JAPANESE JOURNAL OF MATHEMATICS

TRANSACTIONS

1. Zur Idealtheorie der einartigen Ringbereiche mit dem Teilerkettensatz, III.

Von Yasuo AKIZUKI.

(Eingegangen am 7. März, 1938.)

Diese Arbeit ist die Fortsetzung meiner vorigen zwei Mitteilungen.⁽¹⁾

KAPITEL III.

Primärintegritätsbereiche, in denen die Basis jedes Ideals höchstens dreigliedrig ist.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein den Teilerkettensatz erfüllender Primärintegritätsbereich, in dem $\mathfrak{p}^n$ n -gliedrig ist, wo n eine vorgegebene Zahl bedeutet. Wenn $n = 1$ oder 2 ist, so gelten alle im vorigen Kapitel angegebenen Behauptungen, weil jeder Körper mindestens zwei Elemente besitzt. Wenn $n \geq 3$ ist, so ist es möglich, dass $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ höchstens $n-1$ Elemente besitzt. Wir untersuchen in diesem Kapitel für den Primärintegritätsbereich, in dem die Basis jedes Ideals höchstens dreigliedrig und mindestens die eines Ideals gerade dreigliedrig ist, die Existenz des Falls, wo die Gleichung $\mathfrak{p}^3 = \pi\mathfrak{p}^2$ keineswegs besteht, und dann die Struktur des Grundbereiches in solchem Fall. Nach Hauptsatz 1 können wir unsere Betrachtungen auf den Bereich beschränken, in dem $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Primkörper von der Charakteristik 2 ist.

In unserem Bereich ist $\chi(\mathfrak{p}^3) = 3$; denn, sonst würde nach Satz 2 $\mathfrak{p}^3 = \pi\mathfrak{p}^2$, und mithin $\chi(\mathfrak{p}^2) \leq 2$ sein, und weiter ergäbe sich, dass jedes Ideal höchstens zweigliedrig ist. Ferner muss $\chi(\mathfrak{p}) = 2$ oder 3 sein, weil aus $\chi(\mathfrak{p}) = 1$ folgt die Gleichung $\chi(\mathfrak{p}^3) = 1$. Auch ist $\chi(\mathfrak{p}^2) = 3$, weil aus $\chi(\mathfrak{p}^2) \leq 2$ geht $\chi(\mathfrak{p}^3) \leq 2$ hervor.

§ 8. Fall: $\mathfrak{p} = (\pi, \alpha, \beta)$.

In diesem Paragraphen untersuchen wir über den Fall $\chi(\mathfrak{p}) = 3$:

⁽¹⁾ Y. Akizuki, Zur Idealtheorie der einartigen Ringbereiche mit dem Teilerkettensatz, I, II. Jap. Journ. of Math., **XIV** (1938).

$$p = (\pi, \alpha, \beta).$$

Es gibt ersichtlich ein Element π mit $\pi^2 \not\equiv 0 \pmod{p^3}$. Auch darf man annehmen, dass $\pi\alpha \not\equiv 0 \pmod{(\pi^2, p^3)}$ ist. In der Tat gibt es α', β' mit $p = (\pi, \alpha', \beta')$, $\pi\alpha' \equiv \pi\beta' \equiv 0 \pmod{p^3}$, wenn $\pi\alpha \equiv 0, \pi\beta \equiv 0 \pmod{(\pi^2, p^3)}$ sind. Daher muss α'^2 oder $\beta'^2 \not\equiv 0 \pmod{(\pi^2, p^3)}$ sein, denn sonst würde $p^2 = (\pi^2, \alpha'\beta')$, folglich $\chi(p^2) = 2$ sein. Ist nun $\alpha'^2 \not\equiv 0 \pmod{(\pi^2, p^3)}$, so nehme man $\bar{\pi} = \pi + \alpha'$. Dann sind $\bar{\pi}^2, \bar{\pi}\alpha' \not\equiv 0 \pmod{p^3}$ und mod p^3 voneinander unabhängig, da $\bar{\pi}^2 \equiv \pi^2 + \alpha'^2, \bar{\pi}\alpha' \equiv \alpha'^2 \pmod{p^3}$ sind.

Wenn $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha, \pi\beta)$ für diese π, α ist, so gilt ersichtlich die Gleichung $p^2 = \pi p$. Im andern Fall besteht auch die Gleichung von derselben Form.⁽²⁾ Wir beweisen dies schrittweise im folgenden.

Wenn $\pi^2, \pi\alpha$ und $\pi\beta$ mod p^3 abhängig sind, so kann man, wie leicht ersichtlich, annehmen, dass $\pi\beta \equiv 0 \pmod{p^3}$ ist.

Fall A: Es sei $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha\beta)$.⁽³⁾

Ist $\alpha^2 \not\equiv 0 \pmod{(\pi\alpha, \alpha\beta, p^3)}$, so ist $p^2 = (\alpha^2, \alpha\pi, \alpha\beta) = \alpha p$, w. z. b. w.

Es sei $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{(\pi\alpha, \alpha\beta, p^3)}$ und im Restklassenmodul p^2/p^3 sei

$$\alpha^2 = k'\pi\alpha + k''\alpha\beta, \quad \beta^2 = l\pi^2 + l'\pi\alpha + l''\alpha\beta,$$

wobei k, l Elemente im Restklassenkörper $\mathbb{R}/p = K$ (Primkörper von der Charakteristik 2) bedeuten. Dann können die beiden k'', l'' nicht zugleich Null in K sein; denn sonst würde $p^3 = (\pi^3, \pi^2\alpha, p^4)$ sein, weil $\pi\alpha^2 \equiv k'\pi^2\alpha, \pi^2\beta \equiv \pi\alpha\beta \equiv 0, \alpha^2\beta \equiv k'\pi\alpha\beta \equiv 0, \alpha\beta^2 \equiv l\pi^2\alpha + l'\pi\alpha^2 \equiv (l + k'l')\pi^2\alpha \pmod{p^4}$ wäre. Also würde $\chi(p^3) = 2$ sein, was gegen die Annahme ist.

