14. Über die Grössenordnung des absoluten Betrages
von einer linearen inhomogenen Form, VIII.⁽¹⁾

Über einen Satz von Khintchine.

Von Seigo MORIMOTO, Hiroshima.

(Eingegangen am 25. Januar, 1938.)

1. Herr Khintchine hat den folgenden Satz bewiesen⁽²⁾.

Khintchinescher Satz. Wenn α eine irrationale Zahl ist und die Gleichung $\alpha x - y + \beta = 0$ keine ganzzahlige Lösung (x, y) , wo $x > 0$, hat, wird die Ungleichung

$$|\alpha x - y + \beta| < \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{5} x}$$

durch unendlich viele Paare ganzer Zahlen x, y , wo $x > 0$, befriedigt.

Dieser Satz suggeriert uns eine neuere Richtung unsres Problems, d. h. die Untersuchung der Grössenordnung von $|\alpha x - y + \beta|$ in einer Halbebene. Wie er bemerkt, kann der Satz in dieselben Formen nicht mehr verschärft werden, weil die Gleichung $\alpha x - y + \beta = 0$ in der Halbebene $x \leq 0$ ganzzahlige Lösung haben kann. Aber wir können vermuten, dass in dem Falle, wo die Ungleichung (1) nicht mehr verschärft werden kann, die Gleichung $\alpha x - y + \beta = 0$ in $x \leq 0$ eine Lösung oder eine sehr scharf angenäherte Lösung hat. Diese Überlegung führt mich nach der Aufgabe, die Beziehung zwischen die unteren Grenzen von $|x(\alpha x - y + \beta)|$ für die beiden Halbebenen $x > 0$ und $x \leq 0$ zu untersuchen.

2. In dem ersten Teile dieser Arbeit⁽³⁾ habe ich die Näherungspunkte von der Form $\alpha x - y + \beta$ definiert und die Beziehung zwischen diesen Punkten untersucht. Insbesondere habe ich gezeigt, dass es unendlichviele Gruppen der Näherungspunkte A', B', C', D' gibt, von der Beschaffenheit, dass sie die Ecken einer Parallelogramm von dem Inhalt 1 bilden und von denen A' und B', C' bzw. D' in I, II bzw. IV liegen, wo I, II, III, IV die vier

(1) Ein Teil dieser Arbeit habe ich in Osaka Sijo Danwakaisi No. 98 (1936) veröffentlicht.

(2) Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes, Math. Ann. **111**, 631-637.

(3) Teil I dieser Arbeit ist in Vol. 3 (1926), 1-26 dieses Journals veröffentlicht. Teil II ebenda 91-106. Teil III, 4 (1927), 41-48. Teil IV, ebenda, 149-167. Teil V, 5 (1929), 295-316. Teil VI, 6 (1929), 349-362. Teil VII (Number der Teilen wegnnehmend) Tohoku Math. Journal, 38 (1933), 7-33. I-IV unter meinem früheren Familiennamen S. Fukasawa.

Teilen der Ebene bedeuten, in welchen die Ebene von $L: ax - y + \beta = 0$ und Y -Achse geteilt wird. (Die vier Näherungspunkte P_m, P'_l, P_n, Q_n in den Seiten 6-7 dort. Diese Tatsache können wir leicht beweisen.) Wir führen durch die Affintransformation, die den Inhalt und Y -Ache nicht ändert, die Gerade L in X -Achse, die Teilen I, II, III, bzw. IV in ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Quadranten und C' in einem Punkte mit den Koordinaten $(-a, a)$. Seien B, D, A die neuen Lagen der Punkte B', D', A' und $(x, y), (u, -v), (x+u+a, y-v-a)$ ihre Koordinaten. Bezeichnet man z.B. mit $\varphi(A')$ die Werte von $|x(ax - y + \beta)|$ für die Koordinaten (x, y) von A' , so ist

$$\varphi(B') = xy, \quad \varphi(C') = a^2, \quad \varphi(D') = uv, \quad \varphi(A') = (x+u+a)(y-v-a).$$

Wir halten a fest und suchen die obere Grenze von

$$k = \text{Min}(xy, uv, (x+u+a)(y-v-a)).$$

3. Zuerst zeigen wir, dass diese obere Grenze nur in dem Falle

$$xy = uv = (x+u+a)(y-v-a) \quad (2)$$

erreicht werden kann. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Hyperbeln

$$xy = \pm k. \quad (3)$$

Die Punkte A, B, D liegen alle innerhalb oder auf der Grenze von (3) und wenigstens eine von ihnen liegt auf der Grenze. Wir verschieben die Strecke AB auf sich selbst, bis ihr Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Sehne, die die Gerade AB von (3) schneidet, übereinstimmt und k so gross bestimmen, dass A und B oder D auf (3) liegen. Diese Lagen der Punkte A, B, D und den Inhalt des Parallelogramms $ABCD$ festhaltend, durch Vergrössern von k , können wir erreichen, dass alle Punkte A, B, D auf (3) liegen. Darum braucht man nur den Fall (2) zu betrachten.

