11. Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe.⁽¹⁾

Par Motokiti KONDÔ.

(reçu le 9 Septembre, 1938).

Table des Matières.

	Page
I. Introduction	197
II. Les cribles complètement réguliers	200
III. La construction d'ensemble uniformisateur	211
IV. Quelques applications du théorème de l'uniformisation sur des ensembles projectifs de la seconde classe	223

I. Introduction.

Dans sa note⁽²⁾, M. N. LUSIN a introduit quelques notions sur l'uniformisation des ensembles. D'après sa définition, pour un ensemble E de points contenus dans le plan XOY , nous dirons que E est uniforme (relativement à l'axe OX), si toute parallèle à l'axe OY coupe E en un point au plus. Et, nous dirons qu'un ensemble plan E est uniformisable lorsqu'on a obtenu une partie uniforme U de E ayant la même projection sur l'axe OX . Cet ensemble U est dit uniformisateur de E et trouver tel ensemble U c'est uniformiser l'ensemble donné E .

Sur le problème d'uniformisation des ensemble M. M. N. LUSIN et W. SIERPIŃSKI ont démontré le

Théorème. *Tout ensemble plan mesurable (B) peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.⁽³⁾*

Et M. W. SIERPIŃSKI a posé un problème suivant :

Un ensemble $C(A)$ plan est-il toujours uniformisable (même au sens idéaliste) au moyen d'un ensemble $PC(A)$, ou même d'un ensemble projectif?⁽⁴⁾

(1) Les résultats principaux de cet note ont été présentés à l'Académie Impériale du Japon, à la séance du 12, Octobre, 1937. Voir, M. KONDÔ, L'uniformisation des complémentaires analytiques, Proc. of the Imp. Acad. Japan, **13** (1937), 287-291.

(2) N. LUSIN, Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles, Mathematica, **4** (1930), 54-66.

(3) N. LUSIN, loc. cit., (2), p. 59, et W. SIERPIŃSKI, Sur l'uniformisation des ensembles mesurables (B), Fund. Math., **16** (1930), 136-139.

(4) W. SIERPIŃSKI, loc. cit., (3), 139.

Or, M. N. LUSIN⁽⁵⁾ a donné un complémentaire analytique plan E , et vérifié que l'ensemble E ne peut jamais être uniformisé au point de vue des réalistes. En autre part, M. P. NOVIKOFF a démontré récemment le

Théorème. *Chaque complémentaire analytique plan (situé dans un plan XOY) qui a sur chaque prallèle à l'axe OY un nombre fini de points au plus peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique,⁽⁶⁾ et recherché la classe d'ensembles donnés comme la projection des complémentaires analytiques uniformes. Or, on peut trouver sans peine une ressemblance entre la classe d'ensembles recherchés par M. P. NOVIKOFF et la classe d'ensembles projectifs de la seconde classe. Et, de plus, on peut savoir que le problème de l'uniformisation des complémentaires analytiques est intimement lié aux problèmes sur les ensembles projectifs de la seconde classe.*

Or, M. M. N. LUSIN et P. NOVIKOFF ont donné une méthode⁽⁷⁾ du choix effectif d'un point un complémentaire analytique arbitraire donné par un crible. En se servant de cette méthode, on peut déterminer un ensemble uniformisateur d'un complémentaire analytique plan donné. Mais, dans ce cas, le problème de l'évaluation de classe d'ensemble uniformisateur reste ouvert. Or, la méthode⁽⁸⁾ de M. P. NOVIKOFF se servant dans l'uniformisation de quelques complémentaires analytiques a achevé cette évaluation, et nous pouvons démontrer le

Théorème de l'uniformisation. *Tout complémentaire analytique plan E peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique, et de plus, si l'ensemble E est donné effectivement par un crible, on peut donner aussi effectivement un uniformisateur de E .*

Et, on peut déduire sans peine, en se servant de ce théorème, les théorèmes de M. M. N. LUSIN, W. SIERPIŃSKI et P. NOVIKOFF⁽⁹⁾. De plus, comme j'ai dit plus haut, grâce à ce théorème, on peut résoudre divers problèmes sur les ensembles projectifs de la seconde classe, p. ex.,

Théorème. *Tout ensemble projectif de la seconde classe peut être donné comme la projection uniforme d'un complémentaire analytique.*

Il me paraît que ce théorème est un des théorèmes fondamentaux dans la théorie des ensembles projectifs de la seconde classe.

(5) N. LUSIN, loc. cit., (2), 65.

(6) P. NOVIKOFF, Les projections des complémentaires analytiques uniformes, Recueil Mathématique, nouvelle série, **2** (1937), 3-16.

(7) N. LUSIN et P. NOVIKOFF, Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire donné par un crible, Fund. Math., **25** (1935), 559-560.

(8) P. NOVIKOFF, loc. cit., (6), 4.

(9) N. LUSIN, W. SIERPIŃSKI et P. NOVIKOFF, loc. cit., (2), (3) et (6).

Maintenant, envisageons l'exemple de M. N. LUSIN qui ne peut jamais être uniformisé au point de vue des réalistes. L'exemple de M. N. LUSIN est donné comme il suit :

“Tous les polynômes $P(t)$ en t à coefficients *rationnels* sont une infinité dénombrable : nous les supposons ranger dans un certain ordre que je ne précise pas, mais que je suppose précisé. Soit $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t), \dots$ la suite considérée. D'autre part, nous prenons une courbe péanienne continue, remplissant tout un espace à une infinité dénombrable de dimensions soit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ cette courbe. Cela posé, considérons la série infinie

$$(S) \quad \varphi_1(x)P_1(t) + \varphi_2(x)P_2(t) + \dots + \varphi_n(x)P_n(t) + \dots$$

et faisons la construction suivante. Nous prenons le plan XOY et un point x_0 fixe quelconque situé sur l'axe OX . A ce point fixe x_0 nous faisons correspondre la série (S_{x_0}) de polynômes en t qu'on obtient en posant $x = x_0$ dans la série (S) :

$$(S_{x_0}) \quad \varphi_1(x_0)P_1(t) + \varphi_2(x_0)P_2(t) + \dots + \varphi_n(x_0)P_n(t) + \dots$$

Enfin, nous marquons sur la droite fixe $x = x_0$ parallèle à l'axe OY tous les points dont les ordonnées y sont des valeurs de la somme de la série de polynômes (S_{x_0}) lorsque t varie entre $-\infty$ et $+\infty$. *Ce sont les points défendus*. Désignons par E l'ensemble plan qu'on obtient en supprimant de chaque droite $x = x_0$ les points marqués défendus. Je dis maintenant que l'ensemble plan E ainsi défini ne peut jamais être uniformisé.”⁽¹⁰⁾

Or, on peut uniformiser effectivement cet ensemble E au moyen d'un complémentaire analytique. En effet, comme la série (S) définit effectivement une fonction $F(x, t)$ de BAIRE, l'image géométrique de la fonction $y = F(x, t)$ ainsi obtenue est dans l'espace $XOYT$ un ensemble effectivement mesurable (B) , et donc, la projection de cette image géométrique sur le plan XOY , c'est-à-dire, l'ensemble de tous les points défendus est un ensemble effectivement analytique, d'où l'ensemble E est un complémentaire effectivement analytique. Il en résulte que E est d'après le théorème de l'uniformisation effectivement uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique.

Le but de ce travail est de démontrer le théorème de l'uniformisation d'ensembles complémentaires analytiques et de donner quelques applications sur les ensembles projectifs de la seconde classe. Pour le démontrer, nous introduirons d'abord dans la chapitre II la notion des cribles complètement réguliers, et rechercherons quelques propriétés des cribles ainsi

(10) N. LUSIN, loc. cit., (2), 65-66.

définis, et dans le chapitre III nous construirons un uniformisateur d'un complémentaire analytique plan. Et enfin, dans le chapitre IV, nous appliquerons le théorème de l'uniformisation sur les ensembles projectifs de la seconde classe.

Les notations utilisées dans la suite.

$R(x)$, $R(x, y)$, $R(x, y, z)$, ... : respectivement l'ensemble de tous les nombres irrationnels x tels qu'on ait $0 < x < 1$, de tous les paires (x, y) de nombres irrationnels x et y tels qu'on ait $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, etc., et nous appellerons ces ensembles les domaines fondamentaux.

$R_0(x)$: l'ensemble de tous les nombres rationnels x tels qu'on ait $0 \leq x \leq 1$.

$R_0(x; y)$, $R_0(x, y; z)$, ... : respectivement le produit $R(x) \times R_0(y)$, $R(x, y) \times R_0(z)$, etc.

$C^{(p)}$: soient C un ensemble contenu dans un espace $X_1OX_2X_3 \dots X_n$ à n dimensions, et p un point de l'espace $X_1OX_2X_3 \dots X_k$ à k dimensions ($k < n$), désignons par $C^{(p)}$ l'ensemble de tous les points de C dont les projections sur l'espace $X_1OX_2X_3 \dots X_k$ sont le point p .

$\tau(C)$: C étant un ensemble de nombres réels, si C est bien ordonné suivant la grandeur de nombre réels, désignons par $\tau(C)$ le type d'ordre de C , et sions, posons $\tau(C) = \mathcal{Q}$. De plus, si l'on $\tau(C) = \mathcal{Q}$, posons $\tau(C)+1 = \mathcal{Q}$.

$E^{(p)}$: l'ensemble de tous les points p qui satisfont à la condition (.....).

II. Les cribles complètement réguliers.

1. Les cribles complètement réguliers. Étant donné un ensemble analytique E dans $R(x, y)$, prenons un crible C dans $R_0(x, y; z)$ qui définit E , c'est-à-dire, E est l'ensemble de tous les points p du plan XOY , tels que l'ensemble $C^{(p)}$ ne soit pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Si le crible C jouit des propriétés suivantes, C est appelé le crible complètement régulier ;

1°, C est un ensemble d'une infinité dénombrable de rectangulaires de BAIRE situés sur des plans parallèles au plan XOY ,

2°, quelque soit le nombre rationnel r , la partie de C —désignons par C_r —située au dessous du plan parallèle au plan XOY qui passe par le point r de l'axe OZ est régulier au sens de M. P. NOVIKOFF⁽¹¹⁾, c'est-à-

¹¹⁾ P. NOVIKOFF, Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fund. Math., **25** (1935), 459-566.

dire, pour chaque point p du plan XOY , $C_r^{(p)}$ contient une partie dense en-soi ou bien $C_r^{(p)}$ est bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe OZ ,

3°, pour tout point p de $R(x, y)$, $C^{(p)}$ contient une infinité dénombrable de points.

Lemme 1. Étant donné un ensemble analytique E dans $R(x, y)$, il existe dans $R_0(x, y; z)$ un crible complètement régulier qui définit l'ensemble analytique E .