Setzt man $\bar{\pi} = \lambda\pi + \mu\alpha + \nu\beta$, wo λ, μ, ν Elemente aus K sind, so ist im Restklassenmodul p^2/p^3

$$\bar{\pi}(\pi, \alpha, \beta) = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha\beta)M, \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & l\nu \\ \mu & \lambda + k'\mu & l'\nu \\ 0 & k''\mu + \nu & \mu + l''\nu \end{pmatrix}.$$

A, i) Es sei $k' = 0$. Setzt man $\lambda = \mu = 1, \nu = 0$, so ist $|M| = 1$, mithin $p^2 = \bar{\pi}p$.

A, ii) Es sei $k' = 1$.

1) Ist $l' = 0, l'' = 1$, oder $l' = 1, l'' = 0$, so setze man $\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 1$. Dann ist $p^2 = \bar{\pi}p$.

(2) Dies ist offenbar auch gültig, wenn $\mathbb{R}/p$ mindestens 3 Elemente besitzt. Der Beweis dieses Falls ist weit einfacher, wie es in der folgenden Fussnote gezeigt wird.

(3) $\mathbb{R}/p$ besitze mindestens 3 Elemente. Ist $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{(\pi\alpha, \alpha\beta, p^3)}$, so ist $\alpha^2 = k'\pi\alpha + k''\alpha\beta$ in p^2/p^3 . Setzt man $\bar{\pi} = \pi + \mu\alpha, \bar{\pi}(\pi, \alpha, \beta) = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha\beta)M$, so wird

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 + k'\mu & 0 \\ 0 & k''\mu & \mu \end{pmatrix}, \quad |M| = \mu(1 + k'\mu).$$

Da aber K mindestens 3 Elemente besitzt, so kann man μ so nehmen, dass $|M| \not\equiv 0$ in K ist.

2) Es sei $l' = l'' = 1$, $k'' = 0$.

Ist $l = 0$, so setze man $\lambda = \mu = \nu = 1$. Dann ist $p^2 = \bar{\pi}p$.

Ist $l = 1$, so setze man $\lambda = 0$, $\mu = \nu = 1$. Dann ist $p^2 = \bar{\pi}p$.

3) Es sei $l' = l'' = 1$, $k'' = 1$. Dieser Fall geht keineswegs hervor.

Beweis: Ist $l = 0$, dann ist $\alpha^2 = \pi\alpha + \alpha\beta = \beta^2$ in p^2/p^3 . Also wird, wenn man $\bar{a} = \alpha - \beta$ setzt,

$$\bar{a}^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha^2 = 0, \quad \bar{a}\beta = \alpha\beta - \beta^2 = \pi\alpha = \pi\bar{a}$$

in p^2/p^3 , weil $\pi\beta \equiv 0$ (p^3) und $2 \equiv 0$ (p) ist.

Ist $l = 1$, dann ist in p^2/p^3 $\alpha^2 = \pi\alpha + \alpha\beta$, $\beta^2 = \pi\alpha + \alpha\beta + \pi^2$. Man setze nun $\bar{a} = \alpha - \beta + \pi$, so wird in p^2/p^3

$$\bar{a}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \pi^2 = 2(\pi\alpha + \alpha\beta + \pi^2) = 0,$$

$$\bar{a}\beta = \alpha\beta - \beta^2 + \pi\beta = \pi^2 + \pi\alpha - \pi\beta = \pi\bar{a}.$$

Daher ist stets $p = (\pi, \bar{a}, \beta)$, $p^2 = (\pi^2, \pi\bar{a}, \beta^2)$, wo $\pi\beta = \bar{a}^2 = 0$, $\bar{a}\beta = \pi\bar{a}$ in p^2/p^3 ist. Und folglich ist $p^3 = (\pi^3, \beta^3, p^4)$, weil $\pi^2\bar{a} = \pi\bar{a}\beta = 0$, $\pi\beta^2 = 0$, $\pi\bar{a}^2 = 0$, $\bar{a}\beta^2 = \pi\bar{a}\beta = 0$, $\pi^2\beta = 0$ in p^3/p^4 ist. Also ist $\chi(p^3) = 2$ wider der Annahme.

4) Es sei $l' = l'' = 0$. (Dann ist $k'' = 1$.) Auch kommt dieser Fall nicht vor.

Beweis: Hier ist $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha^2)$, weil $k'' = 1$ ist. Ist $l = 0$, so ist $\alpha^2 = \pi\alpha + \alpha\beta$, $\pi\beta = \beta^2 = 0$ in p^2/p^3 , und mithin

$$\alpha^2\beta = \pi\beta\alpha + \alpha\beta^2 = 0, \quad \alpha^3 = \pi\alpha^2 + \alpha^2\beta = \pi\alpha^2, \quad \pi^2\alpha - \pi\alpha^2 = \pi\alpha\beta = 0$$

in p^3/p^4 . Somit ist $p^3 = (\pi^3, \pi^2\alpha, \pi\alpha^2, \alpha^3) = (\pi^3, \pi^2\alpha, p^4)$ und $\chi(p^3) = 2$, was gegen die Annahme ist.