4. Weil der Inhalt von $ABCD$ gleich 1 ist,

$$(x+a)(v+a) + (y-a)(u+a) = 1. \quad (4)$$

Wir setzen

$$xy = z \quad (5)$$

und eliminieren x, y, v aus (2), (4) und (5). Wir haben aus (4)

$$\left. \begin{aligned} xv + av + ax + yu - au + ay &= 1, \\ -xv - av - ax + yu - au + ay - a^2 - uv &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ aus (2)}$$

$$\left. \begin{aligned} 2yu - 2au + 2ay - a^2 - uv &= 1 \\ 2xv + 2av + 2ax + a^2 + uv &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\frac{z}{x}u - 2au + 2a\frac{z}{x} - a^2 - z &= 1 \\ 2x\frac{z}{u} + 2a\frac{z}{u} + 2ax + a^2 + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{1 + 2au + a^2 + z}{2(a + u)} \\ x &= \frac{1 - 2a\frac{z}{u} - a^2 - z}{2\left(\frac{z}{u} + a\right)} \end{aligned} \right\}$$

$$z = \frac{(1 + 2au + a^2 + z)\left(1 - 2a\frac{z}{u} - a^2 - z\right)}{4\left(\frac{z}{u} + a\right)(a + u)}$$

$$3a(3z + a^2 - 1)u^2 + (5z^2 + 10a^2z + z^4 - 1)u + 2az(3z + a^2 + 1) = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichung muss eine positive Wurzel haben. Darum besteht eine der beiden Ungleichungen

$$3z + a^2 - 1 < 0 \quad (7)$$

$$5z^2 + 10a^2z + a^4 - 1 < 0, \quad (8)$$

weil das konstante Glied der Gleichung positive ist. Aus (7) und (8)

$$z < \frac{1 - a^2}{3} \quad \text{oder} \quad z < \sqrt{\frac{1 + 4a^4}{5}} - a^2.$$

4. Wenn wir $\frac{1 - a^2}{3} < \sqrt{\frac{1 + 4a^4}{5}} - a^2$ setzen, so haben wir

$$(1 - a^2)(1 - 4a^2) > 0.$$

Da $a < 1$ ist, $\frac{1 - a^2}{3} \leq \sqrt{\frac{1 + 4a^4}{5}} - a^2$ für $a^2 \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{1 - a^2}{3} > \sqrt{\frac{1 + 4a^4}{5}} - a^2 \quad \text{für} \quad a^2 > \frac{1}{4},$$

also

$$z < f(a^2)$$

wo

$$f(a^2) = \frac{1-a^2}{3} \quad \text{für } a^2 > \frac{1}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{1+4a^2}{5}} - a^2 \quad \text{für } a^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Wir bemerken dabei, dass $f(a^2)$ eine abnehmende Funktion von a^2 ist. Bezeichnet man

$$\lim_{x>0} |x(ax-y+\beta)| = P, \quad \lim_{x<0} |x(ax-y+\beta)| = N \quad \text{für die ganzen } x, y,$$

so ist $N \leq a^2$, $P \leq \text{Min.}(xy, uv, (x+u+a)(y-v-a))$. Daher haben wir

$$P \leq f(a^2) \leq f(N) = \sqrt{\frac{1+4N^2}{5}} - N \quad \text{für } N \leq 1/4.$$

Wenn $N > 1/4$ ist, so ist $P \leq f(a^2) \leq f(N) = \frac{1-N^2}{3} < 1/4$. Wir denken dabei die rechte und die linke Seite von Y -Achse vertauscht, so haben wir

$$N \leq \sqrt{\frac{1+4P^2}{5}} - P$$

$$P^2 + 10NP + 5N^2 - 1 \leq 0$$

$$P \leq \sqrt{1+20N^2} - 5N. \quad (10)$$

Dies gibt ein schärferes Resultat als die Ungleichung $P < (1-N)/3$, weil, wenn wir

$$\frac{1-N}{3} \geq \sqrt{1+20N^2} - 5N$$

setzen, so die evidente Ungleichung $(4N-1)(N+2) \geq 0$ folgt. Daraus haben wir den

