2. Über die Struktur des endlichen, vollständig primären Ringes mit verschwindendem Radikalquadrat.

Von Kunihiko KODAIRA

(Eingegangen am 17. November, 1936.)

Es sei $\mathfrak{A}$ ein endlicher, vollständig primärer Ring, dessen Radikal $\mathfrak{R}$ der Bedingung:

$$\mathfrak{R}^2 = 0$$

genügt⁽¹⁾. In der vorliegenden Arbeit soll die Struktur solcher Ringe $\mathfrak{A}$ vollständig bestimmt werden.

1. Der Restklassenring

$$K = \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$$

ist ein endlicher Körper, also ein Galoisfeld $GF(q)$, wo q eine Potenz einer Primzahl p ist:

$$q = p^n.$$

Wegen $\mathfrak{R}^2 = 0$ folgt aus $a \equiv b \pmod{\mathfrak{R}}$, dass

$$ar = br, \quad ra = rb \quad \text{für jedes } r \text{ aus } \mathfrak{R}$$

ist. Das Produkt ar bzw. ra hängt also nur von der Restklasse $a \in K$ von $a \pmod{\mathfrak{R}}$ ab. Wir definieren das Produkt von $a \in K$ und $r \in \mathfrak{R}$ durch die Festsetzung:

$$ar = ar, \quad ra = ra.$$

Dadurch wird $\mathfrak{R}$ ersichtlich ein K - K -Doppelmodul. Für ein Element π aus dem Primkörper P aus K gilt dabei:

$$\pi r = \underbrace{r + \dots + r}_{\pi} = r\pi.$$

$\mathfrak{R}$ bildet somit einen Darstellungsmodul von K in sich, wobei P als Grundkörper angenommen wird. K ist nun ein separabler, galoisscher Erweiterungskörper von P ; $\mathfrak{R}$ ist also vollständig reduzibel und jeder irreduzible Bestandteil ist eingliedrig. Unter geeigneter Wahl der K -basis hat also $\mathfrak{R}$ die Form:

$$\mathfrak{R} = r_1 K + r_2 K + \dots + r_s K$$

(1) Vgl. M. Deuring, *Algebren* (1935), S. 18.

und es gilt dabei

$$\alpha r_i = r_i \alpha^{A_i}, \quad \alpha \in K,$$

wo A_i einen Automorphismus von K bedeutet.

Aus der Eindeutigkeit der direkten Summenzerlegung ergibt sich, dass die Anzahl der Basiselemente r_i , die den Automorphismus A induzieren, von der speziellen Wahl der Basis nicht abhängt.

2. ρ_1 sei ein primitives Element von K und g_1 ein zur Restklasse ρ_1 gehöriges Element aus $\mathfrak{A}$. Dann ist

$$\rho_1^{q-1} = 1,$$

also

$$g_1^{q-1} \equiv e \pmod{\mathfrak{R}},$$

oder

$$g_1^{q-1} = e + r, \quad r \in \mathfrak{R},$$

wo e das Einselement von $\mathfrak{A}$ ist. Somit ist

$$(g_1^p)^{q-1} = (g_1^{q-1})^p = (e+r)^p = e + p \cdot r = e.$$

Nun gehört g_1^p zur Restklasse $\rho = \rho_1^p$, und ρ ist auch ein primitives Element von K . Setzen wir nun

$$g = g_1^p,$$

so ist die Reihe

$$0, e, g^1, g^2, \dots, g^{q-2}$$

ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{R}$ und zum System $0, 1, \rho, \dots, \rho^{q-2}$ multiplikativ isomorph, weil $g^{q-1} = e$ ist.