Ist $l = 1$, so ist $\alpha^2 = \pi\alpha + \alpha\beta$, $\pi\beta = 0$, $\beta^2 = \pi^2$ in p^2/p^3 , und

$$\alpha^2\beta = (\pi\alpha + \alpha\beta)\beta = \alpha\pi^2,$$

$$\alpha^3 = \pi\alpha^2 + \alpha^2\beta = \pi\alpha^2 + \pi^2\alpha = \pi\alpha\beta = 0$$

in p^3/p^4 . Somit ist $p^3 = (\pi^3, \pi^2\alpha, p^4)$ und $\chi(p^3) = 2$, was gegen die Annahme verstösst.

Fall B: Es sei $\alpha\beta \equiv 0$ ($\pi^2, \pi\alpha, p^3$) und $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha, \beta^2)$ ⁽⁴⁾

(4) $\mathfrak{N}/p$ besitze mindestens 3 Elemente, und sei $\alpha\beta \equiv k\pi^2 + k'\pi\alpha$ (p^3). Nimmt man $\bar{\pi} = \mu\pi + \beta$, so erhält man

$$\bar{\pi}(\pi, \alpha, \beta) = (\pi^2, \pi\alpha, \beta^2)M, \quad M = \begin{pmatrix} \mu & k & 0 \\ 0 & k' + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |M| = \mu(k' + \mu).$$

Also kann man μ stets so nehmen, dass $|M| \neq 0$ in K sein wird.

B, i) Es sei $\alpha\beta \equiv k\pi^2 \pmod{p^3}$.

Setzt man $\bar{\pi} = \pi + \beta$, so wird, da $\pi\beta \equiv 0 \pmod{p^3}$ ist,

$$\bar{\pi}\pi = \pi^2, \quad \bar{\pi}\alpha = k\pi^2 + \pi\alpha, \quad \bar{\pi}\beta = \beta^2$$

in p^2/p^3 sein, mithin $p^2 = \bar{\pi}p$.

B, ii) Es sei $\alpha\beta \equiv k\pi^2 + \pi\alpha \pmod{p^3}$.

Zuerst transformiere man α in $\bar{\alpha} = \alpha + k\pi$. Dann wird in p^2/p^3

$$\bar{\alpha}\beta = \alpha\beta = \pi\alpha + k\pi^2 = \pi\bar{\alpha}.$$

Weiter sei vorausgesetzt, dass $\bar{\alpha}^2 = l\pi^2 + l'\pi\bar{\alpha} + l''\beta^2$ ist. Setzt man nun $\bar{\pi} = \lambda\pi + \mu\bar{\alpha} + \nu\beta$, so gilt in p^2/p^3

$$\bar{\pi}(\pi, \bar{\alpha}, \beta) = (\pi^2, \pi\bar{\alpha}, \beta^2)M; \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & l\mu & 0 \\ \mu & \lambda + l'\mu + \nu & \mu \\ 0 & l''\mu & \nu \end{pmatrix}.$$

1) Ist $l = 1$ (oder $l'' = 1$), so setze man $\lambda = 0, \mu = \nu = 1$ (oder $\lambda = \mu = 1, \nu = 0$). Dann wird $|M| = 1$ sein, mithin $p^2 = \bar{\pi}p$.

2) Ist $l = l'' = 0, l' = 1$, so setze man $\lambda = \mu = \nu = 1$. Dann ist $p^2 = \bar{\pi}p$.

3) Ist $l = l' = l'' = 0$, so ist

$$p^2 = (\pi^2, \pi\bar{\alpha}, \beta^2) \quad \text{und} \quad \pi\bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}\beta, \quad \bar{\alpha}^2 \equiv 0, \quad \pi\beta \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Somit stimmt dieser Fall mit dem Fall (A, ii, 3) überein, und mithin geht dieser Fall keineswegs hervor.

Fall C: Es sei $\alpha\beta \equiv \beta^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$ ($\pi^2, \pi\alpha, p^3$) und $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha^2)$.

Weiter sei

$$\alpha\beta \equiv k\pi^2 + k'\pi\alpha \pmod{p^3}, \\ \beta^2 \equiv l\pi^2 + l'\pi\alpha \pmod{p^3}.$$

C, i) Ist $k = 1$, so ist $p^2 = (\alpha\beta, \pi\alpha, \alpha^2) = \alpha p$.

C, ii) Ist $k = 0, k' = 1$, so setze man $\bar{\pi} = \pi + \alpha$. Dann wird in p^2/p^3

$$\bar{\pi}\pi = \pi^2 + \pi\alpha, \quad \bar{\pi}\alpha = \pi\alpha + \alpha^2, \quad \bar{\pi}\beta = \alpha\beta = \pi\alpha,$$

folglich $p^2 = \bar{\pi}p$.

C, iii) Ist $k = k' = 0$ und $\beta^2 \not\equiv 0 \pmod{p^3}$, so setze man $\bar{\pi} = \lambda\pi + \alpha + \beta$. Dann ist

$$\bar{\pi}(\pi, \alpha, \beta) = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha^2)M, \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & l \\ 1 & \lambda & l' \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

somit $|M| = l - \lambda l'$. Da mindestens eines von l, l' nicht Null in K ist, so kann man λ stets so nehmen, dass $|M| = 1$ sein wird.