Satz I.
$$\left. \begin{aligned} P &\leq \sqrt{\frac{1+4N^2}{5}} - N && \text{für } N \leq 1/4 \\ P &\leq \sqrt{1+20N^2} - 5N && \text{für } N > 1/4 \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Bemerkung. Da die rechte Seite von (11) nicht grösser als $f(N) \leq 1/\sqrt{5}$ ist, enthält dieser Satz den KHINTCHINESCHEN Satz als einen speziellen Fall. Da aber die rechte Seite von (11) im Falle $N \geq 1/4$ kleiner als $1/4$ ist, d. h. $\text{Min}(P, N) \leq 1/4$, enthält dieser Satz auch den MINKOWSKISCHEN Satz.

5. Zunächst denken wir die Bedingung dafür, dass die Gleichung (6) reelle Wurzel hat, nämlich

$$(5z^2 + 10a^2z + a^4 - 1)^2 \geq 4a^2z\{(3z + a^2)^2 - 1\}. \quad (12)$$

Unter den Bedingungen

$$a^2 \leq 1/4, \quad z < f(a^2)$$

ist
$$5z^2 + 10a^2z + a^4 - 1 < 0.$$

Daher nimmt die linke Seite von (12) von $(a^4 - 1)^2$ bis 0 monoton ab, wenn z von 0 bis $f(a^2)$ zunimmt. Die rechte Seite ist aber negativ für $z < \frac{1-a^2}{3}$, null für $z = \frac{1-a^2}{3}$ und nimmt monoton mit z zu für $z > \frac{1-a^2}{3}$. Daher hat

$$(5z^2 + 10a^2z + a^4 - 1)^2 - 4a^2z\{(3z + a^2)^2 - 1\} = 0 \quad (13)$$

eine und nur eine Wurzel z_1 zwischen $(1-a^2)/3$ und $f(a^2)$ und besteht (12) für $z \leq z_1$. Überdies nimmt die linke Seite von (12) ab und die rechte Seite zu, wenn z konstant bleibt und a^2 zunimmt. Daher ist

$$z_1 = F(a^2)$$

eine monoton abnehmende Funktion von a^2 für $a^2 \leq 1/4$. Folglich hat $F(a^2)$ auch die monoton abnehmende Umkehrfunktion $a^2 = F^{-1}(z_1)$ für $0 \leq z_1 \leq 1/4$ ($\frac{1}{4} = F(\frac{1}{4})$). Daraus haben wir durch die ähnliche Überlegung wie oben den folgenden

Satz II. $P \leq F(N)$ für $N \leq 1/4$ und

$$P \leq F^{-1}(N) \quad \text{für } N > 1/4. \quad (14)$$

6. Endlich suchen wir nach der angenäherte Darstellung von dem Satz II. Sei $g(a^2)$ eine Funktion von a , welche die folgenden Ungleichungen befriedigt,

$$\frac{1-a^2}{3} \leq g(a) \leq \sqrt{\frac{1+4a^4}{5}} - a^2$$

$$G\{g(a^2)\} < 0,$$

wo $G(z)$ die linke Seite von (12) bedeutet, so ist

$$F(a^2) < g(a^2)$$

und haben wir das Resultat

$$z < g(a^2) \quad \text{oder} \quad P < g(N).$$

Für $a^2 \leq 1/4$ haben wir die Entwicklung

$$z = \frac{1}{5} - \frac{2a}{5\sqrt[4]{5}} - \dots$$

Nun setze ich

$$g(a^2) = g_1(a^2) = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - \frac{2a}{5\sqrt[4]{5}} - \frac{9a^2}{25}$$

so folgt

$$G\{g_1(a^2)\} = 16 \left(-\frac{7a^3}{25\sqrt[4]{5}} + \frac{98a^4}{125} - \frac{241a^5}{125\sqrt[4]{5}} - \frac{777a^6}{625\sqrt[4]{5}} \right. \\ \left. + \frac{2008a^7}{3125\sqrt[4]{5}} + \frac{3730a^8}{15625} \right).$$

