = \frac{dA}{du} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Beweis: Dem Leser überlassen.

Hilfssatz 8. Es sei $A(t)$ in $a < t < b$ differenzierbar und

$$\frac{dA(t)}{dt} = 0 \quad \text{in } a < t < b.$$

Dann ist $A(t) = C$ in $a < t < b$, wo C ein festes Element in $\mathfrak{R}$ bedeutet.

Beweis: Es sei $\mathfrak{J}(a \leq t \leq \beta)$ ein beliebiges, abgeschlossenes Teilintervall von $a < t < b$. Wir setzen

$$|A(\beta) - A(a)| = v(\mathfrak{J}).$$

Wir haben also zu beweisen, dass $v(\mathfrak{J}) = 0$ ist.

Schritt für Schritt definieren wir die Intervalle

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 > \mathfrak{J}_1 > \dots > \mathfrak{J}_n > \mathfrak{J}_{n+1} > \dots$$

folgendermassen. Wir teilen das Intervall $\mathfrak{J}_n(a_n \leq t \leq \beta_n)$ in zwei Intervalle $\mathfrak{J}_n^{(-)}(a_n \leq t \leq \frac{a_n + \beta_n}{2})$ und $\mathfrak{J}_n^{(+)}(\frac{a_n + \beta_n}{2} \leq t \leq \beta_n)$ ein. Dann ist entweder $v(\mathfrak{J}_n^{(-)}) \geq \frac{1}{2} v(\mathfrak{J}_n)$ oder $v(\mathfrak{J}_n^{(+)}) \geq \frac{1}{2} v(\mathfrak{J}_n)$.

$\mathfrak{J}_{n+1}$ sei dasjenige unter $\mathfrak{J}_n^{(-)}$ und $\mathfrak{J}_n^{(+)}$, sodass $v(\mathfrak{J}_{n+1}) \geq \frac{1}{2} v(\mathfrak{J}_n)$. Es gilt also $v(\mathfrak{J}_n) \geq \frac{1}{2^n} v(\mathfrak{J})$. Die Intervallfolge $\{\mathfrak{J}_n\}$ konvergiert gegen einen

Punkt $t_0 \in \mathfrak{J}$. Da $\frac{dA}{dt} = 0$ für $t = t_0$ und $t_0 \in \mathfrak{J}_n$ ist, so gilt für genügend grosse n

$$v(\mathfrak{J}_n) \leq |A(\beta_n) - A(t_0)| + |A(t_0) - A(\alpha_n)| \leq \varepsilon(\beta_n - \alpha_n).$$

Folglich

$$v(\mathfrak{J}) \leq 2^n v(\mathfrak{J}_n) \leq \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Weil ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, so muss $v(\mathfrak{J}) = 0$. W. z. b. w.

Definition. Es sei $A(t)$ eine in $a \leq t \leq b$ erklärte Funktion. Wir definieren das Integral $\int_a^b A(t)dt$ durch

$$\int_a^b A(t)dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n A(\tau_\nu) \Delta t_\nu,$$

wobei $\Delta t_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$, $t_0 = a$, $t_{\nu-1} < t_\nu$, $t_n = b$, $t_{\nu-1} \leq \tau_\nu \leq t_\nu$ und $\Delta = \max_{1 \leq \nu \leq n} (\Delta t_\nu)$.

Hilfssatz 9. Es sei $A(t)$ eine in $a \leq t \leq b$ stetige Funktion. Dann existiert das Integral

$$\int_a^b A(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Eine in $a \leq t \leq b$ stetige Funktion $A(t)$ ist in $a \leq t \leq b$ gleichmässig stetig. $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ seien zwei Unterteilungen des Intervalles $a \leq t \leq b$ folgender Beschaffenheiten:

$$\mathfrak{T}: t_0 = a, \quad t_{\mu-1} < t_\mu, \quad t_m = b, \quad t_{\mu-1} \leq \tau_\mu \leq t_\mu, \quad \Delta t_\mu = t_\mu - t_{\mu-1}$$

und $\Delta = \max_{1 \leq \mu \leq m} (\Delta t_\mu)$.

$$\mathfrak{T}': t'_0 = a, \quad t'_{\nu-1} < t'_\nu, \quad t'_n = b, \quad t'_{\nu-1} \leq \tau'_\nu \leq t'_\nu, \quad \Delta t'_\nu = t'_\nu - t'_{\nu-1}$$

und $\Delta' = \max_{1 \leq \nu \leq n} (\Delta t'_\nu)$.