Es ist noch zu beweisen, dass kein Element β mit $\beta \neq 0 \pmod{p^2}$, $p\beta \leq p^3$ existiert. Gäbe es ein solches Element β , so würde $p^2 = (\pi^2, \pi a, a^2)$, $p^3 = (\pi^3, \pi^2 a, \pi a^2, a^3)$, und ausserdem wegen $\chi(p^3) = 3$ müsste eine Kongruenz

$$c_1 \pi^3 + c_2 \pi^2 a + c_3 \pi a^2 + c_4 a^3 \equiv 0 \pmod{p^4}$$

mit mindestens einem $c_i \neq 0 \pmod{p}$ bestehen.

a) Ausserdem Fall, wo $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$, $c_2 \neq 0 \neq c_3 \pmod{p}$ ist, kann man annehmen, dass $c_4 \neq 0 \pmod{p}$ ist. Denn, falls $c_4 \equiv 0$, $c_1 \neq 0 \pmod{p}$ ist, genügt es schon π mit a zu vertauschen. Falls $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$; $c_2 \neq 0$, $c_3 \equiv 0$ (oder $c_2 \equiv 0$, $c_3 \neq 0$) $\pmod{p}$ sind, genügt es $\bar{\pi} = \pi + a$ für π zu ersetzen.

In diesen Fälle würde also

$$a^3 \equiv c'_1 \pi^3 + c'_2 \pi^2 a + c'_3 \pi a^2 \pmod{p^4}.$$

mithin $p^3 = \pi p^2$ sein. Nach der Annahme ist aber $\pi \beta \equiv 0 \pmod{p^3}$, und es ergäbe sich, dass $\pi \beta = \pi \eta$ mit $\eta \in p^2$ ist, demzufolge $\beta = \eta \in p^2$, da kein Nullteiler in $\mathfrak{R}$ existiert.

b) ⁽⁵⁾ Es sei nun $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$, $c_2 \equiv c_3 \equiv 1 \pmod{p}$: $\pi^2 a + \pi a^2 \equiv 0 \pmod{p^4}$. In diesem Fall wäre $p^3 = (\pi^3, \pi a^2, a^3)$, $p^4 = (\pi^4, \pi a^3, a^4)$ und in $\mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} \pi \beta &= \xi_1 \pi^3 + \xi_2 \pi a^2 + \xi_3 a^3, \\ \pi^2 a + \pi a^2 &= \eta_1 \pi^4 + \eta_2 \pi a^3 + \eta_3 a^4, \end{aligned}$$

wo $\xi_i, \eta_i \in \mathfrak{R}$ ist. Dabei kann man annehmen, dass

$$\xi_3 = g a^r, \quad g \equiv 1 \pmod{p}; \quad \eta_3 = h a^s, \quad h \equiv 1 \pmod{p}$$

sind, weil $\xi_3 a^3 \equiv g a^{3+r} \pmod{\pi p^3}$, wo $g \equiv 1 \pmod{p}$ ist, und jedes Element aus πp^3 in der Form $\xi'_1 \pi^4 + \xi'_2 \pi a^2$ darstellbar ist.

Wäre nun $r \geq s+1$, so ergäbe sich aus den obigen Gleichungen, dass

$$\pi \beta = \xi_1 \pi^3 + \xi_2 \pi a^2 + \frac{g}{h} a^{r-s-1} (\pi^2 a + \pi a^2 - \eta_1 \pi^4 - \eta_2 \pi a^3)$$

ist, und folglich

$$\beta = \xi_1 \pi^2 + \xi_2 a^2 + \frac{g}{h} a^{r-s-1} (\pi a + a^2 - \eta_1 \pi^3 - \eta_2 a^3).$$

Dies ist gegen die Annahme, dass $\beta \neq 0 \pmod{p^2}$ ist. Somit müsste $r \leq s$ sein. Es wäre alsdann

$$\pi^2 a + \pi a^2 = \eta_1 \pi^4 + \eta_2 \pi a^3 + \frac{h}{g} a^{s+1-r} (\pi \beta - \xi_1 \pi^3 - \xi_2 \pi a^2),$$

mithin
$$\pi a + a^2 = \eta_1 \pi^3 + \eta_2 a^3 + \frac{h}{g} a^{s-r} (a \beta - \xi_1 \pi^2 a - \xi_2 a^3).$$

⁽⁵⁾ Falls $\mathfrak{R}/p$ mindestens 3 Elemente besitzt, kann man den Fall b) auf a) reduzieren, indem man $\bar{\pi} = \pi + \mu a$, $\bar{a} = c_2 \pi + c_3 a$ für π, a ersetzt, wo $\mu \neq 0$, $c_3 - c_2 \mu \neq 0$ in K ist.

Da aber nach der Annahme $\alpha\beta \equiv 0 \pmod{p^3}$ ist, so würde $\pi\alpha + \alpha^2 \equiv 0 \pmod{p^3}$ sein. Dies ist auch unmöglich; denn sonst würde $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha)$ und $\chi(p^2) = 2$ sein. Also gibt es kein Element β mit $\beta \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, $\beta p \leq p^3$. Somit erhält man

Satz 15. Aus $\chi(p) = 3$ folgt die Gleichung $p^2 = \pi p$ in unserem Primärintegritätsbereich.

§ 9. Fall: $p = (\pi, \alpha)$.

Es sei $p = (\pi, \alpha)$. Dann ist $p^2 = (\pi^2, \pi\alpha, \alpha^2)$ und sind $\pi^2, \pi\alpha, \alpha^2 \pmod{p^3}$ voneinander unabhängig, weil $\chi(p^2) = 3$ ist. Aus $\chi(p^3) = 3$ folgt weiter

$$c_1\pi^3 + c_2\pi^2\alpha + c_3\pi\alpha^2 + c_4\alpha^3 \equiv 0 \pmod{p^4},$$

wo nicht alle Koeffizienten Null in K sind.

Ist $c_4 \not\equiv 0$ oder $c_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, so ist $p^3 = \pi p^2$ bzw. $p^3 = \alpha p^2$.