Bezeichnet man mit

$$\frac{a}{\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{5}} = t$$

$$G(g_1(a^2)) = 16t^3(-7 + 98t - 241t^2 - 777t^3 + 2008t^4 + 3730t^5) \\ = 16t^3\varphi(t),$$

so ist $\frac{d}{dt}(-7 + 98t - 241t^2 - 777t^3) = 98 - 482t - 2331t^2 > 0$ für $0 < t < 0.12$.
Folglich ist $\varphi(t)$ eine zunehmende Funktion in $0 < t < 0.12$. Weil $\varphi(t) = 0$ eine Wurzel $t = 0.1042$ hat, haben wir

$$\varphi(t) < 0 \quad \text{für} \quad t \leq 0.1042$$

$$\text{also} \quad a \leq 0.3484$$

$$a \leq 0.1214$$

d. h.

$$G(g_1(a^2)) < 0$$

$$f(a^2) < g_1(a^2) \quad \text{für} \quad a \leq 0.1214. \quad (15)$$

7. Zunächst betrachten wir die Umgebung von $a^2 = 1/4$. Zu dieser Zwecke setzen wir

$$t = z - \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4} - a^2.$$

Dann geht $G(z)$ über in

$$G(z) = G_1(t) = (5t^2 + 5t - 10bt - 3b + b^2) \\ - (3t - b)(3t - b + 2)(1 - 2b) \left(t + \frac{1}{4} \right).$$

Ich setze

$$g(a^2) = g_2(a^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - a^2 \right) + \frac{11}{9} \left(\frac{1}{4} - a^2 \right)^2,$$

also

$$t = \frac{b}{3} + \frac{11b^2}{9}$$

so folgt

$$\begin{aligned} G_1(t) &= \left(\frac{4}{3}b - \frac{13}{3}b^2 + \frac{220}{27}b^3 - \frac{605}{81}b^4 \right)^2 \\ &\quad + \frac{11}{3}b^2 \left(\frac{11}{3} + b^2 + 2 \right) (4b-1) \left(\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{11b^2}{9} \right) \\ &< \left(\frac{4}{3}b - \frac{13}{3}b^2 + \frac{74}{9}b^3 - \frac{67}{9}b^4 \right)^2 + \frac{11b^2}{9^2 \times 4} (6 + 11b^2) (4b-1) (9 + 12b + 44b^2) \\ &= \frac{a^2}{9^2 \times 4} (-18 - 2160b + 12363b^2 - 15000b^3 \\ &\quad + 43292b^4 - 18368b^5 + 17956b^6). \end{aligned}$$

Für $b < 0.15$

$$\begin{aligned} &-18 - 2160b + 12363b^2 - 15000b^3 + 43292b^4 - 18368b^5 + 17956b^6 \\ &< -18 - 2160b + 1855b - 15000b^3 + 6494b^3 - 18368b^5 + 2694b^5 \\ &< 0 \end{aligned}$$

d. h. für $b < 0.15$, also $0.1 < a \leq 1/4$

$$G(g_2(a^2)) < 0$$

$$f(a^2) < g(a^2). \quad (16)$$

8. Wie vorher haben wir (15) und (16). Da

$$\text{für } a^2 = 0.1214 \quad g(a^2) = f(a^2) = 0.3103$$

$$\text{und } \quad = 0.1257 \quad g(a^2) = g(0.1214) = 0.3103$$

ist, können wir $g(a^2) = 0.3103$ für $0.1214 < a^2 < 0.1257$ setzen. Überdies bemerkt man, dass

$$g_1^{-1}(z) = \frac{5\sqrt{5}\sqrt{10-9\sqrt{5}z}-1}{81}$$

$$g_2^{-1}(z) = \frac{17-6\sqrt{44z-10}}{44}.$$

Daraus haben wir den

Satz III. $P < H(N)$

$$\text{wo } H(N) = \frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{N}}{5\sqrt[4]{5}} - \frac{9N}{25} \quad \text{für } 0 \leq N \leq 0.1214$$

$$H(N) = 0.3103 \quad \text{für } 0.1214 < N \leq 0.1257$$

$$H(N) = \frac{1-N}{3} + \frac{11}{9} \left(\frac{1}{4} - N \right)^2 \quad \text{für } 0.1257 < N \leq 0.25$$

$$H(N) = \frac{17-6\sqrt{44N-10}}{44} \quad \text{für } 0.25 < N < 0.3103$$

$$H(N) = \frac{5\sqrt{5}\sqrt{10-9\sqrt{5}N}-1}{81} \quad \text{für } 0.3103 < N \leq 0.4472$$

$$= 1/\sqrt{5}.$$