Es gibt dann für eine beliebige positive ε eine andere $\delta(\varepsilon)$, sodass für alle $\Delta' < \delta(\varepsilon)$ und $\Delta' < \delta(\varepsilon)$,

$$\left| \sum_{\mu=1}^m A(\tau_\mu) \Delta t_\mu - \sum_{\nu=1}^n A(\tau'_\nu) \Delta t'_\nu \right| < \varepsilon.$$

Genauere Beweisführung wird dem Leser überlassen.

Bemerkung 4. Ist $a > b$, so definiert man

$$\int_a^b A(t)dt = - \int_b^a A(t)dt.$$

Und für $a = b$, $\int_a^b A(t)dt = 0$. Daraus folgt die Relation

$$\int_a^b A(t)dt + \int_b^c A(t)dt = \int_a^c A(t)dt$$

für beliebige reelle Zahlen a, b und c , wenn nur die entsprechenden Integrale existieren.

Hilfssatz 10. Es sei $A(t)$ in $a \leq t \leq b$ integrierbar und $|A(t)| \leq f(t)$. Dann

$$\int_a^b A(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt.$$

Beweis: Dem Leser überlassen.

Hilfssatz 11. Es sei $A(t)$ in $t_0 \leq t \leq t_1$ stetig, dann

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t A(\tau)dt = A(t) \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_1$$

Es sei $\frac{dA}{dt}$ stetig in $t_0 \leq t \leq t_1$, dann

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dA}{dt} dt = A(t_1) - A(t_0).$$

Beweis: Dem Leser überlassen. (Um die zweite Behauptung zu beweisen berücksichtige Hilfssatz 6.)

Satz 8. Es sei $Y = F(t, X)$ ($X \in \mathfrak{R}$, $Y \in \mathfrak{R}$) eine stetige Funktion von (t, X) in $|t - t_0| \leq a$, $|X - A| \leq b$ mit den Bedingungen

$$|F(t, X)| \leq m, \quad b \leq am,$$

$$|F(t, X_1) - F(t, X_2)| \leq l |X_1 - X_2| \quad (l: \text{eine Konstante}).$$

Es gibt dann eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X)$$

in $|t - t_0| \leq a$ mit der Anfangsbedingung $X(t_0) = A$.

Die Lösung $X(t)$ wird durch die Folge $X_n(t)$ des Picardschen sukzessiven Verfahrens gleichmässig approximiert. D. h., definiert man $X_n(t)$ durch

$$X_0(t) = A,$$

$$X_n(t) = A + \int_{t_0}^t F(\tau, X_{n-1}(\tau))d\tau,$$

dann konvergiert $X_n(t)$ in $|t - t_0| \leq a$ gleichmässig gegen die gesuchte Lösung $X(t)$.

Beweis: Der Beweis läuft ganz ähnlich wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, indem man Hilfssätze in diesem Paragraph berücksichtigt.

§ 5. Funktionalgleichung $A(s)A(t) = A(s+t)$.

Satz 9. *Es sei $A(t)$ eine stetige Funktion in $-\infty < t < \infty$, die der Gleichung*

$$(1) \quad A(s)A(t) = A(s+t)$$

und $A(0) = E$ genügt. Dann ist

$$A(t) = \exp(tC) \quad (C: \text{ein festes Element in } \mathfrak{R})^{(5)}.$$

Beweis: Setzt man $\int_0^t A(\tau) d\tau = A^*(t)$, dann aus (1)

$$(2) \quad A(s)A^*(t) = A^*(s+t) - A^*(s).$$

Weil $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A^*(t)}{t} = A(0) = E$ ist, so besitzt $A^*(t)$ das Inverselement $A^{*-1}(t)$ für ein genügend kleines t , etwa $t = t_1$. Folglich nach (2)

$$(3) \quad A(s) = \{A^*(s+t_1) - A^*(s)\}A^{*-1}(t_1).$$

Die rechte Seite von (3) ist nach s stetig differenzierbar. $A(s)$ ist also nach s stetig differenzierbar.