Falls $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$, $c_3 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so setze man $\bar{\pi} = \pi + \mu\alpha$. Dann wird in p^3/p^4

$$\bar{\pi}(\pi^2, \pi\alpha, \alpha^2) = (\pi^3, \pi^2\alpha, \alpha^3)M, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 - c_2\mu & -c_2 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

sein. Wenn $c_2 = 0$ in K ist, so ist $|M| = \mu$. Daher wird $p^3 = (\pi + \alpha)p$. (Dies gilt auch, wenn $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ in K ist.) Es ist aber $|M| = \mu(1 - \mu) = 0$, wenn $c_2 = 1$ ist, und *mithin existiert in diesem Fall kein Element $\bar{\pi}$ mit $p^3 = \bar{\pi}p^2$. Und dieser Fall wirklich existiert, wie das folgende Beispiel zeigt.*

Es sei R der rationale Zahlkörper und $k = R(\sqrt{57})$. Da $57 \equiv 1 \pmod{8}$ ist, so lässt sich das Hauptideal (2) in k in das Produkt zweier Primideale zerlegen:

$$(2) = I_1 I_2; \quad I_1 = \left(\frac{7 + \sqrt{57}}{2} \right), \quad I_2 = \left(\frac{7 - \sqrt{57}}{2} \right).$$

Man nehme nun einen Körper vierten Grades:

$$\mathfrak{K} = R\left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{57}}{2}}\right).$$

Dann ist ersichtlich in $\mathfrak{K}$

$$I_1 = \mathfrak{Q}_1^2, \quad \mathfrak{Q}_1 = \left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{57}}{2}}\right).$$

Und I_2 ist nach einem wohlbekannten Satz⁽⁶⁾ in das Produkt zweier Primideale zerlegbar:

(6) Vgl. J. Sommer, Vorlesung über Zahlentheorie, S. 305.

$$l_2 = \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3 ,$$

$$\text{da} \quad \frac{7 + \sqrt{57}}{2} \equiv 1^2 \pmod{l_2^3} = \left(\frac{385 - 51\sqrt{57}}{2} \right)$$

ist. Daher ist $(2) = \mathfrak{L}_1^2 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3$ in $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$ sind sämtlich vom ersten Grad.

ω sei eine ganze Zahl vierten Grades aus $\mathfrak{K}$, welche genügt

$$\begin{cases} \omega \equiv 0 & (\mathfrak{L}_1), & \not\equiv 0 & (\mathfrak{L}_1^2), \\ \omega \equiv 0 & (\mathfrak{L}_2), & \not\equiv 0 & (\mathfrak{L}_2^2), \\ \omega \equiv 0 & (\mathfrak{L}_3), & \not\equiv 0 & (\mathfrak{L}_3^3), \end{cases}$$

und $\mathfrak{J}$ sei der durch 1 und ω erzeugte Zahlring. Dann ist das $\mathfrak{J}$ -Ideal $(2, \omega)\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{J}$ teilerlos und sein Restklassenkörper ist ein Primkörper von der Charakteristik 2. Es bezeichne $\mathfrak{J}^*$ den Quotientenring von $\mathfrak{J}$ nach $\mathfrak{p} = (2, \omega)$, $\mathfrak{p}^*$ das $\mathfrak{J}^*$ -Ideal $\mathfrak{p}\mathfrak{J}^*$ und $\mathfrak{D}^*$ den Quotientenring der Hauptordnung von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3$. Es ist alsdann

1° $\mathfrak{J}^*$ ein Primärintegritätsbereich mit dem einzigen Primideal $\mathfrak{p}^*$, dessen Restklassenkörper $\mathfrak{J}^*/\mathfrak{p}^*$ ein Primkörper von der Charakteristik 2 ist,

2° $\mathfrak{p}^* \mathfrak{D}^* = \mathfrak{L}_1^* \mathfrak{L}_2^* \mathfrak{L}_3^*$, wo $\mathfrak{L}_i^* = \mathfrak{L}_i \mathfrak{D}^*$ ist, und

3° der Führer $\mathfrak{f}^* = \mathfrak{J}^* : \mathfrak{D}^* \not\equiv 0$ und $\mathfrak{p}^{*m} < \mathfrak{f}^*$ für ein m .

Ferner ist $[2^2, 2\omega, \omega^2]$, wie leicht ersichtlich, eine Modulbasis von $(\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3)^2 / (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3)^3$ und $[2^3, 2^2 \omega, \omega^3]$ eine Modulbasis von $(\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3)^3 / (\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3)^4$, usw. Daher ist $(\mathfrak{p}^* \mathfrak{D}^*)^2 = (\mathfrak{L}_1^* \mathfrak{L}_2^* \mathfrak{L}_3^*)^2 = [2^2, 2\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{N-1}, (\mathfrak{p}^* \mathfrak{D}^*)^N]$, wo N eine beliebige ganze Zahl ist. Da aber für ein n $(\mathfrak{p}^* \mathfrak{D}^*)^{mn} < \mathfrak{f}^{*n} < \mathfrak{p}^{*n} < 2^2 \mathfrak{J}^*$ und $\omega \in \mathfrak{J}$ ist, so hat man

$$(\mathfrak{p}^* \mathfrak{D}^*)^2 = (\mathfrak{L}_1^* \mathfrak{L}_2^* \mathfrak{L}_3^*)^2 \subseteq \mathfrak{J}^*(2^2, 2\omega, \omega^2) .$$

Andererseits ist $\mathfrak{p}^* \mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}^*(2, \omega)$ und $(\mathfrak{p}^* \mathfrak{J}^*)^2 = \mathfrak{J}^*(2^2, 2\omega, \omega^2)$. Damit ist

$$(\mathfrak{p}^* \mathfrak{J}^*)^2 = (\mathfrak{p}^* \mathfrak{D}^*)^2 ,$$

und folglich $\mathfrak{p}^{*2} \subseteq \mathfrak{f}^*$ und $\mathfrak{p}^{*2}$ dreigliedrig.