Démonstration. Pour l'ensemble analytique E , on choisit un schéma de SOUSLIN $\{En_1n_2 \dots n_k\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de rectangles de BAIRE tel qu'on ait $E = \sum_{(v)} \prod_{k=1}^{\infty} En_1n_2 \dots n_k$. Ici, on peut supposer qu'on ait pour toute suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels

$$(1) \quad En_1 = R(x, y) \quad \text{et} \quad En_1n_2 \dots n_k > En_1n_2 \dots n_k n_{k+1}.$$

Prenons une fonction $\mu(n)$ de nombres naturels telle que pour tout nombre naturel k il existe une infinité dénombrable de nombres naturels n tels qu'on ait $k = \mu(n)$, et on définira dans $R_0(x, y; z)$ l'ensemble

$$C = \sum_{n_1n_2 \dots n_k} E_{\mu(n_1)\mu(n_2) \dots \mu(n_k)} \times (z_{n_1n_2 \dots n_k}),$$

$$\text{où} \quad z_{n_1n_2 \dots n_k} = 1 - \sum_{j=1}^k 2^{-(n_1+n_2+\dots+n_j)}.$$

On peut voir alors que C est un crible complètement régulier qui définit l'ensemble analytique E .

Pour cela, nous allons d'abord démontrer que le crible C_r est régulier au sens de M. P. NOVIKOFF pour tout nombre rationnel r . Maintenant, supposons que pour un point p du plan XOY l'ensemble $C_r^{(p)}$ contient une suite $\{z^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels telle qu'on ait $z^{(k)} > z^{(k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots$). On peut d'après la définition de C choisir les nombres naturels $n_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu_k$, $k = 1, 2, \dots$) tels qu'on ait

$$z^{(k)} = z_{n_1^{(k)}n_2^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}}.$$

Selon la monotonité de $z^{(k)}$, nous avons $n_1^{(1)} \geq n_1^{(2)} \geq n_1^{(3)} \geq \dots \geq 1$. Il existe donc les deux nombres naturels n_1 et N_1 tels qu'on ait $n_1^{(k)} = n_1$ pour $k > N_1$. Or, nous avons pour tout nombre naturel k tel qu'on ait $k > N_1$, $n_2^{(k)} \geq n_2^{(k+1)} \geq n_2^{(k+2)} \geq \dots \geq 1$. On peut donc choisir les deux nombres naturels n_2 et N_2 tels qu'on ait $n_2^{(k)} = n_2$ pour $k > N_2$ et $N_2 > N_1$. De même, on peut déterminer de proche en proche les nombres naturels n_k et N_k ($k = 3, 4, \dots$) de la manière qu'on a $n_i^{(k)} = n_k$ pour $k > N_i$ et $N_i > N_{i-1}$. Posons maintenant $\hat{z}^{(k)} = z_{n_1n_2 \dots n_k}$. Nous avons alors $\hat{z}^{(k)} > \hat{z}^{(k+1)}$

($k = 1, 2, \dots$). Or, on peut écrire pour $k > N_l$, $z^{(k)} = z_{n_1 n_2 \dots n_l n_{l+1}^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}$, d'où nous avons pour $k > N_l$

$$z^{(k)} = \hat{z}^{(l)} - 2^{-(n_1 + \dots + n_l)} \left(2^{-n_{l+1}^{(k)}} + 2^{-(n_{l+1}^{(k)} + n_{l+1}^{(k)})} + \dots + 2^{-(n_{l+1}^{(k)} + n_{l+2}^{(k)} + \dots + n_{\nu_k}^{(k)})} \right),$$

ce qui donne encore pour $k > N_l$

$$\hat{z}^{(l)} < z^{(k)} + 2^{-(n_1 + n_2 + \dots + n_l)} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Or, nous avons d'après la définition de C_r $r > z^{(1)} > z^{(k)}$. Par suite, on peut choisir un nombre naturel N de la façon qu'on a $r > \hat{z}^{(l)}$ pour $l > N$. D'ailleurs, nous avons pour $k > N_l$

$$p \in E_{\mu(n_1^{(k)}) \mu(n_2^{(k)}) \dots \mu(n_{\nu_k}^{(k)})} < E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_l)},$$

d'où nous avons $\hat{z}^{(l)} \in C_r^{(p)}$ ($l = 1, 2, \dots$) et par suite $\hat{z}^{(l)} \in C_r^{(p)}$ pour $l > N$. Maintenant, nous désignons par Q l'ensemble de tous les nombres rationnels $z_{m_1 m_2 \dots m_k}$ tels qu'on ait

$$z_{m_1 m_2 \dots m_k} \in C_r^{(p)} \quad \text{et} \quad \mu(n_i) = \mu(m_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Puisque nous avons $\hat{z}^{(l)} \in C_r^{(p)}$ pour $l > N$, les nombres rationnels $\hat{z}^{(l)}$ sont contenus dans l'ensemble Q , ce qui donne $Q \neq \emptyset$. Or, on peut voir que Q est dense en-soi. En effet, prenons un nombre rationnel $z_{m_1 m_2 \dots m_k}$ dans Q . Il existe une infinité dénombrable de nombres naturels m tels qu'on ait $\mu(n_{k+1}) = \mu(m)$; désignons par $m^{(l)}$ ($l = 1, 2, \dots$) ces nombres naturels. Nous avons alors

$$r > z_{m_1 m_2 \dots m_k} > z_{m_1 m_2 \dots m_k m^{(l)}},$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} z_{m_1 m_2 \dots m_k m^{(l)}} = z_{m_1 m_2 \dots m_k},$$

et

$$p \in E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_k) \mu(n_{k+1})} = E_{\mu(m_1) \mu(m_2) \dots \mu(m_k) \mu(m^{(l)})}.$$

Il en résulte que les nombres rationnels $z_{m_1 m_2 \dots m_k m^{(l)}}$ ($l = 1, 2, \dots$) est contenu dans Q et par suite que $z_{m_1 m_2 \dots m_k}$ est un nombre d'accumulation dans Q , ce qui donne que Q est dense en-soi. Par conséquent, le crible C_r est régulier au sens de M. P. NOVIKOFF.

Puis, nous allons voir que C est un crible qui définit l'ensemble analytique E . Soit p un point de l'ensemble analytique E . Il existe alors une suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait

$p \in E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Or, on peut choisir d'après la définition de $\mu(n)$ une suite $\{m_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait $\mu(m_k) = n_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Selon la définition du crible C , l'ensemble $C^{(p)}$ contient alors les nombres rationnels $z_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ($k = 1, 2, \dots$) et nous avons $z_{m_1 m_2 \dots m_k} > z_{m_1 m_2 \dots m_k m_{k+1}}$, d'où $C^{(p)}$ n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ .

Ensuite pour un point p du plan XOY , supposons que $C^{(p)}$ ne soit pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Il existe dans l'ensemble $C^{(p)}$ une suite $\{z^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels telle qu'on ait $z^{(k)} > z^{(k+1)}$. On peut alors déterminer les nombres naturels $n_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, \nu_k$, $k = 1, 2, \dots$) tels qu'on ait

$$z^{(k)} = z_{n_1^{(k)} n_2^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Comme nous avons fait plus haut, on peut choisir les deux suites $\{n_k\}$ et $\{N_k\}$ de nombres naturels comme il suit, $n_i^{(k)} = n_i$ pour $k > N_i$, et $N_i > N_{i-1}$. Nous avons alors pour $k > N_i$, $n_i^{(k)} = n_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$) et par suite

$$(2) \quad E_{\mu(n_1^{(k)}) \mu(n_2^{(k)}) \dots \mu(n_{\nu_k}^{(k)})} = E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_l) \mu(n_{l+1}^{(k)}) \dots \mu(n_{\nu_k}^{(k)})} < E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_l)}.$$

Or, puisque $C^{(p)}$ contient les nombres rationnels $z^{(k)} = z_{n_1^{(k)} n_2^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}}$, nous avons d'après la définition de C $p \in E_{\mu(n_1^{(k)}) \mu(n_2^{(k)}) \dots \mu(n_{\nu_k}^{(k)})}$, ce qui donne d'après l'inégalité (2) $p \in E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_l)}$ ($l = 1, 2, \dots$). Nous avons donc $p \in \bigcap_{l=1}^{\infty} E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_l)}$, d'où p est un point de l'ensemble analytique E . Il en résulte que C est un crible qui définit E .

Enfin, démontrons que pour tout point p de $R(x, y)$ $C^{(p)}$ contient une infinité dénombrable de points. D'après la définition des ensembles E_{n_1} , nous avons $E_{n_1} = R(x, y)$ ($n_1 = 1, 2, \dots$), d'où pour un point p de $R(x, y)$ $C^{(p)}$ contient les nombres rationnels z_{n_1} ($n_1 = 1, 2, \dots$), c'est-à-dire, $C^{(p)}$ contient une infinité dénombrable de nombres rationnels.

Par suite C est un crible complètement régulier qui définit l'ensemble E . C. Q. F. D.

Remarque. Le crible C est aussi régulier au sens de M. P. NOVIKOFF. En effet, pour un point p du plan XOY , supposons que $C^{(p)}$ ne soit pas bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe OZ . Il existe alors un nombre rationnel r tel que $C_r^{(p)}$ ne soit pas bien ordonné. Or, comme C est complètement régulier, $C_r^{(p)}$ et par suite $C^{(p)}$ contient une partie dense en-soi, d'où C est régulier au sens de M. P. NOVIKOFF.

2. La définition des ensembles $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Définirons sur l'axe OZ les intervalles.

$$I_{n_1 n_2 \dots n_k} = \left[\sum_{i=1}^{k-1} 2^{-2(n_1+n_2+\dots+n_i)+i} + 2^{-2(n_1+n_2+\dots+n_k)+k-1}, \sum_{i=1}^k 2^{-2(n_1+n_2+\dots+n_i)+i} \right].$$

On peut voir alors sans peine que

- 1°, les intervalles $I_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont disjoints deux-à-deux,
 2°, suivant qu'on a $z_{n_1 n_2 \dots n_j} > z_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ou $< z_{m_1 m_2 \dots m_k}$, nous avons $I_{n_1 n_2 \dots n_j} > I_{m_1 m_2 \dots m_k}$ ou $< I_{m_1 m_2 \dots m_k}$.⁽¹²⁾

Puis, prenons dans l'intervalle $I_{n_1 n_2 \dots n_k}$ l'ensemble $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de tous les nombres rationnels suivants

$$w_{n_1 n_2 \dots n_k} = \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-(n_1+n_2+\dots+n_i)+i} + 2^{-(n_1+\dots+n_k)+k-1},$$

et

$$w_{n_1 n_2 \dots n_k} + 2^{-(n_1 n_2 + \dots + n_k) + k - m} \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Il est alors évident que

3°, l'ordre de l'ensemble $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est de type ω suivant la direction positive de l'axe OZ ,

4°, la relation $w_{n_1 n_2 \dots n_j} > w_{m_1 m_2 \dots m_k}$ est équivalente à la relation $z_{n_1 n_2 \dots n_j} > z_{m_1 m_2 \dots m_k}$,

5°, La transformation $\varphi(t)$ qui transforme $z_{n_1 n_2 \dots n_j}$ en $w_{n_1 n_2 \dots n_j}$ établit une homéomorphe entre les ensembles $\{z_{n_1 n_2 \dots n_j}\}$ et $\{w_{n_1 n_2 \dots n_j}\}$ ($j, n_j = 1, 2, \dots$).