Differenziert man die beiden Seiten von (1) nach s , und $s = 0$ setzt, so ist

$$\frac{dA(t)}{dt} = CA(t), \quad (C = A'(0)).$$

Nach dem Picardschen Verfahren der sukzessiven Approximationen erhält man die Lösung der obigen Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $A(0) = E$, weil alle Bedingungen von Satz 8 erfüllt sind. Folglich

$$A(t) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n C^n}{n!} = \exp(tC).$$

W. z. b. w.

Bemerkung 6. In Satz 9 ist vorausgesetzt, dass $A(0) = E$. Lässt man diese Voraussetzung fort, so muss $A(0)^2 = A(0)$, $A(s)A(0) = A(0)A(s) = A(s)$. Man hat also den linearen Unterring $A_0\mathfrak{R}A_0$ ($A_0 = A(0)$) anstatt $\mathfrak{R}$ zu betrachten. In $A_0\mathfrak{R}A_0$ spielt A_0 die Rolle des Einselementes.

Zum Beispiels sei $\mathfrak{R}$ ein linearer metrischer Ring von Beispiel 3 in § 1. A_0 muss dann eine Lösung der Gleichung

⁽⁵⁾ Vgl: K. Yosida: On the groups embeded in the metrical complete rings, dies Journal in demselben Bande. Vgl. auch D.S. Nathan: One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces, Duke Math. Journal I. S. 518.

$$A(x, y) = \int_a^b A(x, u)A(u, y)du.$$

sein. Die Lösung lautet⁽⁶⁾.

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^k f_i(x)g_i(y),$$

wobei

$$\int_a^b f_i(x)g_j(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Die Lösung von

$$A(x, y; s+t) = \int_a^b A(x, u; s)A(u, y; t)du$$

ist dann durch

$$A(x, y; t) = \sum_{i,j=1}^k a_{i,j}(t)f_i(x)g_j(y)$$

und

$$(a_{i,i}(t)) = E_{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n C^n}{n!}$$

gegeben, wobei $E_{(k)}$ die k -dimensionale Einheitsmatrix und C eine von t freie k -dimensionale quadratische Matrix bedeuten.

§ 6. Reguläre Funktionen in $\mathfrak{R}$ von einem komplexen Argument.

Ein von einem komplexen Argument z im Gebiet $\mathfrak{Z}$ abhängiges Element $A(z) \in \mathfrak{R}$ heisst *regulär in $\mathfrak{Z}$* , wenn $A(z)$ in $\mathfrak{Z}$ nach z differentiierbar ist. D.h., in $\mathfrak{Z}$ existiert das Limes

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A(z + \Delta z) - A(z)}{\Delta z} = \frac{dA}{dz} \in \mathfrak{R}.$$

$A(z)$ heisst *regulär am $z = z_0$* , wenn es eine Umgebung von z_0 gibt, in der $A(z)$ sich regulär verhält.

Hilfssatz 12. Es seien $A(z)$ und $B(z)$ reguläre Funktionen am $z = z_0$, so sind die Funktionen

$$A(z) + B(z), \quad A(z)B(z), \quad f(z)A(z),$$

wo $f(z)$ eine an $z = z_0$ reguläre komplexwertige Funktion bedeutet, auch an $z = z_0$ regulär.

Beweis: Dem Leser überlassen.

(6) Vgl. *Lalesco*: Introduction à la théorie des équations intégrales, S. 38.

Es sei $\mathfrak{C}(z = z(t), a \leq t \leq b)$ eine stetige Kurve im Gebiet $\mathfrak{J}$ einer komplexen Veränderlichen z . Es sei $A(z)$ in $\mathfrak{J}$ stetige Funktion. Wir definieren das Integral von $A(z)$ entlang $\mathfrak{C}$ durch

$$\int_{\mathfrak{C}} A(z) dz = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n A(\zeta_{\nu}) \Delta z_{\nu},$$

wobei

$$\begin{aligned} z_{\nu} &= z(t_{\nu}), & \zeta_{\nu} &= z(\tau_{\nu}), & \Delta z_{\nu} &= z_{\nu} - z_{\nu-1}, & t_0 &= a, & t_{\nu-1} &< t_{\nu}, \\ t_n &= b, & t_{\nu-1} &\leq \tau_{\nu} \leq t_{\nu}, & \Delta &= \text{Max}_{1 \leq \nu \leq n} (\Delta t_{\nu}) & (\Delta t_{\nu} &= t_{\nu} - t_{\nu-1}). \end{aligned}$$

Hilfssatz 13. Es sei $A(z)$ eine im Gebiet $\mathfrak{J}$ einer komplexen Veränderlichen z stetige Funktion. $\mathfrak{C}(z = z(t), a \leq t \leq b)$ sei eine Kurve von endlicher Länge in $\mathfrak{J}$. Dann existiert das Integral

$$\int_{\mathfrak{C}} A(z) dz \in \mathfrak{R}.$$

Beweis: Der Beweis läuft ähnlich wie der von Hilfssatz 9.