Weiter ist $2^2 \omega \equiv 2\omega^2 \pmod{\mathfrak{p}^{*4}}$.

Beweis: Erstens ist $2^2 \omega \equiv 2\omega^2 \pmod{\mathfrak{L}_1^4}$, da $2^2 \omega \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}_1^5}$, $2\omega^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}_1^4}$ ist. Zweitens ist $2^2 \omega \equiv 2\omega^2 \pmod{\mathfrak{L}_2^4}$, weil $2^2 \omega \equiv 2\omega^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{L}_2^3}$ und $2^2 \omega \not\equiv 0 \not\equiv 2\omega^2 \pmod{\mathfrak{L}_2^4}$ ist. Drittens ist $2^2 \omega \equiv 2\omega^2 \pmod{\mathfrak{L}_3^4}$. Daher ist $2^2 \omega \equiv 2\omega^2 \pmod{\mathfrak{L}_1^4 \mathfrak{L}_2^4 \mathfrak{L}_3^4}$, und folglich $\pmod{\mathfrak{p}^{*4}}$.

In diesem Bereich $\mathfrak{J}^*$ also gibt es kein Element π , für welches $\mathfrak{p}^{*3} = \pi \mathfrak{p}^{*2}$ gilt. Ferner ist für $\nu \geq 2$ $\chi(\mathfrak{p}^{*\nu}) = 3$. Daraus kann man in ähnlicher Weise wie in § 7 schliessen, dass jedes $\mathfrak{J}^*$ -Ideal höchstens dreigliedrig ist.

§ 10. Struktur des Grundbereiches, in dem $\mathfrak{p}^3 = \pi \mathfrak{p}^2$ nicht gültig ist.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Primärintegritätsbereich, in dem jedes Ideal höchstens dreigliedrig ist und die Gleichung von der Form $\mathfrak{p}^3 = \pi \mathfrak{p}^2$ nicht besteht. Dann ist, wie man im vorigen Paragraphen gesehen hat, $K \simeq \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Primkörper von der Charakteristik 2, $\chi(\mathfrak{p}) = 2$: $\mathfrak{p} = (\pi, \alpha)$ und

$$\pi^2 \alpha + \pi \alpha^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^4}. \quad (1)$$

Wir wenden uns nun zur Struktur eines solchen Bereiches $\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{p}^4 = (\pi^4, \pi^2 \alpha^2, \alpha^4)$ ist, folgt aus (1)

$$\pi^2 \alpha + \pi \alpha^2 = \rho_1 \pi^4 + \rho_2 \pi^2 \alpha^2 + \rho_3 \alpha^4, \quad (2)$$

wo $\rho_i \in \mathfrak{R}$, und man kann hier unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass $\rho_1 \equiv \rho_2 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist; denn, falls $\rho_1 \equiv 1, \rho_3 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, genügt es $\bar{\pi} = \pi + \alpha^2$ für π zu nehmen und, falls $\rho_1 \equiv \rho_3 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, ersetze man vorerst $\bar{\pi} = \pi + \alpha^2$ für π , und alsdann $\bar{\alpha} = \alpha + \bar{\pi}^2$ für α . Setzt man $\frac{\alpha^2}{\pi} = \phi'$, so folgt aus (2)

$$\alpha + \phi' = \rho_1 \pi^2 + \rho_2 \alpha^2 + \rho_3 \phi'^2.$$

Setzt man wieder $\rho_3 \phi' = \phi$, so wird

$$\phi^2 - \phi = \rho_3 \alpha - \rho_3 \rho_1 \pi^2 - \rho_3 \rho_2 \alpha^2, \quad (3)$$

$$\text{wo} \quad \pi \phi = \rho_3 \alpha^2, \quad \rho_3 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}} \quad (4)$$

ist. So liegt ϕ im Quotientenkörper $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ und ist hinsichtlich $\bar{\mathfrak{R}}$ quadratisch ganz.⁽⁷⁾

Es sei $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\phi)$, $\bar{\alpha} = \mathfrak{p} \bar{\mathfrak{R}}$. Dann ergibt sich aus (3)

$$\alpha \equiv 0 \pmod{(\phi(\phi-1), \pi^2) \bar{\mathfrak{R}}}, \quad (5)$$

$$\text{und} \quad \phi(\phi-1) \equiv \alpha \pmod{\bar{\alpha}^2}. \quad (6)$$

Daraus folgt $\bar{\alpha} = (\pi, \alpha) \bar{\mathfrak{R}} = (\pi, \phi(\phi-1))$.

Ferner sei $\bar{\mathfrak{p}}_1 = (\pi, 1-\phi)$. Dann ist $\bar{\mathfrak{p}}_1 \supset \bar{\alpha}$ und $\bar{\mathfrak{p}}_1$ ein Primideal in $\bar{\mathfrak{R}}$.⁽⁸⁾

(7) In der Tat ist $\phi \notin \mathfrak{R}$. Wäre $\phi \in \mathfrak{R}$, so würde $\alpha^2 = \pi r$, $r \in \mathfrak{R}$. Da $\pi \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ ist, so müsste $r \in \mathfrak{p}$ sein. Daher würde $\mathfrak{p}^2 = (\pi^2, \pi \alpha, \alpha^2) = \pi \mathfrak{p}$ sein.

(8) Es ist $\bar{\mathfrak{p}}_1 \neq 1$. Wäre $\bar{\mathfrak{p}}_1 = (\pi_1, 1-\phi) = 1$, so wäre $(r_1 + r_2 \phi) \pi + (r_3 + r_4 \phi)(1-\phi) = 1$, wo $r_i \in \mathfrak{R}$ ist, und nach (3) und (4) $r_3(1-\phi) = \varepsilon$, wobei ε eine Einheit in $\mathfrak{R}$ bedeutet.