Schreiben wir dann

$$g^l = g_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha = \rho^l,$$

so gilt

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad g_1 = e,$$

und zugleich

$$g_\alpha + g_\beta \equiv g_{\alpha+\beta} \pmod{\mathfrak{R}}.$$

Das letztere lässt sich natürlich auch so schreiben

$$g_\alpha + g_\beta = g_{\alpha+\beta} + r_{\alpha,\beta} \quad \text{mit} \quad r_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{R},$$

wobei die q^2 Elemente $r_{\alpha,\beta}$ einigen Bedingungen genügen müssen:

Aus $g_\alpha + g_\beta = g_\beta + g_\alpha$ folgt nämlich

$$\text{I. } r_{\alpha,\beta} = r_{\beta,\alpha};$$

$$\text{aus } g_\tau(g_\alpha + g_\beta) = g_\tau g_\alpha + g_\tau g_\beta, \quad (g_\alpha + g_\beta)g_\tau = g_\alpha g_\tau + g_\beta g_\tau,$$

$$\text{II. } \gamma \cdot r_{\alpha, \beta} = r_{\gamma\alpha, \gamma\beta}, \quad r_{\alpha, \beta} \cdot \gamma = r_{\alpha\gamma, \beta\gamma},$$

$$\text{und aus dem Assoziativgesetz } (g_\alpha + g_\beta) + g_\tau = g_\alpha + (g_\beta + g_\tau),$$

$$\text{III. } r_{\alpha+\beta, \gamma} + r_{\alpha, \beta} = r_{\alpha, \beta+\gamma} + r_{\beta, \gamma}.$$

Jedes Element a aus $\mathfrak{A}$ ist nun eindeutig als Summe der Gestalt

$$a = g_\alpha + r, \quad r \in \mathfrak{R},$$

darstellbar, und es gilt:

$$(g_\alpha + r) + (g_\beta + r') = g_{\alpha+\beta} + (r_{\alpha, \beta} + r + r'), \quad (1)$$

$$(g_\alpha + r)(g_\beta + r') = g_{\alpha\beta} + (ar' + r\beta). \quad (2)$$

Also ist die Struktur von $\mathfrak{A}$ durch das System $r_{\alpha, \beta}$ vollständig bestimmt.

Umgekehrt sei K ein Galoisfeld und $\mathfrak{R}$ ein K - K -Doppelmodul. Wenn man in $\mathfrak{R}$ den Bedingungen I, II, III, genügende Elemente $r_{\alpha, \beta}$ beliebig wählt, und Summen und Produkte zweier Elemente der Menge $\mathfrak{A}$ aller formalen Ausdrücke

$$g_\alpha + r, \quad r \in \mathfrak{R},$$

durch die Formeln (1) und (2) definiert, so wird $\mathfrak{A}$ ein vollständig primärer Ring mit Radikal $\mathfrak{R}$, und es gilt dabei $K \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^2 = 0$.

3. Gemäss der in § 1 angegebenen Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in direkte Summanden setzen wir nun

$$r_{\alpha, \beta} = \sum_{i=1}^s r_i \varphi_i(\alpha, \beta) \quad \text{mit } \varphi_i(\alpha, \beta) \in K.$$

Die Bedingungen I, II, III, im letzten Paragraphen sind dann mit folgenden Bedingungen für φ_i äquivalent:

$$\text{I'. } \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi_i(\beta, \alpha),$$

$$\text{II'_1. } \gamma^{A_i} \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi_i(\gamma\alpha, \gamma\beta),$$

$$\text{II'_2. } \varphi_i(\alpha, \beta) \cdot \gamma = \varphi_i(\alpha\gamma, \beta\gamma),$$

$$\text{III'. } \varphi_i(\alpha + \beta, \gamma) + \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi_i(\alpha, \beta + \gamma) + \varphi_i(\beta, \gamma).$$

Aus II'_1 und II'_2 folgt nun

$$\gamma^{A_i} \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi_i(\alpha, \beta) \gamma.$$

Ist A_i ein nicht-identischer Automorphismus; so ist

$$\gamma^{A_i} \neq \gamma$$

für geeignetes γ aus K ; also muss

$$\varphi_i(\alpha, \beta) = 0 \quad (3)$$

sein. Ist aber A_i der identische Automorphismus, so sind Π'_1 und Π'_2 äquivalent mit

$$\text{II}'. \quad \gamma \varphi_i(\alpha, \beta) = \varphi_i(\gamma \alpha, \gamma \beta).$$

4. Die Anzahl aller möglichen Funktionen von n Variablen im Galoisfeld $GF(q)$ ist q^{q^n} . Die q^{q^n} ganz-rationale Funktionen

$$\sum_{0 \leq i_1 \leq q-1} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

sind aber sämtlich verschieden. Also ist jede Funktion in $GF(q)$ ganz-rational darstellbar.