3. La modification des cribles complètement réguliers. Étant donné un schème de SOUSLIN $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de rectangles de BAIRE qui satisfait aux conditions (1) de la section 1. Considérons les deux cribles

$$C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_k)} \times (z_{n_1 n_2 \dots n_k}),$$

et

$$\hat{C} = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} E_{\mu(n_1) \mu(n_2) \dots \mu(n_k)} \times Z_{n_1 n_2 \dots n_k},$$

où $\mu(n)$ est une fonction de nombres naturels telle que pour tout nombre

⁽¹²⁾ Nous désignons par $I_{n_1 n_2 \dots n_j} > I_{m_1 m_2 \dots m_k}$ que pour deux points $p_{n_1 n_2 \dots n_j}$ et $p_{m_1 m_2 \dots m_k}$, tels qu'on ait $p_{n_1 n_2 \dots n_j} \in I_{n_1 n_2 \dots n_j}$ et $p_{m_1 m_2 \dots m_k} \in I_{m_1 m_2 \dots m_k}$, nous avons toujours $p_{n_1 n_2 \dots n_j} > p_{m_1 m_2 \dots m_k}$.

naturel k il existe une infinité dénombrable de nombres naturels n tels qu'on ait $k = \mu(n)$.

Nous avons alors les relations suivantes entre les deux cribles C et $\hat{C}$.

1°, Pour un point p du plan XOY , l'ensemble $\hat{C}^{(p)}$ contient un ensemble $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$ des nombres rationnels ou bien $\hat{C}^{(p)}$ ne contient aucun nombre de l'ensemble $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$, suivant que l'ensemble $C^{(p)}$ contient le nombre rationnel $z_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ou non.

2°, $\hat{C}$ est le crible complètement régulier.

En effet, étant donné un nombre rationnel r , supposons que pour un point p du plan XOY l'ensemble $\hat{C}_r^{(p)}$ contient une suite $\{z^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels telle qu'on ait $z^{(k)} > z^{(k+1)}$. Puisque les ensembles $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont bien ordonnés suivant la direction positive de l'axe OZ , on peut supposer, sans perdre la généralité, que les deux nombres distincts $z^{(i)}$ et $z^{(j)}$ n'appartiennent pas au même ensemble $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Désignons par $Z_{n_1^{(k)} n_2^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}}$ l'un des ensembles $Z_{n_1 n_2 \dots n_k}$ qui contient le nombre $z^{(k)}$.

Comme nous avons d'après l'hypothèse $z^{(k)} > z^{(k+1)}$, nous avons selon la proposition 4° de la section 2 $w_{n_1^{(k)} n_2^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}} > w_{n_1^{(k+1)} n_2^{(k+1)} \dots n_{\nu_{k+1}}^{(k+1)}}$. Par suite, d'après la proposition 1° de la section 2, l'ensemble $C_{r_0}^{(p)}$, où $r_0 = z_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{\nu_1}^{(1)}}$, contient les nombres $z_{n_1^{(k)} n_2^{(k)} \dots n_{\nu_k}^{(k)}}$ ($k = 2, 3, \dots$), d'où $C_{r_0}^{(p)}$ n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Or, puisque C est un crible complètement régulier, $C_{r_0}^{(p)}$ contient une partie P dense en-soi, d'où $\varphi(P)$ est d'après la proposition 5° de la section 2 aussi partout dense en-soi. Or, l'ensemble $\varphi(P)$ appartient à l'ensemble $\hat{C}_r^{(p)}$, ce qui entraîne que l'ensemble $\hat{C}_r^{(p)}$ contient une partie dense en-soi, et le crible $\hat{C}_r$ est donc régulier au sens de M. P. NOVIKOFF. Il est évident que pour tout point p de $R(x, y)$ l'ensemble $\hat{C}^{(p)}$ contient une infinité dénombrable de nombres rationnels. Il en résulte que le crible $\hat{C}$ est complètement régulier.

3°, Les deux cribles C et $\hat{C}$ définissent le même ensemble analytique.

En effet, supposons que pour un point p du plan XOY $C^{(p)}$ ne soit pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . On peut alors choisir dans l'ensemble $C^{(p)}$ les nombres rationnels $z^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) tels qu'on ait $z^{(k)} > z^{(k+1)}$. Or, d'après la définition de $\hat{C}$ les nombres rationnels $\varphi(z^{(k)})$ ($k = 1, 2, \dots$) sont contenus dans l'ensemble $\hat{C}^{(p)}$ et $\varphi(z^{(k)}) > \varphi(z^{(k+1)})$, ce qui donne que $\hat{C}^{(p)}$ n'est pas bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe OZ .

Puis, supposons que pour un point p du plan XOY $\hat{C}^{(p)}$ n'est pas bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe OZ . On peut alors choisir dans $\hat{C}^{(p)}$ une suite $\{z^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels telle qu'on ait $z^{(k)} > z^{(k+1)}$ ($k = 1, 2, \dots$). Comme nous avons fait dans la

démonstration de la proposition 2° de cette section, on peut choisir parmi l'ensemble $\{wn_1n_2 \dots n_k\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) une suite $\{w^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels dans $\hat{C}^{(p)}$ telle qu'on ait $w^{(k)} > w^{(k+1)}$. Or, d'après les définitions de C et $w^{(k)}$, les nombres rationnels $\varphi^{-1}(w^{(k)})$ sont contenus dans C et $\varphi^{-1}(w^{(k)}) > \varphi^{-1}(w^{(k+1)})$, d'où $C^{(p)}$ n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Les deux cribles C et $\hat{C}$ définissent donc le même ensemble analytique.

4°, Pour tout point p du plan XOY , $\hat{C}^{(p)}$ est bien ordonné de type $\alpha\omega$ ou non bien ordonné par rapport à la direction positive de l'axe OZ .

En effet, admettons que pour un point p du plan XOY $\hat{C}^{(p)}$ soit bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Alors, $C^{(p)}$ est aussi d'après sa définition bien ordonné en même condition. Soient α le type d'ordre de l'ensemble $C^{(p)}$ et $\{z^{(\xi)}\}$ ($0 \leq \xi < \alpha$) les nombres rationnels de $C^{(p)}$ rangés de manière qu'on ait $z^{(\xi_1)} < z^{(\xi_2)}$ pour $\xi_1 > \xi_2$. Or, $\hat{C}^{(p)}$ est d'après sa définition l'ensemble de tous les nombres rationnels des ensembles $Zn_1n_2 \dots n_k$ tels qu'on ait $\varphi(z^{(\xi)}) \in Zn_1n_2 \dots n_k$. Il en résulte que $\hat{C}^{(p)}$ est d'après la proposition 3° la section 2 bien ordonné de type $\alpha\omega$.

4. La modification des cribles complètement réguliers (suite). Maintenant, n étant un nombre naturel, prenons tous les intervalles $\{I_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) d'intervalles de BAIRE d'ordre n . Et posons dans $R_0(x, y; z)$.

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} I_j \right) \times \{(r_1) + (r_2) + \dots + (r_k)\},$$

$$\overset{*}{C} = \hat{C} + H,$$

où

$$r_k = 1 + \sum_{i=1}^k 2^{-i}.$$

Les deux cribles C et $\overset{*}{C}$ définissent le même ensemble analytique. En effet, pour le voir, il suffit d'après la proposition 3° de la section 3 de montrer que les deux cribles $\overset{*}{C}$ et $\hat{C}$ définissent le même ensemble analytique. Or, nous avons pour tout point p du plan XOY $\overset{*}{C}^{(p)} = \hat{C}^{(p)} + H^{(p)}$ et $H^{(p)}$ est toujours bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Les cribles $\overset{*}{C}$ et $\hat{C}$ donc définissent le même ensemble analytique. Maintenant désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les points p de $R(x, y)$ tels que $\overset{*}{C}^{(p)}$ soit bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . Comme on sait, l'ensemble $\mathcal{E}$ est un complémentaire analytique, et en se servant du crible $\overset{*}{C}$, on peut décomposer $\mathcal{E}$ en ses constituants $\{\mathcal{E}_\alpha\}$ ($\alpha < \mathcal{Q}$) c'est-à-dire, étant un nombre ordinal α de la deuxième classe au plus, en désignant par $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble de tous les points p de $R(x, y)$ tels que l'ordre de $\overset{*}{C}^{(p)}$

soit de type α suivant la direction positive de l'axe OZ , nous avons $\mathcal{E} = \sum_{\alpha < \Omega} \mathcal{E}_\alpha$.

Or, on peut démontrer que pour tout point x de $R(x)$ $\mathcal{E}_\alpha^{(x)}$ est contenu dans un intervalle de BAIRE d'ordre n . En effet, comme on sait, le nombre ordinal α peut être, d'une seule façon, écrit sous la forme $\alpha = \gamma\omega + m$ et $0 \leq m < \omega$. Maintenant, prenons un point $p = (x, y_0)$ de $\mathcal{E}_\alpha^{(x)}$, et supposons que le point $p = (x, y_0)$ soit contenu dans un intervalle I_{k_0} de BAIRE d'ordre n . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \hat{C}^{(p)*} &= \hat{C}^{(p)} + H^{(p)} = \hat{C}^{(p)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^{(y_0)} \times (x) \times \{(r_1) + (r_2) + \dots + (r_k)\} \\ &= \hat{C}^{(p)} + (r_1) + (r_2) + \dots + (r_{k_0}). \end{aligned}$$

Or, d'après la définition du crible $\hat{C}$ le type d'ordre de $\hat{C}^{(p)}$ est de deuxième espèce, et donc le type d'ordre de $\hat{C}^{(p)}$ peut être écrit sous la forme $\lambda\omega$. Par conséquent, le type d'ordre de $\hat{C}^{(p)*}$ est de la forme $\lambda\omega + k_0$. Or, en autre part, le type d'ordre de $\hat{C}^{(p)*}$ est $\alpha = \gamma\omega + m$, d'où nous avons $\gamma\omega + m = \lambda\omega + k_0$, ce qui donne $k_0 = m$. Il en résulte que le point p est contenu dans l'intervalle I_m de BAIRE d'ordre n . Par conséquent, $\mathcal{E}_\alpha^{(x)}$ est contenu dans l'intervalle I_m de BAIRE d'ordre n .

Donc, en posant la définition suivante, on peut résumer les résultats ainsi obtenus comme il suit.

Définition. Soient C un crible complètement régulier défini dans $R_0(x, y; z)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les points p de $R(x, y)$ tels que $C^{(p)}$ soit bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ . En se servant du crible C , on peut décomposer $\mathcal{E}$ en ses constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ ($0 \leq \alpha < \Omega$), où $\mathcal{E}_\alpha$ est l'ensemble de tous les points p de $\mathcal{E}$ tels que l'ordre de $C^{(p)}$ soit de type α . Si l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha^{(x)}$ est toujours contenu dans un intervalle de BAIRE d'ordre n , quels que soient les points x de $R(x)$ et le nombre ordinal α de la deuxième classe au plus, nous appelons C un crible complètement régulier de classe n .