Für reguläre Funktionen $A(z)$ in $\mathfrak{J}$ gelten fast alle *analogen Fundamentalsätze*, wie die für gewöhnliche reguläre Funktionen. Die Beweise dafür sind auch ähnlich wie die für gewöhnliche reguläre Funktionen. Wir stellen also die Sätze ohne Beweise nebeneinander.

Cauchyscher Integralsatz. Es sei $A(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{J}$ regulär. Dann

$$\int_{\mathfrak{C}} A(z) dz = 0,$$

wobei $\mathfrak{C}$ eine in $\mathfrak{J}$ liegende, geschlossene Kurve von endlicher Länge bedeutet.

Cauchysche Integraldarstellungen. Es sei $A(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{J}$ regulär.

Dann ist

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei $\mathfrak{C}(\zeta = \zeta(t))$ eine in $\mathfrak{J}$ um z im positiven Sinne laufende Jordansche Kurve endlicher Länge bedeutet. $A(z)$ ist dann auch beliebig oft differentiierbar. Und

$$\frac{d^n A(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{A(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Taylorische Entwicklung. Es sei $A(z)$ in $\mathfrak{J}$ regulär. $|z - a| < r$ sei der grösste im $\mathfrak{J}$ liegende Kreis mit dem Mittelpunkt $z = a$. $A(z)$ ist dann in $|z - a| < r$ in die absolut konvergente Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} \frac{(z-a)_{\nu}}{\nu!}, \quad \left(A_{\nu} = \frac{d^{\nu} A(z)}{dz^{\nu}} \right)$$

entwickelbar. Die Potenzreihe konvergiert für $|z-a| \leq r' < r$ gleichmässig.

Es seien $A(z)$ und $B(z)$ in $\mathfrak{Z}$ regulär. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{Z}$ sei eine unendliche Punktmenge, die in $\mathfrak{Z}$ einen Häufungspunkt besitzt. Es sei $A(z) = B(z)$ auf $\mathfrak{M}$, so ist $A(z) = B(z)$ durchaus in $\mathfrak{Z}$.

Satz von Weierstrass. Konvergiert gleichmässig eine Folge der in $\mathfrak{Z}$ regulären Funktionen $A_n(z)$ gegen $A(z)$, so ist $A(z)$ in $\mathfrak{Z}$ regulär, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^p A_n(z)}{dz^p} = \frac{d^p A(z)}{dz^p}.$$

Laurentsche Entwicklung. $A(z)$ sei in $0 < |z-a| < r$ eindeutig und regulär. $A(z)$ wird dann in die Laurentsche Reihe

$$A(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_{\nu} (z-a)^{\nu}, \quad \left(A_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} A(z) (z-a)^{-\nu-1} dz \right),$$

entwickelt, die in $0 < |z-a| < r$ absolut und in $0 < \varepsilon \leq |z-a| \leq r' < r$ gleichmässig konvergiert.

Satz 10. Es sei $A(z)$ an $z = z_0$ regulär und besitze für $z = z_0$ das Inverse A_0^{-1} . Dann existiert $A^{-1}(z)$ in der Nähe von $z = z_0$, die an $z = z_0$ regulär ist.

Beweis: Die Existenz von $A^{-1}(z)$ in der Nähe von $z = z_0$ ist nach Hilfssatz 3 (§2) klar. Da wird $A^{-1}(z)$ durch

$$A^{-1}(z) = \left\{ E + \sum_{n=1}^{\infty} (E - A_0^{-1} A(z))^n \right\} A_0^{-1}$$

gegeben. Nach dem Satz von Weierstrass ist $A^{-1}(z)$ also in der Nähe von $z = z_0$ regulär. W. z. b. w.

