8. Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ribaucourschen Mitten- und Zentral-kugeltkongruenzen.

Von Tsurusaburo TAKASU.

(Eingegangen am 20. August, 1938.)

1. **Bezeichnungen.** Ist $lx + my + nz - p = 0$ die Hessesche Normalform der Gleichung einer orientierten Ebene, so wird die orientierte Kugel mit Zentrum (A, B, C) und Radius R durch die Gleichung

$$(u\xi)_4 + u^5 \bar{\xi}_5 = 0$$

dargestellt, wobei

$$\xi_1 = A, \quad \xi_2 = B, \quad \xi_3 = C, \quad \xi_4 = iR, \quad \bar{\xi}_5 = 1,$$

$$\rho u^1 = l, \quad \rho u^2 = m, \quad \rho u^3 = n, \quad \rho u^4 = i, \quad \rho u^5 = -p,$$

$$\rho < 0: \text{sonst beliebig}$$

ist.

Man betrachte eine allgemeine L -Kugeltkongruenz

$$(1) \quad \xi = \xi(u^1, u^2), \quad (\bar{\xi}_5 = 1),$$

$$(2) \quad u^1 = u, \quad u^2 = v$$

und ihre beiden Enveloppenmäntel

$$(3) \quad u = u(u^1, u^2), \quad ((u u)_4 = 0),$$

$$\bar{u} = \bar{u}(u^1, u^2), \quad ((\bar{u} \bar{u})_4 = 0),$$

$$(4) \quad (u \bar{u})_4 = 2.$$

Wir nehmen die quadratische Form

$$d\sigma^2 = G_{hk} du^h du^k, \quad G_{hk} = (\xi_h \xi_k)_4$$

als die Grundform der Tensorrechnung auf. Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_{hk} = (u \xi_{h,k})_4 = -(u_h \xi_k)_4 = -(u_k \xi_h)_4, \\ \bar{D}_{hk} = (\bar{u} \xi_{h,k})_4 = (\bar{u}_h \xi_k)_4 = -(\bar{u}_k \xi_h)_4, \\ N_h = (u \bar{u}_h)_4 = -(\bar{u} u_h)_4, \quad D^{hk} = \frac{\partial}{\partial D_{hk}} \log (D_{11} D_{22} - D_{12}^2), \text{ usw.}, \\ E^{11} = E^{22} = 0, \quad E^{12} = -E^{21} = (G_{11} G_{22} - G_{12}^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

2. Die Ribaucourschen Kugelskongruenzen sind bekanntlich dadurch gekennzeichnet, dass bei ihnen sich auf den beiden Hüllflächen die Krümmungslinien entsprechen.

Führt man nun die krümmungslinigen Parameter ein, so ist es für die Ribaucourschen Kugelskongruenzen kennzeichnend, dass die Beziehungen

$$(6) \quad G_{12} = 0, \quad D_{12} = 0, \quad \bar{D}_{12} = 0$$

gelten.

Übrigens ist für die Ribaucourschen Kugelskongruenzen kennzeichnend, dass

$$(7) \quad E^{hk} N_{h,k} = E^{sl} (D^{tlc}_{:,k} D_{ts,l} + D^{tlc}_{ts,lk}) = 0$$

ist. ⁽²⁾ Diese Tatsache beweist man am einfachsten, indem man die krümmungslinigen Parameter einführt ($G_{12} = 0$, $D_{12} = 0$).

3. Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ribaucourschen Mittenkugelskongruenzen im Laguerreschen Raume.

Satz. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Mittenkugelskongruenz (1) eine Ribaucoursche Kugelskongruenz sei, besteht darin, dass die *L-Torsionsachsen* ⁽³⁾ $u^1 = \text{konst.}$, $u^2 = \text{konst.}$ ($G_{12} = 0$, $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$) ein isothermes System bilden:

$$G_{11} : G_{22} = U(u^1) : V(u^2).$$

Beweis. Im Falle $G_{12} = 0$, $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$ reduziert sich die Formel (7) zu:

$$(8) \quad E^{hk} N_{h,k} = \left\{ 2(D_{22,1} D_{12,1} - D_{11,2} D_{12,2}) + (D_{12,21} - D_{22,11} + D_{11,22} - D_{12,12}) \right\} : \\ \left\{ D_{12}^2 \sqrt{G_{11} G_{22}} \right\} \\ = \frac{1}{D_{12} \sqrt{G_{11} G_{22}}} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{G_{11}}{G_{22}} = 0,$$

⁽²⁾ T. Takasu, Differentialkugelgeometrie, IV. Japanese Journal of Math., 5 (1928), 60, Formel (36).