Lemme 2. Soient n un nombre naturel et E un ensemble analytique contenu dans $R(x, y)$. On peut choisir un crible complètement régulier de classe n qui définit l'ensemble analytique E .

5. La décomposition des cribles complètement réguliers (de classe n). Étant donné un crible C complètement régulier, rangeons tous les rectangles du crible C en une suite infinie $\{J_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$). En désignant par λ_k l'ordre du rectangle J_k de BAIRE, posons

$$\lambda_k^* = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) + k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Nous avons alors $\lambda_k < \lambda_k^* < \lambda_{k+1}^*$. Maintenant nous décomposerons le rectangle J_k en les rectangles partiels de BAIRE d'ordre λ_k^* , et désignons par J_{kn} ($n = 1, 2, \dots$) ces rectangles partiels de BAIRE d'ordre λ_k^* . Nous avons alors $C = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_{kn}$ et les projections sur le plan XOY des deux rectangles distincts $J_{k_i n_i}$ ($i = 1, 2$) de la famille $\{J_{kn}\}$ ($k, n = 1, 2, \dots$) sont distincts deux-à-deux. En effet, si l'on a $k_1 = k_2$, nous avons d'après la définition de J_{kn} les projections de $J_{k_1 n_1}$ et $J_{k_2 n_2}$ sont disjointes deux-à-deux. Si l'on $k_1 \neq k_2$, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $k_1 < k_2$. Nous avons alors $\lambda_{k_1}^* > \lambda_{k_2}^*$ c'est-à-dire, l'ordre $\lambda_{k_1}^*$ de $J_{k_1 n_1}$ est inférieur à l'ordre $\lambda_{k_2}^*$ de $J_{k_2 n_2}$. Les projections de ces rectangles donc distincts deux-à-deux.

Maintenant, en se servant des rectangles J_{kn} , nous allons définir un schéma de SOUSLIN $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de rectangles de BAIRE comme il suit. Les projections (sur le plan XOY) de deux rectangles de la famille $\{J_{kn}\}$ sont disjointes deux-à-deux, ou bien l'un est contenu dans l'autre. Par suite, il existe dans la famille $\{J_{kn}\}$ au moins et par suite une infinité dénombrable de rectangles J_{kn} tels que la projection sur le plan XOY de J_{kn} n'appartient à aucune projection d'autre rectangle de la famille $\{J_{kn}\}$. Choisissons parmi la famille $\{J_{kn}\}$ tous les tels rectangles et désignons par H_{n_1} ($n_1 = 1, 2, \dots$) ces rectangles ainsi obtenus. Puis, prenons dans la famille $\{J_{kn}\}$ tout rectangle J_{kn} dont la projection sur le plan XOY n'appartient qu'à la projection de H_{n_1} sur le même plan et désignons par $H_{n_1 n_2}$ ($n_2 = 1, 2, \dots$) ces rectangles ainsi obtenus. D'une manière générale, les rectangles $H_{n_1 n_2 \dots n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) étant définis, nous prenons dans la famille $\{J_{kn}\}$ tout rectangle J_{kn} dont la projection sur le plan XOY n'appartient qu'aux projections de $H_{n_1 n_2 \dots n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sur le même plan et désignons par $H_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ ($n_{k+1} = 1, 2, \dots$) ces rectangles ainsi obtenus.

Quand on désigne par $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ la projection de $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sur le plan XOY , nous pouvons démontrer les propositions suivantes.

1°. Quel que soit le point p de $R(x, y)$, il existe une suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait $(p) = \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}$.

En effet, étant donné un point p de $R(x, y)$, considérons tous les rectangles J_{kn} tels que la projection de J_{kn} sur le plan XOY contienne le point p . D'après la définition de C , il existe dans la famille $\{J_{kn}\}$ une infinité dénombrable de tels rectangles. On peut les ranger d'après la définition de J_{kn} une suite infinie $\{J_{k_i n_i}\}$ ($i = 1, 2, \dots$) de la manière que $k_i < k_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$). Comme le rectangle $J_{k_i n_i}$ est d'ordre $\lambda_{k_i}^*$, nous avons $\text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i} > \text{Proj}_{XOY} J_{k_{i+1} n_{i+1}}$ et $\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i} = (p)$. Or, il existe une suite $\{m_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait $J_{k_i n_i} = H_{m_1 m_2 \dots m_i}$.

En effet, puisque tout rectangle de la famille $\{J_{kn}\}$, tel qu'on ait $p \in \text{Proj}_{XOY} J_{kn}$, est contenu dans la suite $\{J_{k_i n_i}\}$ ($i = 1, 2, \dots$) et qu'on a $\text{Proj}_{XOY} J_{k_1 n_1} > \text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i}$, il existe donc un nombre naturel m_1 , tel qu'on ait $J_{k_1 n_1} = H_{m_1}$. Puis, tout rectangle J_{kn} tel qu'on ait $p \in \text{Proj}_{XOY} J_{kn}$ et qu'on ait $\text{Proj}_{XOY} J_{kn} < \text{Proj}_{XOY} H_{m_1}$ est un des rectangles $J_{k_i n_i}$ et $\text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i} < \text{Proj}_{XOY} J_{k_2 n_2}$ ($i = 2, 3, \dots$), il existe donc un nombre naturel m_2 tel qu'on ait $J_{k_2 n_2} = H_{m_1 m_2}$. De même, on peut démontrer de proche en proche qu'il existe les nombres naturels $\{m_k\}$ ($k = 3, 4, \dots$), tel qu'on ait $J_{k_i n_i} = H_{m_1 m_2 \dots m_i}$. Il existe donc une suite $\{m_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait $(p) = \prod_{i=1}^{\infty} G_{m_1 m_2 \dots m_i}$. C. Q. F. D.

2°. Pour deux suites distinctes $\{n_k^{(i)}\}$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels, nous avons $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_k^{(1)}} \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_k^{(2)}} = 0$.

En effet, soient $\{n_k^{(i)}\}$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) les deux suites distinctes de nombres naturels. Il existe alors un nombre naturel j tel qu'on ait

$$n_1^{(1)} = n_1^{(2)}, n_2^{(1)} = n_2^{(2)}, \dots, n_j^{(1)} = n_j^{(2)}, n_{j+1}^{(1)} \neq n_{j+1}^{(2)}.$$

Or, nous avons $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{j+1}^{(1)}} G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_{j+1}^{(2)}} = 0$. En effet, supposons, par impossible, qu'on ait $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{j+1}^{(1)}} G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_{j+1}^{(2)}} \neq 0$. Or, comme $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{j+1}^{(1)}}$ et $G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_{j+1}^{(2)}}$ sont les rectangles de BAIRE, on peut supposer, sans perdre la généralité, que $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{j+1}^{(1)}} < G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_{j+1}^{(2)}}$. Les rectangles $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_i^{(1)}}$ ($i = 1, 2, \dots, j$) et $G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_{j+1}^{(2)}}$ sont distincts deux-à-deux et contiennent $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{j+1}^{(1)}}$ respectivement, ce qui donne une contradiction. Nous avons donc $G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_{j+1}^{(1)}} G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_{j+1}^{(2)}} = 0$, et par suite, $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_k^{(1)}} \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_k^{(2)}} = 0$. C. Q. F. D.

3°. Pour tout suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels, la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est précisément un ensemble d'un point.

En effet, étant donné une suite $\{m_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels, considérons les ensembles $H_{m_1 m_2 \dots m_k}$. Il existe d'après la définition de $H_{m_1 m_2 \dots m_i}$ une suite $\{(k_i, n_i)\}$ ($i = 1, 2, \dots$) de paires de nombres naturels, telle qu'on ait $H_{m_1 m_2 \dots m_i} = J_{k_i n_i}$. Puisque les ensembles $\text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i}$ sont distincts deux-à-deux et que nous avons $\text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i} > \text{Proj}_{XOY} J_{k_{i+1} n_{i+1}}$, nous avons $k_i < k_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots$), et par suite, le rectangle $\text{Proj}_{XOY} J_{k_i n_i} = G_{m_1 m_2 \dots m_i}$ est de l'ordre $\geq i$. Donc, le produit $\prod_{i=1}^{\infty} G_{m_1 m_2 \dots m_i}$ ne contient qu'un point. C. Q. F. D.

4°. La famille $\{J_{kn}\}$ ($k, n = 1, 2, \dots$) de rectangles de BAIRE concide précisément avec la famille $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$).

En effet, comme tout ensemble de la famille $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ appartient à la famille $\{J_{kn}\}$ ($k, n = 1, 2, \dots$), il suffit de montrer que tout ensemble de la famille $\{J_{kn}\}$ appartient à la famille $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$. Considérons un ensemble $J_{k_0 n_0}$ de la famille $\{J_{kn}\}$. Prenons maintenant tout rectangle J_{kn} tel qu'on ait $\text{Proj}_{XOY} J_{k_0 n_0} \subset \text{Proj}_{XOY} J_{kn}$. Il existe d'après la définition de J_{kn} un nombre fini de tels ensembles, et on peut ranger une suite finie

$$J_{k_1 n_1}, J_{k_2 n_2}, \dots, J_{k_j n_j} = J_{k_0 n_0},$$

de la manière que $k_i < k_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, j-1$). De même que nous avons fait dans la démonstration de la proposition 1° de cette section, on peut démontrer qu'il existe un nombre fini de nombres naturels m_k ($k = 1, 2, \dots$), tels qu'on ait $J_{k_i n_i} = H_{m_1 m_2 \dots m_i}$. Donc, $J_{k_0 n_0}$ appartient à la famille $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$. C. Q. F. D.

Grâce à cette proposition, on peut écrire le crible C comme la somme $C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de rectangles $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de BAIRE, ou en désignant par $r_{n_1 n_2 \dots n_k}$ la projection des rectangles $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sur l'axe OZ , nous avons

$$C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (r_{n_1 n_2 \dots n_k}).$$

Nous avons donc le

Lemma 3. Soient E un ensemble analytique contenu dans $R(x, y)$ et n un nombre naturel. On peut définir un schème de SOUSLIN $\{G_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de rectangles de BAIRE et un système $\{r_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels comme il suit,

(a), $C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (r_{n_1 n_2 \dots n_k})$ est un crible complètement régulier de classe n qui définit l'ensemble analytique E ,

(β), quel que soit le point p de $R(x, y)$, il existe une suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait $(p) = \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}$,

(γ), pour toute suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels, la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est non-vide et ne contient qu'un point.

(δ), pour deux suites distinctes $\{n_k^{(i)}\}$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels, nous avons $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1^{(1)} n_2^{(1)} \dots n_k^{(1)}} \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1^{(2)} n_2^{(2)} \dots n_k^{(2)}} = 0$.