Insbesondere lässt sich eine den Bedingungen I', II', III' genügende Funktion $\varphi(x, y)$ in der Form schreiben:

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq q-1 \\ 0 \leq k \leq q-1}} a_{ik} x^i y^k,$$

wobei den Koeffizienten a_{ik} gewisse Bedingungen auferlegt werden. Nach I' gilt nämlich

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad (4)$$

und nach II'

$$\sum a_{ik} z x^i y^k = \sum a_{ik} x^i y^k z^{i+k},$$

oder, wegen $z^q = z$,

$$\sum a_{ik} z x^i y^k = \sum_{j=0}^{q-1} z^j \sum_{i+k=j} a_{ik} x^i y^k + \sum_{j=1}^{q-1} z^j \sum_{i+k=j+(q-1)} a_{ik} x^i y^k.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten ergibt sich hieraus

$$a_{ik} = 0, \quad \text{wenn} \quad i+k \neq 1 \quad \text{und} \quad \neq q.$$

$\varphi(x, y)$ hat also die Form

$$\varphi(x, y) = a_0(x+y) + \sum_{i=1}^{q-1} a_i x^i y^{q-i}, \quad (5)$$

wobei $a_0 = a_{01} = a_{10}$, $a_i = a_{q-i} = a_{i, q-i} = a_{q-i, i}$ gesetzt ist. Wir können danach ausrechnen:

$$\begin{aligned}\varphi(x+y, z) + \varphi(x, y) &= \alpha_0(2x+2y+z) + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} x^{i-j} y^j z^{q-i} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i (x^i y^{q-i} + y^i z^{q-i} + z^i x^{q-i}).\end{aligned}$$

Aus Bedingung III' folgt nun, dass $\alpha_0 = 0$ und

$$\binom{q-\mu}{\lambda} \alpha_\mu = \binom{q-\lambda}{\mu} \alpha_\lambda \quad \text{für } \lambda, \mu \geq 1, \lambda + \mu \leq q-1 \quad (6)$$

ist. Aus

$$(x+1)^{p^m} \equiv x^{p^m} + 1 \pmod{p}$$

ergibt sich aber

$$(x+1)^{p^m-1} \equiv x^{p^m-1} - x^{p^m-2} + \dots \pm 1 \pmod{p},$$

also ist

$$\binom{p^m-1}{\nu} \equiv \pm 1 \pmod{p}. \quad (7)$$

Aus

$$(x+1)^{p^m \lambda} \equiv (x^{p^m} + 1)^\lambda \pmod{p}$$

erhält man ferner

$$\binom{p^m \lambda}{p^m \mu} \equiv \binom{\lambda}{\mu} \pmod{p}, \quad (8)$$

$$\binom{p^m \lambda}{\nu} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{für } \nu \not\equiv 0 \pmod{p^m}. \quad (9)$$

Nun setzen wir in (6) $\mu = p^m$, $m \leq n-2$ und $\lambda = p^{n-1}$, so haben wir

$$\binom{p^n - p^m}{p^{n-1}} \alpha_{p^m} = \binom{p^n - p^{n-1}}{p^m} \alpha_{p^{n-1}}.$$

Wegen (7), (8), (9) muss also

$$\alpha_{p^m} = 0 \quad (m \leq n-2) \quad (10)$$

sein.

Man setze nun in (6) $\mu = \mu_0 p^m$, $m \leq n-2$, $(\mu_0, p) = 1$, dann gilt

$$\binom{p^n - \mu_0 p^m}{p^m} \alpha_{\mu_0 p^m} = \binom{p^n - p^m}{\mu_0 p^m} \alpha_{p^m},$$

also nach (10)

$$\binom{p^{n-m}-\mu_0}{1} \alpha_{\mu_0 p^m} = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad \alpha_{\mu_0 p^m} = 0. \quad (11)$$