§ 7. Resolventen.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein komplex linearer, metrischer, vollständiger Ring und $E \in \mathfrak{R}$, $A \in \mathfrak{R}$. Wenn $(E + \lambda A)$ (λ : eine komplexe Zahl) das Inverse $(E + \lambda A)^{-1}$ besitzt, setzen wir

$$(E + \lambda A)^{-1} = E + \lambda R_{\lambda}.$$

R_{λ} heisst die *Resolvente* von A .

Hilfssatz 14. Die Resolvente R_{λ} von $A \in \mathfrak{R}$ existiert für genügend kleine λ . R_{λ} ist eine reguläre Funktion von λ soweit, als R_{λ} existiert.

Beweis: Die Existenz von R_λ für genügend kleine $\lambda (\neq 0)$ folgt aus Hilfssatz 2. In der Tat wird R_λ für $|\lambda| < \frac{1}{|A|}$ durch

$$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} (-A)^n \lambda^{n-1}$$

gegeben. Nach Satz 10 ist R_λ regulär soweit, als R_λ existiert und $\lambda \neq 0$. Die obige Gleichung zeigt, dass R_λ auch für $\lambda = 0$ regulär ist. W. z. b. w.

Hilfssatz 15. A sei die grösste, zusammenhängende, $\lambda = 0$ enthaltende Menge von λ , worauf R_λ existiert. Dann ist $R_\lambda \in \mathfrak{R}(A)$ für $\lambda \in A$, wo $\mathfrak{R}(A)$ den durch A erzeugten linearen abgeschlossenen Ring bedeutet.

Beweis: Für $\lambda \in A$ gibt es $(E + \lambda A)^{-1} \in \mathfrak{R}$. Also $(E + \lambda A) \in \text{Kern} [\mathfrak{R}(A, E)]$ für $\lambda \in A$, wo $\mathfrak{R}(A, E)$ von derselben Bedeutung wie in Satz 4 (§ 3) ist. Folglich $(E + \lambda A)^{-1} \in \text{Kern} [\mathfrak{R}(A, E)]$ für $\lambda \in A$. Daher $R_\lambda \in \mathfrak{R}(A, E)$ für $\lambda \in A$. Ist $E \in R(A)$, so ist $R_\lambda \in \mathfrak{R}(A)$. Ist dagegen $E \notin \mathfrak{R}(A)$, so ist R_λ von der Form

$$R_\lambda = aE + B, \quad B \in \mathfrak{R}(A).$$

Aus der Relation $(E + \lambda R_\lambda)(E + \lambda A) = E$ ergibt sich dann

$$aE + (1 + a)A + B + BA = 0.$$

Da $E \notin \mathfrak{R}(A)$ und $(1 + a)A + B + BA \in \mathfrak{R}(A)$, so muss $a = 0$. Also $R_\lambda \in \mathfrak{R}(A)$. W. z. b. w.

Hilfssatz 16. Es sei R_λ die Resolvente von $A \in \mathfrak{R}$. R_λ genügt dann, soweit R_λ und R_μ existieren, der Relation

$$R_\lambda - R_\mu - (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = 0.$$

Umgekehrt, wenn eine Funktion R_λ von $\lambda \in A$ die obige Relation erfüllt, und $0 \in A$, so ist R_λ die Resolvente von $-R_0$.

Beweis: Es ist klar, dass $AR_\lambda = R_\lambda A$. Da $E + \lambda A$ und $E + \mu A$ mit einander vertauschbar sind, so sind es auch $(E + \lambda A)^{-1}$ und $(E + \mu A)^{-1}$. Folglich $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$. Aus $(E + \lambda A)(E + \lambda R_\lambda) = E$ folgt,

$$(1) \quad A + R_\lambda + \lambda AR_\lambda = 0.$$

Ersetzt man λ durch μ

$$(2) \quad A + R_\mu + \mu AR_\mu = 0.$$

Aus (1) und (2)

$$(3) \quad R_\lambda - R_\mu + A(\lambda R_\lambda - \mu R_\mu) = 0,$$

und wegen $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$

$$(4) \quad A(\mu R_\mu - \lambda R_\lambda) + (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu = 0,$$

Aus (3) und (4) ergibt sich die gesuchte Relation

$$R_\lambda - R_\mu - (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = 0.$$

Ist die obige Relation für $\lambda \in A$ und $\mu \in A$ erfüllt, so gilt

$$R_\lambda - R_0 - \lambda R_\lambda R_0 = 0,$$

und

$$R_0 - R_\lambda + \lambda R_0 R_\lambda = 0.$$

Folglich

$$(E + \lambda R_\lambda)(E - \lambda R_0) = E,$$

und

$$(E - \lambda R_0)(E + \lambda R_\lambda) = E.$$

R_λ ist also die Resolvente von $-R_0$. W. z. b. w.