6. L'effectivité des ensembles analytiques. Pour simplifier la description, nous ne considérons dans la suite que les ensembles analytiques contenus dans un domaine fondamental. Soit E un ensemble analytique contenu dans un domaine fondamental R de quelque dimensions. Si l'on peut nommer un schème de SOUSLIN $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de

parallélépipèdes de BAIRE tel qu'on ait $E = \sum_{(v)} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Nous appelons E un ensemble effectivement analytique et $R-E$ un complémentaire effectivement analytique. Nous avons alors sans peine les suivants.

1°. Soit $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite infinie d'ensembles effectivement analytiques. Alors, la somme $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ et la partie commune $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ de ces ensembles sont aussi effectivement analytiques en même temps.

2°. E étant un ensemble effectivement analytique dans un domaine fondamental $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$. La projection de E sur le plan $x_n = 0$ est aussi effectivement analytique.

3°. Pour qu'un ensemble analytique E contenu dans un domaine fondamental soit effectivement analytique, il faut et il suffit qu'il existe une suite infinie G_n ($n = 1, 2, \dots$) de parallélépipèdes et une suite infinie $\{r_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels telles que le crible $C = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \times (r_n)$ définit l'ensemble analytique E .

De plus, en se servant des propositions 1°–3° de cette section, on peut démontrer, suivant la marche des démonstrations des lemmes 1–3, que E étant un ensemble effectivement analytique, on peut donner effectivement un crible complètement régulier qui définit E .

Grâce à ces propositions en se servant de la méthode⁽¹³⁾ de M. N. LUSIN sur les cribles, nous avons le

Lemme 4. Soient C_1 et C_2 les deux cribles réguliers au sens de M. P. NOVIKOFF contenus dans $R_0(x_1, x_2, \dots, x_n; y)$ qui consiste en une infinité dénombrable de parallélépipèdes de BAIRE situés sur les plans parallèles au plan $y = 0$. Alors les deux ensembles de tous les points p de $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels qu'on ait $\tau(C_1^{(p)}) \geq \tau(C_2^{(p)})$ et $\tau(C_1^{(p)}) = \tau(C_2^{(p)})$ sont effectivement analytiques en même temps.

III. La construction d'ensemble uniformisateur.

7. Le théorème de l'uniformisation. Nous allons démontrer dans ce paragraphe le théorème de l'uniformisation des complémentaires analytiques :

Théorème de l'uniformisation. *Tout complémentaire analytique plan E peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire analytique, et de plus, si l'ensemble E est donné effectivement par un crible, on peut donner aussi effectivement un uniformisateur de E .*

Pour le démontrer, nous allons donner quelques modifications du théorème dans la suite. Comme tout ensemble analytique peut être défini

(13) N. LUSIN, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, (1930), 213.

par un crible, pour le voir, il suffit de démontrer le cas où l'ensemble E est donné effectivement par un crible. Puisque l'ensemble de tous les nombres rationnels est effectivement dénombrable, on peut ranger effectivement ces nombres rationnels en une suite infinie $\{r_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$). Nous avons alors

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \{I_k \times (OY)\} \{E - \sum_{n=1}^{\infty} ((r_n) \times (OY))E\} + \sum_{n=1}^{\infty} ((r_n) \times (OY))E$$

où I_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) désigne l'intervalle ouvert $(k, k+1)$. Or, grâce à la méthode donnée par M. M. N. LUSIN et P. NOVIKOFF⁽¹⁴⁾, on peut choisir effectivement un point parmi chaque ensemble $((r_n) \times (OY))E$ qui n'est pas vide. Par suite, pour démontrer le théorème de l'uniformisation il suffit de trouver effectivement un uniformisateur de $\{I_k \times (OY)\} \{E - \sum_{n=1}^{\infty} ((r_n) \times (OY))E\}$. Puisque $\{I_k \times (OY)\} \{E - \sum_{n=1}^{\infty} ((r_n) \times (OY))E\}$ est un complémentaire effectivement analytique contenu dans $I_k^* \times (OY)$, où I_k^* est l'ensemble de tous les nombres irrationnels contenus dans I_k et donc homéomorphe à $R(x)$, nous pouvons donc supposer, sans perdre la généralité, que le complémentaire analytique donné E soit contenu dans l'ensemble $R(x) \times (OY)$. Or, on peut transformer effectivement l'axe OY en un ensemble fermé N relativement à $R(y)$ par une transformation—désignons par $\varphi(y)$ —qui donne une homéomorphie généralisée (0.2) entre l'axe OY et N . Selon la transformation

$$\sigma(p) : x' = x, \quad y' = \varphi(y),$$

on peut établir une homéomorphie généralisée (0, 2) entre E et $\sigma(E)$. Or, tout complémentaire effectivement analytique est transformé par cette homéomorphie généralisée en un complémentaire effectivement analytique et par suite, en particulier $\sigma(E)$ est un complémentaire effectivement analytique, et nous avons $\sigma(E^{(x)}) = (\sigma(E))^{(x)}$ pour tout point x de l'axe OX . Donc, si l'ensemble U est un uniformisateur de $\sigma(E)$, l'ensemble $\sigma^{-1}(U)$ est un uniformisateur de E . Et, si l'ensemble U est un complémentaire effectivement analytique, $\sigma^{-1}(U)$ est aussi un complémentaire effectivement analytique. Par conséquent, pour démontrer le théorème de l'uniformisation, il suffit de démontrer que $\sigma^{-1}(E)$ peut être uniformisé au moyen d'un complémentaire effectivement analytique. Or, puisque $\sigma^{-1}(E)$ est un sous-ensemble de $R(x) \times R(y) = R(x, y)$, on peut supposer, sans perdre la généralité, que le complémentaire analytique donné E est contenu dans $R(x, y)$.

(14) N. LUSIN et P. NOVIKOFF, loc. cit., (7), 559-560.

8. La construction préliminaire. E étant un complémentaire effectivement analytique contenu dans $R(x, y)$, on peut définir effectivement d'après le lemme 3 un schème de SOUSLIN $\{G_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) de rectangles de BAIRE et un système $\{r_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) des nombres rationnels tels que l'ensemble

$$C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (r_{n_1 n_2 \dots n_k})$$

soit un crible complètement régulier qui définit l'ensemble effectivement analytique $CE = R(x, y) - E$, et tels que les rectangles de BAIRE $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) satisfassent aux conditions (β) , (γ) et (δ) du lemme 3. Maintenant, désignons par $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ la partie de C située rigoureusement au dessous du rectangle $G_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (r_{n_1 n_2 \dots n_k})$. D'après la définition du crible C , $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) sont les cribles réguliers au sens de M. P. NOVIKOFF.

Maintenant, considérons dans l'espace $XOYTZ$ à quatre dimensions une transformation qui transforme l'espace $XOYZ$ en l'espace $XOTZ$ de la manière suivante :

$$x' = x, \quad y' = 0, \quad z' = z, \quad t' = y.$$

Grâce à cette transformation, les cribles C et $C_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de l'espace $XOYZ$ sont transformés en les cribles de l'espace $XOTZ$, désignons par $\overset{*}{C}$ et $\overset{*}{C}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ces cribles ainsi obtenus. De plus, désignons par $\overset{*}{G}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ l'image du rectangle $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ par une transformation : $x' = x$ et $t' = y$, qui transforme l'espace XOY en l'espace XOT .

Etant donnée une suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels, posons pour le moment dans l'espace $XOYTZ$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{I}_0 &= C \times R(t), & \overset{(1)}{I}_k &= C_{n_1 n_2 \dots n_k} \times R(t), \\ \overset{(2)}{I}_0 &= \overset{*}{C} \times R(y), & \overset{(2)}{I}_k &= \overset{*}{C}_{n_1 n_2 \dots n_k} \times R(y), \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

et encore pour tout point p de $R(x, y, t)$

$$\overset{(k)}{\nu}_i(p) = \tau(\overset{(k)}{I}_i^{(p)}) \quad (k = 1, 2; i = 0, 1, 2, \dots).$$

Et enfin, nous définissons les ensembles M et $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) comme il suit,

$$\begin{aligned} M &= \overset{(p)}{E}(\overset{(1)}{\nu}_0(p) \geq \overset{(2)}{\nu}_0(p) + 1), \\ M_{n_1 n_2 \dots n_k} &= \overset{(p)}{E}(\overset{(1)}{\nu}_0(p) \geq \overset{(2)}{\nu}_0(p) + 1) \\ &+ \sum_{j=1}^k \overset{(p)}{E}(\overset{(1)}{\nu}_0(p) = \overset{(2)}{\nu}_0(p), \overset{(p)}{E}(\overset{(1)}{\nu}_1(p) = \overset{(2)}{\nu}_1(p)) \times \dots \times \overset{(p)}{E}(\overset{(1)}{\nu}_{j-1}(p) = \overset{(2)}{\nu}_{j-1}(p)) \\ &\quad \times \overset{(p)}{E}(\overset{(1)}{\nu}_j(p) \geq \overset{(2)}{\nu}_j(p) + 1) D_j \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

où D_j est l'ensemble de tous les points $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ de $R(x, y, t)$ tels que les points $(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{x}, \bar{t})$ appartiennent à $G_{n_1 n_2 \dots n_j}$ et $G_{n_1 n_2 \dots n_j}^*$ respectivement. Comme les cribles $\Gamma_i^{(1)}$ et $\Gamma_i^{(2)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) définissent les ensembles effectivement analytiques, les ensembles $E_{(\nu_i(p) = \nu_i(p))}^{(p)(1)(2)}$ et $E_{(\nu_i(p) \geq \nu_i(p)+1)}^{(p)(1)(2)}$ sont d'après la lemme 4 aussi effectivement analytiques, d'où les ensembles analytiques M et $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont définis aussi effectivement.

Enfin, nous poserons

$$Q = R(x, y) - \text{Proj}_{XOY} M,$$

$$Q_{n_1 n_2 \dots n_k} = G_{n_1 n_2 \dots n_k} - \text{Proj}_{XOY} M_{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

On voit alors sans peine que les ensembles Q et $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont les complémentaires effectivement analytiques. Nous appelons Q l'ensemble des points d'index minimum par rapport à C .