Weiter ergibt sich aus (4) und (5)

$$\pi \equiv \pi\phi \equiv \rho_3\alpha^2 \equiv 0 \quad (\bar{\mathfrak{p}}_1^2) .$$

Daher ist $\bar{\mathfrak{p}}_1 = (1-\phi, \bar{\mathfrak{p}}_1^2)$ und folglich ist $\bar{\mathfrak{p}}_1$ regulär in $\bar{\mathfrak{R}}$.⁽⁹⁾

Es sei ferner $\bar{\mathfrak{p}}_2 = (\pi, \phi)$. Dann ist auch $\bar{\mathfrak{p}}_2 \supset \bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{p}}_2$ ein $\bar{\mathfrak{R}}$ -Primideal und⁽¹⁰⁾

$$\bar{\mathfrak{p}}_2 = (\pi, \phi) = (\pi, \alpha(1-\phi), \bar{\mathfrak{p}}_2^2) ;$$

denn es ist, da $1-\phi \equiv 1 \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_2}$ ist,

$$\alpha \equiv \phi(\phi-1) \equiv \phi \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_2^2} ,$$

und folglich

$$\alpha(1-\phi) \equiv \phi(1-\phi) \equiv \phi \pmod{\bar{\mathfrak{p}}_2^2} .$$

Es ist weiter nach (6) und (4)

$$\bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2 = (\pi, 1-\phi)(\pi, \phi) = (\pi^2, \pi\phi, \pi(1-\phi), \phi(1-\phi)) = (\pi, \alpha, \bar{\mathfrak{a}}^2) = \bar{\mathfrak{a}}$$

und

$$(\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2) = \bar{\mathfrak{R}} .$$

Ferner folgt aus (4) und (3)

$$\begin{aligned} \alpha^2(1-\phi) &= \rho_3^{-1}\pi\phi(1-\phi) \\ &= \rho_3^{-1}\pi(-\rho_3\alpha + \rho_3\rho_1\pi^2 + \rho_3\rho_2\alpha^2) \\ &= \rho_3'\pi\alpha + \rho_1\pi^3 , \end{aligned}$$

wo $\rho_3' = -1 + \rho_2\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Somit ist

$$\alpha^2(1-\phi)^2 = \rho_3'\pi\alpha(1-\phi) + \rho_1\pi^3 - \rho_1\rho_3\pi^2\alpha^2 .$$

Setzt man jetzt $\frac{\alpha(1-\phi)}{\pi} = \psi'$, so hat man

$$\psi'^2 = \rho_3'\psi' + \rho_1\pi - \rho_1\rho_3\alpha^2 .$$

Setzt man wieder $\rho_3'^{-1}\psi' = \psi$, so wird

$$\psi^2 - \psi = \rho_1\rho_3'^{-2}\pi - \rho_1\rho_3\rho_3'^{-2}\alpha^2 \quad (7)$$

und

$$\pi\psi = \rho_3'^{-1}\alpha(1-\phi) , \quad (8)$$

Wäre $r_3 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, so würde $1-\phi \in \mathfrak{R}$, mithin $\phi \in \mathfrak{R}$ sein. Also müsste $r_3 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ sein, und daher wäre $r_3\phi = r_3\rho_3\alpha^2/\pi$ auch eine Einheit in $\mathfrak{R}$, woraus sich ergäbe, dass $\pi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$ ist.

(9) Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heisst dann regulär, wenn jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{p}$ -Potenz ist.

(10) Es ist $\bar{\mathfrak{p}}_2 \neq 1$. Der Beweis ist ganz ähnlich wie in Bemerkung (8).

wo $\rho_1 \rho_3'^{-2} \equiv 1 \pmod{p}$ ist. So liegt ψ in $\mathfrak{R}$ und hängt von $\mathfrak{R}$ quadratisch ganz ab.⁽¹¹⁾

Es sei nun $\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{R}}(\psi) = \mathfrak{R}(\phi, \psi)$. Da $\bar{p}_1$ regulär in $\overline{\mathfrak{R}}$ ist, so muss $\mathfrak{P}_1 = \bar{p}_1 \mathfrak{D}$ auch prim und regulär in $\mathfrak{D}$ sein. Und es ist $\bar{p}_2 \mathfrak{D} = (\pi, \alpha(1-\phi), \bar{p}_2^2 \mathfrak{D}) = (\pi, \rho_3' \pi \psi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D}) = (\pi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D})$, und weiter ist $\bar{p}_2 \mathfrak{D} = (\psi(1-\psi), \bar{p}_2^2 \mathfrak{D})$, weil $\psi(1-\psi) = -\rho_1 \rho_2'^{-2} \pi(1-\phi) \equiv \pi \pmod{\bar{p}_2^2 \mathfrak{D}}$ ist. Setzt man nun $\mathfrak{P}_2 = (1-\psi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D})$, $\mathfrak{P}_3 = (\psi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D})$, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 &= ((1-\psi)\psi, (1-\psi)\bar{p}_2^2 \mathfrak{D}, \psi\bar{p}_2^2 \mathfrak{D}, \bar{p}_2^4 \mathfrak{D}) \\ &= ((1-\psi)\psi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D}) = \bar{p}_2 \mathfrak{D}, \end{aligned}$$

und mithin

$$p\mathfrak{D} = \bar{p}_1 \mathfrak{D} \cdot \bar{p}_2 \mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$$

sein. Ferner ist $\mathfrak{P}_2$ teilerlos in $\mathfrak{D}$,⁽¹²⁾ weil $\mathfrak{P}_2 = (1-\psi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D})$ ist, da $\bar{p}_2 \mathfrak{D} < \mathfrak{P}_2$ ist. Und $\mathfrak{P}_2$ ist regulär in $\mathfrak{D}$, weil $\mathfrak{P}_2 = (1-\psi, \bar{p}_2^2 \mathfrak{D})$ ist. $\mathfrak{P}_3$ ist auch prim und regulär in $\mathfrak{D}$.⁽¹²⁾ Also geben diese $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ die Gesamtheit der $\mathfrak{D}$ -Primideale, und folglich ist jedes $\mathfrak{D}$ -Ideal Hauptideal. Somit ist $\mathfrak{D}$ ganz-abgeschlossen.