Satz 11. *Es sei R_λ die Resolvente von A , und sei λ von derselben Bedeutung wie in Hilfssatz 15. $\lambda = \lambda_0$ sei ein isolierter Randpunkt von A . ($\lambda = \lambda_0$ ist also eine isolierte Singularität von R_λ .) Dann zerfällt A in die Summe zweier Elemente von $\Re(A)$ derart, dass*

$$A = A^{(+)} + A^{(-)}, \quad A^{(+)}A^{(-)} = A^{(-)}A^{(+)} = 0.$$

Die Resolvente $R_\lambda^{(+)}$ von $A^{(+)}$ ist in A und an $\lambda = \lambda_0$ regulär. Die Resolvente $R_\lambda^{(-)}$ von $A^{(-)}$ ist nur an $\lambda = \lambda_0$ singulär.

Und

$$R_\lambda^{(+)} + R_\lambda^{(-)} = R_\lambda, \quad R_\lambda^{(+)}R_\lambda^{(-)} = R_\lambda^{(-)}R_\lambda^{(+)} = 0.$$

Beweis: Die Laurentsche Entwicklung von R_λ an $\lambda = \lambda_0$ sei

$$R_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n C_n, \quad 0 < |\lambda - \lambda_0| < r,$$

wo

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{R_\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda \in \Re(A).$$

Setzt man $\lambda - \lambda_0 = u$, $\mu - \lambda_0 = v$, so erhält man nach Hilfssatz 16,

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu - (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = \\ (u - v) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\sum_{\nu=1}^n u^{n-\nu} v^{\nu-1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} u^{-\nu-1} v^{-n+\nu} \right) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_m C_n u^m v^n \right\} \\ = (u - v)F(u, v) = 0. \end{aligned}$$

Die obige Doppelreihe konvergiert für $0 < |u| < r$, $0 < |v| < r$ absolut und für $0 < \varepsilon \leq |u| \leq r' < r$, $0 < \varepsilon \leq |v| \leq r' < r$ gleichmässig. Also

Koeffizient von $u^m v^n$ in $F(u, v) =$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{C}_u} \int_{\mathbb{C}_v} F(u, v) u^{-m-1} v^{-n-1} du dv = 0.$$

Wenn man alle negativen Potenzen von u und v in $F(u, v)$ zusammenfasst, so erhält man

$$R_\lambda^{(-)} - R_\mu^{(-)} - (\lambda - \mu) R_\lambda^{(-)} R_\mu^{(-)} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad \mu \neq \lambda_0,$$

indem man

$$R_\lambda^{(-)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^n} C_{-n}$$

setzt, $R_\lambda^{(-)}$ ist für alle $\lambda \neq \lambda_0$ regulär. $R_\lambda^{(-)}$ ist also die Resolvente von $-R_0^{(-)}$ (Nach Hilfssatz 16.)

Fasst man alle nicht negativen Potenzen von u und v in $F(u, v)$ zusammen, so erhält man für $|\lambda - \lambda_0| < r, |\mu - \lambda_0| < r$ die Relation

$$(1) \quad R_\lambda^{(+)} - R_\mu^{(+)} - (\lambda - \mu) R_\lambda^{(+)} R_\mu^{(+)} = 0,$$

wo

$$R_\lambda^{(+)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n C_n.$$

Für $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$ gilt dann $R_\lambda^{(+)} + R_\lambda^{(-)} = R_\lambda$. Da $R_\lambda - R_\lambda^{(-)}$ im ganzen Λ regulär ist, so ist $R_\lambda^{(+)}$ im ganzen Λ und an $\lambda = \lambda_0$ definiert und regulär. Die Gleichung (1) gilt dann auch im ganzen Λ und an $\lambda = \lambda_0$. $R_\lambda^{(+)}$ ist also die Resolvente von $-R_0^{(+)}$.