9. L'interprétation géométrique des ensembles $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Pour chaque point x de la projection de E sur l'axe OX , nous désignons par $\alpha(x)$ le type minimum des types $\tau(C^{(x, y)})$ d'ordres de $C^{(x, y)}$, lorsque y parcourt $R(y)$. Comme x est un point de la projection de E , nous avons $\alpha(x) < \varrho$. Puis, désignons par $\hat{Q}^{(x)}$ l'ensemble de tous les points (x, y) de $R(x, y)$ tels qu'on ait $\tau(C^{(x, y)}) = \alpha(x)$ et par $\hat{Q}$ la somme de tous les ensembles $\hat{Q}^{(x)}$ lorsque x parcourt la projection de E sur l'axe OX . Étant donné un point x de la projection de $\hat{Q}G_1$ sur l'axe OX , désignons par $\alpha_{n_1}(x)$ le type minimum des types $\tau(C_{n_1}^{(x, y)})$ d'ordres de $C_{n_1}^{(x, y)}$ lorsque y parcourt $\hat{Q}^{(x)}G_{n_1}$; on voit alors sans peine qu'on a $\alpha_{n_1}(x) < \varrho$. De plus, désignons par $Q_{n_1}^{(x)}$ l'ensemble de tous les points $(x, y) \in \hat{Q}^{(x)}G_{n_1}$ tels qu'on ait $\tau(C_{n_1}^{(x, y)}) = \alpha_{n_1}(x)$ et par $\hat{Q}_{n_1}$ la somme de tous les ensembles $\hat{Q}_{n_1}^{(x)}$, lorsque x parcourt la projection de $\hat{Q}G_{n_1}$ sur l'axe OX . D'une manière générale, $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(x)$ et $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) étant définis, pour un point x de la projection de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ sur l'axe OX , désignons par $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}(x)$ le type minimum des types $\tau_{(n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1})}^{(x, y)}$ d'ordre de $C_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}^{(x, y)}$ lorsque y parcourt l'ensemble $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(x)} G_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ et par $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}^{(x)}$ l'ensemble de tous les points (x, y) de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(x)} \times G_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ tels qu'on ait $\tau_{(n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1})}^{(x, y)} = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}(x)$. Et enfin, désignons par $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ la somme de tous les ensembles $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}^{(x)}$ lorsque x parcourt la projection de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ sur l'axe OX .

Nous avons alors d'après les définitions de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(x)$

$$1^\circ, \quad \hat{Q} > \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} > \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}},$$

$$2^\circ, \quad G_{n_1 n_2 \dots n_k} > \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k},$$

$$3^\circ, \quad \alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(x) < \mathcal{Q},$$

4°, pour que (x, y) soit un point de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ (ou $\hat{Q}$), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

$$(\alpha), \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(x, y)}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(x) \quad (\text{ou } \tau(C^{(x, y)}) = \alpha(x)),$$

$$(\beta), \quad (x, y) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}} G_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k} \quad (\text{ou } (x, y) \in R(x, y)).$$

Lemme 5. Pour toute suite finie $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ de nombres naturels, nous avons

$$\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} = Q_{n_1 n_2 \dots n_k} \quad \text{et} \quad \hat{Q} = Q.$$

Démonstration. Nous allons d'abord voir qu'on a $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} > Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et $\hat{Q} > Q$. Prenons un point $(\bar{x}, \bar{y})$ de l'ensemble Q . Nous avons alors d'après la définition de Q $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Proj}_{XOY} M$, d'où nous avons pour tout point t de $R(t)$

$$(\bar{x}, \bar{y}, t) \in E^{(p)} \stackrel{(1)}{\nu_0(p)} \geq \nu_0(p) + 1 \quad \text{ou} \quad \nu_0(\bar{x}, \bar{y}, t) \stackrel{(1)}{<} \nu_0(\bar{x}, \bar{y}, t) + 1,$$

ce qui donne pour tout point t de $R(t)$ $\tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) < \tau(C^{(\bar{x}, t)}) + 1$. Or, comme $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point du complémentaire analytique E , nous avons $\tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) < \mathcal{Q}$ et pour tout point t de $R(t)$ $\tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) \leq \tau(C^{(\bar{x}, t)})$, ce qui donne $\tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha(\bar{x})$, d'où $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point de $\hat{Q}$, ou nous avons $\hat{Q} > Q$.

Puis, soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un point de l'ensemble $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Maintenant, supposons par impossible que $(\bar{x}, \bar{y})$ n'appartient pas à l'ensemble $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Puisque $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est contenu dans Q , $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point de Q et par de l'ensemble $\hat{Q}$. Donc, en vertu de 1° de cette section, nous avons

$$(1_1) \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q} \quad \text{et} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1},$$

ou bien pour un nombre naturel j ($j < k$)

$$(1_2) \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, j) \quad \text{et} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}.$$

Or, puisque les deux cas (1₁) et (1₂) sont traités analogiquement, nous ne considérons que le cas (1₂) dans la suite.

Comme $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point de $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, j$), nous avons d'après 4° de cette section

$$(\alpha^*) \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_i}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) \quad (i = 1, 2, \dots, j).$$

D'ailleurs, Comme $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est contenu dans le rectangle $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de BAIRE, $(\bar{x}, \bar{y})$ est d'après l'hypothèse un point de $G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$. Donc, en

vertu de (1₂) nous avons

$$(2) \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j} G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}},$$

d'où nous avons $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j}^{(\bar{x})} G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}} \neq 0$, et par suite le domaine de la définition de $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}(x)$ contient le point $\bar{x}$. Comme nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, nous avons selon la proposition 4° de cette section et (1₂)

$$\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{y})}) > \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}(\bar{x}).$$

Par suite, pour un point $(\bar{x}, \bar{y})$ de l'ensemble $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j}^{(\bar{x})} G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, nous avons

$$\alpha_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}(\bar{x}) = \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{y})}) < \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{y})}).$$

Il en résulte que pour un point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y})$ de $R(x, y, t)$ nous avons l'inégalité

$$(3) \quad \nu_{j+1}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) < \nu_{j+1}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}).$$

En autre part, comme nous avons d'après 1° de cette section $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}} < \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_i} < \hat{Q}$, nous avons pour $i = 1, 2, \dots, j+1$

$$\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_i}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha(\bar{x}),$$

d'où nous avons d'après (α^*)

$$(4) \quad \nu_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) = \nu_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, j)$$

Or, la relation $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$ entraîne $(\bar{x}, \bar{y}) \in G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, et nous avons donc d'après (2) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) \in D_{j+1}$. Par conséquent, nous avons en vertu de (3) et (4) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) \in M_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, d'où nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$. Or, puisque nous avons $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} < Q_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, $(\bar{x}, \bar{y})$ n'appartient pas à l'ensemble $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$, ce qui donne une contradiction. Donc, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et par suite $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} < \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$.

Puis, nous allons démontrer qu'on a $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} < Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et $\hat{Q} < Q$. Pour cela, supposons d'abord qu'on ait $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q$. D'après la définition de Q , il existe un point $\bar{t}$ dans $R(t)$ tel qu'on ait $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in M$, ce qui donne d'après la définition de M

$$(5) \quad \nu_0^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \geq \nu_0^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) + 1.$$

Si l'on a $\nu_0^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0$, nous avons aussi $\nu_0^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0$, d'où nous avons $\tau(C_{\bar{x}, \bar{y}}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = 0$. Donc, le point $(\bar{x}, \bar{y})$ n'appartient pas à l'ensemble $\hat{Q}$. Si $\nu_0^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) < 0$, nous avons d'après (5) $\nu_0^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) > \nu_0^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$, d'où on a

$\tau(C(\bar{x}, \bar{y})) > \tau(C(\bar{x}, \bar{t}))$. Par suite, nous avons $\tau(C(\bar{x}, \bar{y})) > \alpha(\bar{x})$, et donc $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}$, ce qui donne $\hat{Q} \subset Q$.

Maintenant supposons qu'on ait $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Si le point $(\bar{x}, \bar{y})$ n'appartient pas à Q , nous avons d'après le résultat obtenu plus haut $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}$. Or, comme $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est un sous-ensemble de $\hat{Q}$, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Puis, considérons le cas où $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient à Q . Nous avons alors

$$(6_1) \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in Q \quad \text{et} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1},$$

ou bien pour un nombre naturel j ($j < k$)

$$(6_2) \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_i} \quad (i = 1, 2, \dots, j) \quad \text{et} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}.$$

Comme nous pouvons traiter analogiquement les deux cas (6₁) et (6₂), nous ne considérons que le cas (6₂) dans la suite. Or, puisque nous avons d'après le résultat obtenu plus haut $Q_{n_1 n_2 \dots n_i} \subset \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, j$), nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, j$) et $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}$, ce qui entraîne pour $i = 1, 2, \dots, j$

$$(\alpha^{**}) \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_i}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha(\bar{x}).$$

En autre part, comme on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}} = G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}} - \text{Proj}_{XOY} M_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, on peut distinguer les deux cas.

Le premier cas. Si l'on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, nous avons aussi $(\bar{x}, \bar{y}) \in G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et par suite $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$.

Le deuxième cas. Si le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point de $G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, nous avons d'après l'hypothèse $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Proj}_{XOY} M_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$ et par suite, il existe un point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ de $R(x, y, t)$ tel qu'on ait $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in M_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$. Or, comme nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_i}$, nous avons d'après la définition du $Q_{n_1 n_2 \dots n_i}$ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in M_{n_1 n_2 \dots n_i}$, d'où on a en vertu de la définition de $M_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in & E^{(p)}(\nu_0(p) = \nu_0(p)) E^{(p)}(\nu_1(p) = \nu_1(p)) \dots E^{(p)}(\nu_{j-1}(p) = \nu_{j-1}(p)) \\ & \times E^{(p)}(\nu_j(p) = \nu_j(p)) E^{(p)}(\nu_{j+1}(p) \geq \nu_{j+1}(p) + 1) D_{j+1}, \end{aligned}$$

ce qui donne les résultats suivants

- 5°, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in D_{j+1}$ et par suite, nous avons $(\bar{x}, \bar{t}) \in G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$,
- 6°, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in E^{(p)}(\nu_i(p) = \nu_i(p))$ ($i = 1, 2, \dots, j$), ce qui entraîne $\nu_i^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \nu_i^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$,
- 7°, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in E^{(p)}(\nu_{j+1}(p) \geq \nu_{j+1}(p) + 1)$.

Or, d'après l'hypothèse sur le point $(\bar{x}, \bar{y})$, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_i}$ et par suite, nous avons selon (α^{**}) et 6°

$$(7) \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_i}^{(\bar{x}, \bar{t})}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) \quad (i = 1, 2 \dots j) \quad \text{et} \quad \tau(C^{(\bar{x}, \bar{t})}) = \alpha(\bar{x}).$$

Nous avons d'après (7) $(\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}$. Or, nous avons $(\bar{x}, \bar{t}) \in G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}} < G_{n_1}$ et par conséquent $(\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}_{G_{n_1}}$, ce qui donne de (7) et la proposition 4° de cette section $(\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}_{n_1}$. Or, comme $(\bar{x}, \bar{t})$ est un point de $G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$ et par suite de $G_{n_1 n_2}$, nous avons $(\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}_{n_1} G_{n_1 n_2}$, d'où nous avons d'après (7) et la proposition 4° de cette section $(\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2}$. De même, nous pouvons démontrer de proche en proche qu'on a $(\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_i} (i = 1, \dots, j)$, ce qui entraîne

$$(8) \quad (\bar{x}, \bar{t}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j} G_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}.$$

Or, nous avons d'après (7°) de cette section $\nu_{j+1}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \geq \nu_{j+1}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) + 1$, c'est-à-dire, nous avons

$$(9) \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{y})}) \geq \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{t})}) + 1.$$

Et, nous avons d'après (7) $\nu(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{t})}) \leq \tau(C^{(\bar{x}, \bar{t})}) = \alpha(\bar{x}) < \Omega$. Par conséquent nous avons d'après (8) et (9) $\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}^{(\bar{x}, \bar{y})}) > \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}(\bar{x})$, ce qui donne $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_j n_{j+1}}$, d'où nous avons aussi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$.