$\mathfrak{f}$ sei der Führer von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{D}$, dann ist $\mathfrak{f} = p^2$.

Beweis: Es ist, wie man leicht aus (3), (4), (7) und (8) berechnen kann, $p^2 \phi, p^2 \psi \subseteq p^2 \mathfrak{R}$, und so ist $p^2 \mathfrak{D} = p^2$, mithin $p^2 \subseteq \mathfrak{f}$. Wäre nun $\mathfrak{f} > p^2$, so müsste mindestens eines von $(\pi, p^2) \mathfrak{D}$, $(\alpha, p^2) \mathfrak{D}$, $(\pi + \alpha, p^2) \mathfrak{D}$ ganz in $\mathfrak{R}$ liegen, und mithin müsste $\rho_3' \pi \psi = \alpha(1-\phi) \in \mathfrak{R}$, $\alpha \phi \in \mathfrak{R}$ oder $(\pi + \alpha) \phi = \rho_3 \alpha^2 + \alpha \phi \in \mathfrak{R}$ sein. Folglich würde stets $\alpha(1-\phi) \in \mathfrak{R}$ sein. Demgemäss würde $\frac{\pi \alpha(1-\phi)}{\pi} \in \mathfrak{R}$, damit nach (4)

$$\pi \alpha - \rho_3 \alpha^3 = \pi \beta, \quad \beta \in \mathfrak{R},$$

und so würde $\frac{\alpha^3}{\pi} = \gamma \in \mathfrak{R}$ sein. Andererseits ist aber $\pi \mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^2 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$, $\alpha \mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3^2$, weil

$$\pi \equiv \alpha^2 \equiv (\phi - 1)^2 \pmod{\mathfrak{P}_1^3}, \quad \pi \equiv 1 - \psi \pmod{\mathfrak{P}_2^2}, \quad \pi \equiv \psi \pmod{\mathfrak{P}_3^2};$$

$$\alpha \equiv \phi - 1 \pmod{\mathfrak{P}_1^2}, \quad \alpha \equiv \alpha(1-\phi) \equiv \pi \psi \equiv \pi \equiv 1 - \psi \pmod{\mathfrak{P}_2^2}, \quad \alpha \equiv \pi \psi \equiv \psi^2 \pmod{\mathfrak{P}_3^3}$$

ist. Wäre $\mathfrak{f} > p^2$, so müsste daher

(11) ψ gehört nicht zu $\overline{\mathfrak{R}}$. Wäre $\psi \in \overline{\mathfrak{R}}$, so würde nach (8) $\bar{p}_2 = (\pi, \bar{p}_2^2)$, und mithin $\bar{p}_2$ regulär in $\overline{\mathfrak{R}}$ sein. Also wäre $\overline{\mathfrak{R}}$ ganz-abgeschlossen. Da aber, wie man leicht aus (3) und (4) berechnen kann, $p^2 \mathfrak{R} = p^2 \mathfrak{R}$ ist, so würde $\chi(p^2) = 2$ sein.

(12) Es ist $\mathfrak{P}_2 \neq 1$, $\mathfrak{P}_3 \neq 1$. In der Tat würde $p\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ sein, wenn $\mathfrak{P}_3 = 1$ wäre. Da aber, wie man leicht aus (3), (4), (7) und (8) ableiten kann, $p^2 = p^2 \mathfrak{D}$ ist, so würde $\chi(p^2) = 2$ sein.

$$\gamma\mathfrak{D} = \frac{a^3\mathfrak{D}}{\pi\mathfrak{D}} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_3^5$$

sein, und dann würde $\gamma < \mathfrak{p}\mathfrak{R}$ und $\gamma = \lambda\pi + \mu\alpha$ ($\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$). Somit müsste erstens $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ sein, denn sonst wäre $\gamma\mathfrak{D} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1^2}$, zweitens $\lambda \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$, weil sonst wäre $\gamma\mathfrak{D} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_2^2}$, da $\mu \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Daher würde $\gamma = \lambda\pi + \mu\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_3^2}$, folglich $\gamma \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_3^5}$. Dies ist gegen die Gleichung $\gamma\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_3^5$. Damit ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^2 = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3)^2$.

Fasst man die obigen Behauptungen zusammen, so erhält man

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Primärintegritätsbereich, in dem jedes Ideal höchstens dreigliedrig ist und die Gleichung von der Form $\mathfrak{p}^3 = \pi\mathfrak{p}^2$ nicht besteht. Dann ist der zu $\mathfrak{R}$ gehörige ganz-abgeschlossene Bereich $\mathfrak{D}$ die Erweiterung von $\mathfrak{R}$, welche durch Adjunktionen zwei quadratischer ganzen Elemente erhält wird. Ferner ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{R} : \mathfrak{D} = \mathfrak{p}^2$.*

Dieser Fall ist keineswegs im kubischen Zahlkörper realisierbar, sondern erst im biquadratischen Körper, weil $\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$, $\alpha\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3^2$, $(\pi + \alpha)\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{P}_3$ ist.