Wenn man alle Potenzen $u^m v^{-n}$ ($m \geq 0, n > 0$) in $F(u, v)$ zusammenfasst, so ergibt sich

$$R_\lambda^{(+)} R_\mu^{(-)} = 0, \quad \text{und in ähnlicher Weise} \quad R_\lambda^{(-)} R_\mu^{(+)} = 0,$$

was für alle λ, μ in Λ gültig bleiben.

$$R_\lambda = R_\lambda^{(+)} + R_\lambda^{(-)} \quad \text{ist die Resolvente von} \quad -(R_0^{(+)} + R_0^{(-)}). \quad \text{Denn}$$

$$R_\lambda (R_0^{(+)} + R_0^{(-)}) = (R_\lambda^{(+)} + R_\lambda^{(-)}) (R_0^{(+)} + R_0^{(-)}) = (R_0^{(+)} + R_0^{(-)}) R_\lambda,$$

und

$$\begin{aligned} & (-R_0^{(+)} - R_0^{(-)}) + (R_\lambda^{(+)} + R_\lambda^{(-)}) + \lambda (-R_0^{(+)} - R_0^{(-)}) (R_\lambda^{(+)} + R_\lambda^{(-)}) \\ &= \left\{ -R_0^{(+)} + R_\lambda^{(+)} + \lambda R_0^{(+)} (-R_\lambda^{(+)}) \right\} + \left\{ -R_0^{(-)} + R_\lambda^{(-)} + \lambda R_0^{(-)} (-R_\lambda^{(-)}) \right\} \\ & \quad - \lambda (R_0^{(+)} R_\lambda^{(-)} + R_0^{(-)} R_\lambda^{(+)}) = 0. \end{aligned}$$

Da R_λ gleichzeitig die Resolvente von $(-R_0^{(+)} - R_0^{(-)})$ und die von A ist, so muss $A = -R_0^{(+)} - R_0^{(-)}$, wo $R_0^{(+)} R_0^{(-)} = R_0^{(-)} R_0^{(+)} = 0$. W. z. b. w.

Theorie von Riesz. F. Riesz hat die Theorie der Integralgleichung auf den abstrakten Raum erweitert⁽⁷⁾. Seine Theorie ist von Fremdholscher Determinante frei.

Eine lineare Transformation $\eta = A\xi$ in einer linearen, normierten, vollständigen Raum $\mathfrak{B}$ ($\xi \in \mathfrak{B}, \eta \in \mathfrak{B}$) heisst *vollstetig*, wenn A den Kugel $|\xi| \leq 1$ in eine kompakte Menge in $\mathfrak{B}$ überführt. Zum Beispiele ist die lineare Funktionaltransformation

(7) F. Riesz: Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. 41 (1918), 71-98.

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

vollstetig, wobei $K(x, y)$ eine stetige Funktion von (x, y) in $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$ bedeutet, und $\{f(x)\}$ der aus allen in $a \leq x \leq b$ stetigen Funktionen bestehende Funktionalraum mit der Metrik $\|f_1 - f_2\| = \text{Max}_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$ bedeutet.

Riesz hat die lineare Gleichung

$$(E + A)x = y, \quad (x \in \mathfrak{B}, y \in \mathfrak{B})$$

betrachtet, wo E die identische und A eine *vollstetige* Transformation in $\mathfrak{B}$ bedeuten. Einige der wichtigsten Resultaten von Riesz'scher Theorie, von denen wir hier Gebrauch machen wollen, sind die Folgenden:

Satz von Riesz 1⁽⁸⁾. Entweder besitzt $E + A$ die inverse (beschränkte) Transformation $(E + A)^{-1}$, oder besitzt die homogene Gleichung $(E + A)x = 0$ mindestens eine nicht triviale Lösung $x \neq 0$.

Bemerkung. Falls $(E + A)^{-1}$ existiert, so ist

$$(E + A)^{-1} = E + A^*,$$

wo A^* auch eine lineare, vollstetige Transformation ist.

Denn, man setze $(E + A)^{-1} = E + A^*$, dann folgt aus $(E + A)(E + A^*) = E$, dass $A^* = -A^*A - A$. Wie man leicht beweist, ist $-A^*A - A$ vollstetig.

Satz von Riesz 2⁽⁹⁾. Diejenigen Werte von λ , für die die Gleichung $(E + \lambda A)x = 0$ mindestens eine nicht triviale Lösung $x \neq 0$ besitzt, heißen *Eigenwerte*. Die Eigenwerte λ besitzen keine Häufungsstelle im Endlichen.

Satz 12. Die Resolvente R_λ einer vollstetigen Transformation A (im linearen, normierten vollständigen Raum $\mathfrak{B}$) ist eine meromorphe Funktion von λ .