Par conséquent nous avons dans tous les cas $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$, et donc $\hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k} < Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$, d'où nous avons aussi $Q = \hat{Q}$ et $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} = \hat{Q}_{n_1 n_2 \dots n_k}$. C. Q. F. D.

10. Une propriété des ensembles $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Étant donné un crible $C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (r_{n_1 n_2 \dots n_k})$ complètement régulier (de classe n), où les rectangles $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ de BAIRE et les nombres rationnels $r_{n_1 n_2 \dots n_k}$ satisfont aux conditions données dans le lemme 3, nous définirons les ensembles Q et $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} (k, n_k = 1, 2, \dots)$, comme nous avons plus haut. On peut alors démontrer un lemme suivant utilisé dans la suite.

Lemme 6. Étant donné un point $\bar{x}$ de $R(x)$, si l'on a $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$), nous avons $\prod_{k=1}^{\infty} Q_{n_1 n_2 \dots n_k} = \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \neq 0$.

Démonstration. Comme nous avons $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} < G_{n_1 n_2 \dots n_k}$, nous avons d'après l'hypothèse $G_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} \neq 0 (k = 1, 2, \dots)$, d'où la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})}$ est non vide et par suite précisément un point, on peut représenter ce point sous la forme $(\bar{x}, \bar{y})$. Nous pouvons alors voir que $(\bar{x}, \bar{y}) = \prod_{k=1}^{\infty} Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Pour cela, démontrons les propositions suivantes.

1°. Nous avons $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) < \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$ ou bien $> \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$, suivant qu'on ait $r_{n_1 n_2 \dots n_i} < r_{n_1 n_2 \dots n_j}$ ou bien $> r_{n_1 n_2 \dots n_j}$.

En effet, prenons un nombre naturel k tel qu'on ait $k > i, j$. Comme nous avons $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} \neq 0$, on peut choisir parmi $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})}$ un point, désignons par $(\bar{x}, \bar{y})$ ce point. Puisque nous avons $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} < Q_{n_1 n_2 \dots n_i}$ et $< Q_{n_1 n_2 \dots n_j}$, le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est contenu dans les ensembles $Q_{n_1 n_2 \dots n_i}$ et $Q_{n_1 n_2 \dots n_j}$ en même temps, et nous avons donc

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in G_{n_1 n_2 \dots n_i} \quad \text{et} \quad \in G_{n_1 n_2 \dots n_j},$$

$$\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_i}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_j}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x}),$$

d'où nous avons $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) < \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$ ou $> \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$ suivant qu'on ait $r_{n_1 n_2 \dots n_i} < r_{n_1 n_2 \dots n_j}$ ou $> r_{n_1 n_2 \dots n_j}$.

2°. Nous avons $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x}) < \alpha(\bar{x})$.

En effet, prenons un point $(\bar{x}, y)$ dans l'ensemble $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Comme nous avons $Q_{n_1 n_2 \dots n_k} < Q$, nous avons

$$\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x}) = \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x}, y)}) < \tau(C^{(\bar{x}, y)}) = \alpha(\bar{x}),$$

d'où nous avons $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x}) < \alpha(\bar{x})$.

3°. L'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\} (k = 1, 2, \dots)$ de nombres ordinaux est bien ordonné de type $\alpha(\bar{x})$ suivant la grandeur des nombres ordinaux.

En effet, selon la définition $C = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (r_{n_1 n_2 \dots n_k})$ est complètement régulier, $C^{(\bar{x}, \bar{y})}$ est l'ensemble de nombres $r_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$) rationnels, et d'après la définition du $\bar{x}$, le type d'ordre de l'ensemble $\{r_{n_1 n_2 \dots n_k}\} (k = 1, 2, \dots)$ n'est pas inférieur à $\alpha(\bar{x})$. Il en résulte que l'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\} (k = 1, 2, \dots)$ de nombres ordinaux est d'après la proposition 1° de cette section bien ordonné de type $\geq \alpha(\bar{x})$ suivant la grandeur des nombres ordinaux. Or, d'après la proposition 2° de cette section, l'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\} (k = 1, 2, \dots)$ de nombres ordinaux ne contient que les nombres ordinaux inférieurs à $\alpha(\bar{x})$, d'où l'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\} (k = 1, 2, \dots)$ est bien ordonné de type $\leq \alpha(\bar{x})$ suivant la grandeur de nombres ordinaux. L'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\}$ est donc bien ordonné de type $\alpha(\bar{x})$.

$$4°. \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in Q^{(\bar{x})} \quad \text{et} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

En effet, d'après la proposition précédent l'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\} (k = 1, 2, \dots)$ est bien ordonné du type $\alpha(\bar{x})$. Or, l'ensemble α de tous les nombres ordinaux α tel qu'on ait $\alpha < \alpha(\bar{x})$ est aussi bien ordonné du

type $\alpha(\bar{x})$ et par suite on peut définir une application semblable T qui transforme l'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\}$ en α . Comme $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\}$ est un sous-ensemble de α , en désignant par α_k^* un nombre ordinal de α qui correspond à $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})$ par l'application semblable T , nous avons

$$(1) \quad \alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x}) \geq \alpha_k^* \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Or, en autre part, on peut démontrer par l'induction transfinie sur α_k^*

$$(2) \quad \tau(C_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_k^* \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Prenons d'abord α_k^* tel qu'on ait $\alpha_k^* = 0$. $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})$ est alors un nombre ordinal plus petit dans $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\}$, c'est-à-dire, $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x}) < \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$ pour $j \neq k$, d'où nous avons d'après la proposition 1° de cette section $r_{n_1 n_2 \dots n_k} < r_{n_1 n_2 \dots n_j}$ pour $j \neq k$. Il en résulte qu'on a $\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = 0 = \alpha_k^*$. Étant donné un nombre ordinal α tel qu'on ait $\alpha < \alpha(\bar{x})$, supposons que $\alpha_k^* < \alpha$ entraîne $\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_k^*$, et considérons un nombre ordinal $\alpha_{k_0}^*$ tel qu'on ait $\alpha_{k_0}^* = \alpha$. D'après la définition, l'ensemble α^* de tous les nombres ordinaux α_j^* tels qu'on ait $\alpha_j^* < \alpha_{k_0}^* = \alpha$ est bien ordonné du type α suivant la grandeur des nombres ordinaux. Or, comme la relation $\alpha_i^* < \alpha_j^*$, où α_i^* et α_j^* sont des nombres ordinaux de α^* , entraîne la relation $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) > \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$ tels qu'on ait $\alpha_j^* < \alpha_{k_0}^* = \alpha$ est bien ordonné du type α . Or, puisque la relation $r_{n_1 n_2 \dots n_i} > r_{n_1 n_2 \dots n_j}$ est équivalente à la relation $\alpha_{n_1 n_2 \dots n_i}(\bar{x}) > \alpha_{n_1 n_2 \dots n_j}(\bar{x})$, l'ensemble de tous les nombres rationnels $r_{n_1 n_2 \dots n_j}$ tels qu'on ait $\alpha_j^* < \alpha_{k_0}^* = \alpha$, c'est-à-dire, $r_{n_1 n_2 \dots n_j} < r_{n_1 n_2 \dots n_{k_0}}$ est bien ordonné du type α , d'où nous avons $\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_{k_0}}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha = \alpha_{k_0}^*$. Nous avons donc par l'induction transfinie $\tau(C_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_k^*$. Maintenant, démontrons qu'on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q$ et $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Selon la définition du crible C complètement régulier, $C^{(\bar{x}, \bar{y})}$ est l'ensemble de nombres rationnels $r_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$). Or, comme les deux ensembles $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\}$ ($k = 1, 2, \dots$) et $\{r_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) sont d'après la proposition 1° de cette section semblables deux-à-deux et comme l'ensemble $\{\alpha_{n_1 n_2 \dots n_k}(\bar{x})\}$ ($k = 1, 2, \dots$) est d'après la proposition 3° de cette section bien ordonné de type $\alpha(\bar{x})$, l'ensemble $\{r_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ($k = 1, 2, \dots$) est aussi bien ordonné de type $\alpha(\bar{x})$, c'est-à-dire, $\tau(C^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha(\bar{x})$, et par suite, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q$. Puisque nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in G_{n_1}$, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in QG_{n_1}$, ce qui entraîne $\tau(C_{n_1}^{(\bar{x}, \bar{y})}) \geq \alpha_{n_1}(\bar{x})$. Nous avons donc d'après (1) et (2) $\tau(C_{n_1}^{(\bar{x}, \bar{y})}) \geq \alpha_{n_1}(\bar{x}) \geq \alpha_1^* = \tau(C_{n_1}^{(\bar{x}, \bar{y})})$, d'où nous avons $\tau(C_{n_1}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = \alpha_{n_1}(\bar{x})$, et par suite nous avons

$(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1}$. Comme on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1} G_{n_1 n_2}$, nous avons $\tau(C_{n_1 n_2}^{(\bar{x}, \bar{y})}) \geq a_{n_1 n_2}(\bar{x})$, ce qui donne d'après (1) et (2) $\tau(C_{n_1 n_2}^{(\bar{x}, \bar{y})}) \geq a_{n_1 n_2}(\bar{x}) \geq a_2^* = \tau(C_{n_1 n_2}^{(\bar{x}, \bar{y})})$, d'où nous avons $\tau(C_{n_1 n_2}^{(\bar{x}, \bar{y})}) = a_{n_1 n_2}(\bar{x})$. Par conséquent, nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2}$. De même on peut voir de proche en proche qu'on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$.

Il est alors évident d'après la proposition 4° de cette section qu'on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in \prod_{k=1}^{\infty} Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$. C. Q. F. D.

11. La définition d'un complémentaire analytique latéralement fermé. Maintenant, posons

$$S_k = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} Q_{n_1 n_2 \dots n_k} \quad \text{et} \quad S = \prod_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Comme $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont les complémentaires analytiques, S est aussi le complémentaire analytique. Or, puisque $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont les sous-ensembles de Q et par suite de E , nous avons $S \subset E$. Nous appelons S un complémentaire analytique latéralement fermé.

Lemme 7. Pour tout point $\bar{x}$ de $R(x)$ tel qu'on ait $E^{(\bar{x})} \neq 0$, $S^{(\bar{x})}$ est non vide et fermé dans $R(y)$.