⁽³⁾ D.h. die durch diejenigen Tangentialebenen $u(u^1, u^2)$ beschriebenen *L-Torsen*, welche der Torsionslinien auf der Mantelfläche $u(u^1, u^2)$ entlang diese Mantelfläche berühren.

weil

$$\begin{aligned}
 \{^1_{11}\} &= \frac{1}{2G_{11}} \frac{\partial G_{11}}{\partial u}, & \{^1_{12}\} &= \frac{1}{2G_{11}} \frac{\partial G_{11}}{\partial v}, & \{^1_{22}\} &= -\frac{1}{2G_{11}} \frac{\partial G_{22}}{\partial u}, \\
 \{^2_{12}\} &= \frac{1}{2G_{22}} \frac{\partial G_{22}}{\partial u}, & \{^2_{21}\} &= \frac{1}{2G_{22}} \frac{\partial G_{22}}{\partial u}, & \{^2_{11}\} &= -\frac{1}{2G_{22}} \frac{\partial G_{11}}{\partial v}, \\
 \{^2_{22}\} &= \frac{1}{2G_{22}} \frac{\partial G_{22}}{\partial v}, \\
 D_{11,1} &= \frac{D_{12}}{G_{22}} \frac{\partial G_{11}}{\partial v}, & D_{12,1} &= -\frac{D_{12}}{G_{22}} \frac{\partial G_{22}}{\partial u}, \\
 D_{12,1} &= D_{12,u} - \frac{D_{12}}{2G_{12}} \frac{\partial G_{22}}{\partial u} - \frac{D_{12}}{2G_{11}} \frac{\partial G_{11}}{\partial u}, \\
 D_{12,2} &= D_{12,v} - \frac{D_{12}}{2G_{22}} \frac{\partial G_{22}}{\partial v} - \frac{D_{12}}{2G_{11}} \frac{\partial G_{11}}{\partial v}, \\
 D_{22,1} &= -\frac{D_{12}}{G_{11}} \frac{\partial G_{11}}{\partial v}, & D_{22,2} &= \frac{D_{12}}{G_{11}} \frac{\partial G_{22}}{\partial u}, \\
 D_{12,12} &= D_{12,1v} - 2\{^1_{12}\} D_{12,1} - \{^1_{22}\} D_{11,1} - \{^2_{12}\} D_{22,1} - \{^2_{22}\} D_{12,1} - \{^2_{12}\} D_{12,2}, \\
 D_{12,22} &= D_{11,2v} - 2\{^1_{12}\} D_{11,2} - \{^1_{22}\} D_{11,1} - 2\{^2_{12}\} D_{12,2} - \{^2_{22}\} D_{11,2}, \\
 D_{21,21} &= D_{21,2u} - \{^1_{12}\} D_{12,2} - \{^1_{11}\} D_{12,2} - \{^1_{12}\} D_{12,1} - 2\{^2_{21}\} D_{12,2} - \{^2_{11}\} D_{22,2}, \\
 D_{22,11} &= D_{22,1u} - 2\{^1_{21}\} D_{12,1} - \{^1_{11}\} D_{22,1} - 2\{^2_{21}\} D_{22,1} - \{^2_{11}\} D_{22,2}
 \end{aligned}$$

ist. Aus (8) ergibt sich unsre Behauptung.

4. Der Fall vom konformen Raume. Analog beweist man den folgenden

Satz. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Zentralkugellkongruenz

$$(9) \quad \xi = \xi(u^1, u^2), \quad ((\xi\xi)_5 = 1)$$

im konformen Raume eine Ribaucoursche Kugellkongruenz sei, besteht darin, dass die Torsionslinien ⁽⁴⁾ ($G_{12} = 0$, $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$) ein isothermes System bilden:

$$(10) \quad G_{11} : G_{22} = U(u^1) : V(u^2),$$

(4) D.h. die die Winkel zwischen den Krümmungslinien halbierenden Flächenkurven.

wobei

$$G_{hk} = (\xi_h \hat{\xi}_k)_5 ,$$

$$D_{hk} = (\chi \xi_{h,k})_5 = -(\chi_h \xi_k)_5 = -(\chi_k \xi_h)_5 ,$$

$\chi = \chi(u^1, u^2), \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}(u^1, u^2) :$ die beiden Enveloppenmäntel
der Kugelskongruenz (9),

$$(\chi \chi)_5 = 0 , \quad (\bar{\chi} \bar{\chi})_5 = 0 , \quad (\chi \bar{\chi})_5 = 2h^2$$

ist.