Für $\mu = \mu_0 p^{n-1}$, $\lambda = \lambda_0 p^{n-1}$ ist

$$\binom{p^n - \mu_0 p^{n-1}}{\lambda_0 p^{n-1}} \alpha_{\mu_0 p^{n-1}} = \binom{p^n - \lambda_0 p^{n-1}}{\mu_0 p^{n-1}} \alpha_{\lambda_0 p^{n-1}},$$

oder

$$\binom{p - \mu_0}{\lambda_0} \alpha_{\mu_0 p^{n-1}} = \binom{p - \lambda_0}{\mu_0} \alpha_{\lambda_0 p^{n-1}}.$$

Danach erhält man

$$\alpha_{\mu_0 p^{n-1}} = \frac{(p-1)!}{\mu_0! (p-\mu_0)!} \alpha_{p^{n-1}}. \quad (12)$$

Nach (11) und (12) muss die Funktion $\varphi(x, y)$ schliesslich die Form

$$\varphi(x, y) = \alpha \cdot \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{\mu! (p-\mu)!} x^{p^{n-1}\mu} y^{p^{n-1}(p-\mu)}$$

haben. Umgekehrt genügt diese Funktion offenbar den Bedingungen I', II', III'.

5. Setzen wir also

$$\psi(x, y) = \sum_{\mu=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{\mu! (p-\mu)!} x^{p^{n-1}\mu} y^{p^{n-1}(p-\mu)},$$

so können wir

$$\varphi_i(\alpha, \beta) = \alpha_i \psi(\alpha, \beta)$$

und

$$r_{\alpha, \beta} = \sum_i r_i \alpha_i \cdot \psi(\alpha, \beta)$$

schreiben, wobei r_i die den identischen Automorphismus induzierenden Basiselemente durchläuft. Wenn $r^* = \sum_i r_i \alpha_i \neq 0$ ist, können wir r^* als ein Basiselement r_1 von $\Re$ annehmen; dann wird

$$r_{\alpha, \beta} = r_1 \cdot \psi(\alpha, \beta).$$

Andernfalls ist

$$r_{\alpha, \beta} = 0 \quad \text{für alle } \alpha, \beta.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Jedes Element a aus $\mathfrak{A}$ ist eindeutig als die Summe:*

$$a = g_a + \sum_{i=1}^s r_i a_i, \quad a, a_i \in K,$$

darstellbar. Dabei ist das Produkt bzw. die Summe zweier Elemente nach der Regel gebildet:

$$\left(g_a + \sum_{i=1}^s r_i a_i\right) \left(g_\beta + \sum_{i=1}^s r_i \beta_i\right) = g_{a\beta} + \sum_{i=1}^s r_i (a^{A_i} \beta_i + \beta a_i),$$

$$\left(g_a + \sum_{i=1}^s r_i a_i\right) + \left(g_\beta + \sum_{i=1}^s r_i \beta_i\right) = g_{a+\beta} + r_1 (\varphi(a, \beta) + a_1 + \beta_1) + \sum_{i=2}^s r_i (a_i + \beta_i);$$

wobei A_i Automorphismus von K bedeutet, und $A_1 = 1$. Die Funktion $\varphi(a, \beta)$ ist entweder identisch gleich Null, oder gleich der oben angegebenen Funktion $\psi(a, \beta)$.

6. Ist $\varphi = 0$, bildet die Gesamtheit aller g_a einen zum K isomorphen Teilkörper von $\mathfrak{A}$. Im Fall $\varphi = \psi$ enthält $\mathfrak{A}$ dagegen keinen Teilkörper mit dem Einselement e ; denn die additive Ordnung von e ist dann p^2 , also keine Primzahl; in der Tat ist der Restklassenring des Ringes der ganz-rationalen Zahlen (mod p^2) ein Ring mit $\varphi = \psi$, und die durch ψ eindeutig bestimmte Summe $p \cdot e$ ist darin nicht gleich Null. Also sind der Ring mit $\varphi = \psi$ und der Ring mit $\varphi = 0$ sicher nicht zueinander isomorph. Es gilt also der

Satz 2. Die Funktion φ und die Anzahl s_A der zu A gehörigen Basiselemente r_i sind durch die Struktur von $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist die Struktur von $\mathfrak{A}$ durch φ und s_A eindeutig bestimmt.

Ist K insbesondere ein Primkörper, so gibt es keinen anderen Automorphismus als den identischen; also ist $\mathfrak{A}$ kommutativ.