Beweis: Es sei $\mathfrak{R}$ die Gesamtheit der linearen Transformationen von der Form $aE + A$, wo A eine lineare vollstetige Transformation in $\mathfrak{B}$ ist. Man kann dann leicht beweisen, dass $\mathfrak{R}$ ein linearer, metrischer, vollständiger Ring ist. Nach den Riesz'schen Sätzen und Hilfssatz 14 ist die Resolvente R_λ von A eine reguläre Funktion von λ bis auf die Eigenwerte, die alle isoliert sind. Für einen Eigenwert $\lambda = \lambda_0$ lässt sich R_λ also in die Laurentsche Reihe entwickeln

$$R_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n C_n.$$

Nach dem Beweis von Satz 11 gilt

$$R_\lambda^{(-)} - R_\mu^{(-)} - (\lambda - \mu)R_\lambda^{(-)}R_\mu^{(-)} = 0,$$

⁽⁸⁾ F. Riesz: a. a. O., S. 86., Satz 7.

⁽⁹⁾ F. Riesz: a. a. O., S. 90., Satz 12.

wo $R_\lambda^{(-)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-n} C_{-n}$. Setzt man $\lambda - \lambda_0 = u$ und $\mu - \lambda_0 = v$, so erhält man, wie im Beweise von Satz 11,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} u^{-\nu-1} v^{-n+\nu} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-m} C_{-n} u^{-m} v^{-n} = 0.$$

Also

$$C_{-(m+n+1)} = C_{-m} C_{-n}.$$

Daher $C_{-n} = C_{-n} C_{-1} = C_{-1} C_{-n}$, insbesondere $C_{-1}^2 = C_{-1}$. Und $C_{-(n+1)} = C_{-n} C_{-1}$, folglich $C_{-(n+1)} = C_{-2}^n$.

Da R_λ eine vollstetige Transformation ist und $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint R_\lambda d\lambda$ ist, so ist auch C_{-1} eine vollstetige Transformation. Durch C_{-1} wird der ganze Raum $\mathfrak{B}$ in einen linearen Teilraum $\mathfrak{L}_0$ übergeführt. Da $C_{-1}^2 = C_{-1}$, so bleiben alle Punkte von $\mathfrak{L}_0$ durch C_{-1} nicht verändert. Wegen der Vollstetigkeit von C_{-1} ist also der Kugel $|\lambda| \leq 1$ in $\mathfrak{L}_0$ kompakt. Nach einem Satz von Riesz⁽¹⁰⁾ ist $\mathfrak{L}_0$ dann von endlicher Dimension.

Aus der Gleichung $C_{-n} = C_{-n} C_{-1} = C_{-1} C_{-n}$ folgt, dass $\mathfrak{B}$ durch C_{-n} auf $\mathfrak{L}_0$ abgebildet wird. Da $C_{-(n+1)} = C_{-2}^n$ ist, so kann man $C_{-(n+1)}$ in der Form darstellen:

$$C_{-(n+1)} = D^n C_{-1},$$

wo D eine lineare Transformation von $\mathfrak{L}_0$ auf $\mathfrak{L}_0$ bedeutet. Also

$$R_\lambda^{(-)} = \left\{ E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(\lambda - \lambda_0)^n} \right\} \frac{C_{-1}}{\lambda - \lambda_0},$$

wo E_0 die identische Transformation von $\mathfrak{L}_0$ auf $\mathfrak{L}_0$ selbst ist.

Weil $\mathfrak{L}_0$ ein linearer Raum von endlicher Dimension ist, so lässt sich D durch eine quadratische Matrix endlicher Ordnung darstellen. Wählt man das Koordinatensystem in $\mathfrak{L}_0$ geeignet, so ist

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & a_k \end{pmatrix}.$$

Dafür, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(\lambda - \lambda_0)^n}$ für $|\lambda - \lambda_0| > 0$ konvergiert, ist es notwendig, dass $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$. Folglich für $n \geq k$, $D^n = 0$. Also für $n > k$, $C_{-n} = 0$. R_λ ist also eine meromorphe Funktion von λ . W. z. b. w.

Mathematisches Institut,
Kaiserliche Universität zu Osaka.

⁽¹⁰⁾ F. Riesz: a. a. O., S. 78, Hilfssatz 5.