Démonstration. Comme nous avons $E^{(\bar{x})} \neq 0$, nous avons d'après la définition de Q aussi $Q^{(\bar{x})} \neq 0$. Par suite, on peut choisir d'après le lemme 3 un rectangle G_{n_1} de BAIRE tel qu'on ait $G_{n_1} Q^{(\bar{x})} \neq 0$, d'où nous avons selon la définition de Q_{n_1} aussi $Q_{n_1}^{(\bar{x})} \neq 0$. Il existe donc d'après le lemme 3 un rectangle $G_{n_1 n_2}$ de Baire tel qu'on ait $G_{n_1 n_2} Q_{n_1}^{(\bar{x})} \neq 0$, ce qui entraîne d'après la définition de $Q_{n_1 n_2}$ aussi $Q_{n_1 n_2}^{(\bar{x})} \neq 0$. De même, on peut définir de proche en proche les nombres naturels $\{n_k\}$ ($k = 3, 4, 5, \dots$) tels qu'on ait $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} \neq 0$ et par suite $G_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} \neq 0$. Maintenant prenons un point $(\bar{x}, \bar{y})$ donné comme le produit $\prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Nous avons alors d'après le lemme 6 $(\bar{x}, \bar{y}) = \prod_{k=1}^{\infty} Q_{n_1 n_2 \dots n_k} \subset S$, d'où nous avons $S^{(\bar{x})} \neq 0$.

Puis, nous démontrerons que $S^{(\bar{x})}$ est fermé dans $R(y)$. Supposons que le point $(\bar{x}, \bar{y})$ soit un point d'accumulation de l'ensemble $S^{(\bar{x})}$ et qu'on ait $(\bar{x}, \bar{y}) \in R(x, y)$. D'après la définition de $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$, on peut définir une suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) de nombres naturels telle qu'on ait $(\bar{x}, \bar{y}) = \prod_{k=1}^{\infty} G_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Or, puisque $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ est un voisinage du point $(\bar{x}, \bar{y})$ dans $R(\bar{x}, \bar{y})$, l'ensemble $G_{n_1 n_2 \dots n_k}$ contient un point de $S^{(\bar{x})}$ et par suite de $S_k^{(\bar{x})}$, d'où nous avons $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}^{(\bar{x})} = S_k^{(\bar{x})} G_{n_1 n_2 \dots n_k} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Nous avons alors d'après le lemme 6 $(\bar{x}, \bar{y}) = \prod_{k=1}^{\infty} Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$,

d'où nous avons $(\bar{x}, \bar{y}) \in S_k^{(\bar{x})}$ ($k = 1, 2, \dots$) ou $(\bar{x}, \bar{y}) \in S^{(\bar{x})}$. Il en résulte que $S^{(\bar{x})}$ est fermé dans $R(y)$. C. Q. F. D.

Lemme 8. Si l'ensemble E est donné effectivement l'ensemble S est aussi un complémentaire effectivement analytique, et est contenu dans l'ensemble des points d'index minimum par rapport au crible complètement régulier qui définit E .

En effet, si l'ensemble E est donné effectivement, on peut définir effectivement un crible C complètement régulier qui définit E . D'après la section 6, les ensembles $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}(k, n_k = 1, 2, \dots)$ sont des complémentaires effectivement analytiques, et par suite l'ensemble S est aussi de même. En outre, les ensembles $Q_{n_1 n_2 \dots n_k}$ sont contenus dans l'ensemble des points d'index minimum par rapport à C , et donc S est contenu dans le même ensemble. C. Q. F. D.

12. La construction d'ensemble uniformisateur. Maintenant, nous allons définir les complémentaires analytiques latéralement fermés T_k ($k = 1, 2, \dots$) comme il suit. Étant donné un complémentaire E effectivement analytique dans $R(x, y)$, nous définirons effectivement un crible C_1 complètement régulier de classe 1 qui définit E . En se servant de ce crible C_1 , nous définirons un complémentaire analytique latéralement fermé et nous désignerons par T_1 ce ensemble. Or, comme T_1 est d'après les lemmes 4 et 8 un complémentaire effectivement analytique, on peut définir effectivement un crible C_2 complètement régulier de classe 2 qui définit T_1 . En utilisant le crible C_2 ainsi obtenu, nous définirons un complémentaire analytique latéralement fermé et nous désignerons par T_2 cet ensemble. D'une manière générale, T_k ($k = 1, 2, \dots, n$) étant effectivement définis, prenons effectivement un crible C_{n+1} complètement régulier de classe $n+1$ qui définit T_n . Désignons par T_{n+1} le complémentaire analytique latéralement fermé donné par le crible C_{n+1} . Maintenant, posons

$$U = \prod_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Selon la définition de T_n , l'ensemble U est contenu dans E . Prenons un point $\bar{x}$ sur l'axe OX tel qu'on ait $E^{(\bar{x})} \neq 0$, l'ensemble $T_n^{(\bar{x})}$ est alors fermé non vide dans l'ensemble $R(y)$ et est contenu dans l'ensemble des points d'index minimum par rapport à C_n , et par suite dans un intervalle de BAIRE d'ordre n . Désignons par I_n cet intervalle de BAIRE. Or, comme nous avons $T_n^{(\bar{x})} \supset T_{n+1}^{(\bar{x})}$ ($n = 1, 2, \dots$), nous avons $I_n \supset I_{n+1}$ et par suite le produit $\prod_{k=1}^{\infty} I_k$ est précisément un point. Désignons par $(\bar{x}, \bar{y})$ ce point ainsi obtenu. Comme l'ensemble $T_n^{(\bar{x})}$ n'est pas vide, $T_1^{(\bar{x})}$ contient au moins un point de l'intervalle I_n . Or, $T_1^{(\bar{x})}$ est fermé dans $R(y)$,

et donc $(\bar{x}, \bar{y})$ appartient à l'ensemble $T_1^{(\bar{x})}$. De même, on peut démontrer qu'on a $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_n^{(\bar{x})}$ ($n = 2, 3, \dots$), ce qui entraîne $(\bar{x}, \bar{y}) \in \prod_{k=1}^{\infty} T_n^{(\bar{x})} = U^{(\bar{x})}$. Or, comme nous avons $T_n^{(\bar{x})} \subset I_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $U^{(\bar{x})}$ est précisément un point. Il en résulte que U est un ensemble uniformisateur de E . Or, puisque T_n ($n = 1, 2, \dots$) sont des complémentaires effectivement analytiques, l'ensemble uniformisateur U est aussi un complémentaire effectivement analytique.

Remarque. Le théorème de l'uniformisation est celui qui concerne des complémentaires analytiques plans. De même, comme nous avons fait précédemment, on peut établir un théorème sur l'uniformisation des complémentaires analytiques contenus dans un espace à quelques dimensions.

IV. Quelques applications du théorème de l'uniformisation sur des ensembles projectifs de la seconde classe.

13. La projection uniforme des complémentaires analytiques. Soit E un ensemble projectif de la seconde classe contenu dans un espace $X_1OX_2X_3\dots X_n$ à n dimensions. On peut alors choisir dans l'espace $X_1OX_2\dots X_nT$ un complémentaire analytique C dont la projection sur le plan $t = 0$ est l'ensemble E . Or, on peut uniformiser, d'après le théorème de l'uniformisation, C par un complémentaire analytique U , et l'ensemble E est donc la projection uniforme du complémentaire analytique U . Nous avons donc le

Théorème 1. *Tout ensemble projectif de la seconde classe peut être donné comme la projection uniforme d'un complémentaire analytique.*

Ce théorème contient un théorème de M. S. MAZURKIEWICZ⁽¹⁵⁾ comme le cas spécial, et selon ce théorème, on voit sans peine que la classe de tous les ensembles donnés comme la projection uniforme des complémentaires analytiques coïncide avec celle des ensembles projectifs de la seconde classe.

M. P. NOVIKOFF a démontré dans sa note⁽¹⁶⁾ quelques théorèmes sur la séparation des ensembles projectifs de la classe (A'_2) . Grâce à ce théorème, on peut donc démontrer les théorèmes suivants⁽¹⁷⁾ concernant les séparations des ensembles projectifs de la seconde classe.

⁽¹⁵⁾ S. MAZURKIEWICZ; Sur une propriété des ensembles $C(A)$, Fund. Math., **10** (1917), 172-174.

⁽¹⁶⁾ P. NOVIKOFF, loc. cit., (6), 3-16.

⁽¹⁷⁾ P. NOVIKOFF, Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe, Fund. Math., **25** (1935), 459-466.

Théorème A. *Deux ensembles complémentaires aux ensembles de projectifs de la seconde classe sans points communs sont séparables au moyen des ensembles projectifs de la classe (B_2) .*

Théorème B. *Si l'on supprime de deux ensembles projectifs de la seconde classe leur partie commune, les restantes sont séparables, simultanément au moyen des ensembles projectifs de la seconde classe.*

14. Une proposition de M. N. LUSIN. *E étant un ensemble linéaire projectif de la seconde classe. On peut alors choisir dans le plan XOY un complémentaire analytique C tel que la projection uniforme de C sur l'axe OX soit E . Or, d'après un théorème de M. N. LUSIN,⁽¹⁸⁾ on peut décomposer C en une classe de puissance $\aleph_1$ d'ensembles mesurables (B) disjoints, et les projections de ces ensembles mesurables (B) ainsi obtenus sur l'axe OX sont aussi mesurables (B) . Nous avons donc le*

Théorème 2. *Tout ensemble projectif de la seconde classe est la somme d'une infinité transfinie d'ensembles mesurables (B) numérotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe.*

Et on voit sans peine que si un ensemble projectif de la seconde classe est donné effectivement, la décomposition en ensembles mesurables (B) est donnée aussi effectivement.

En outre part, M. N. LUSIN a énoncé dans sa note⁽¹⁹⁾ une proposition suivante.

“La somme d'une infinité transfinie d'ensembles mesurables (B) numérotés au moyen des nombres transfinis de seconde classe est un ensemble projectif de classe 2. D'ailleurs, si ce numérotage est effectif, la somme est un ensemble projectif de type B_2 ”.

Il me paraît qu'il y a quelque contradiction entre la proposition de M. N. LUSIN et le théorème 2.

15. L'image continue uniforme d'un complémentaire analytique. Grâce au théorème 1, on voit que tout ensemble projectif de la seconde classe peut être donné comme une image continue uniforme d'un complémentaire analytique. Or, concernant ce résultat, on peut établir un théorème suivant.

Théorème 3. *Une image continue uniforme E d'un complémentaire analytique C est aussi un complémentaire analytique, si deux complémentaires analytiques C_1 et C_2 contenus dans C sont transformés toujours en deux ensembles séparés au moyen des complémentaires analytiques.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème, il suffit de considérer le cas où les deux ensembles C et E sont linéaires en même temps. Or,

⁽¹⁸⁾ N. LUSIN, loc. cit., (13), 188.

⁽¹⁹⁾ N. LUSIN, Sur les ensembles analytiques nuls, Fund. Math., **25** (1935), 109-131.

comme on peut choisir dans $R(y)$ un complémentaire analytique tel que C est une image continue uniforme de cet ensemble, on peut supposer sans perdre la généralité, que C est un sous-ensemble de $R(y)$. Soit $g(t)$ la transformation continue uniforme qui transforme C en E . D'après le théorème de M. M. LAVRENTIÉFF⁽²⁰⁾, on peut prolonger la transformation $g(t)$ sur un ensemble $G\delta D$ de manière que $g(t)$ soit continue sur D et qu'on ait $C \subset D \subset R(y)$. Or, d'après le théorème de M. S. MAZURKIEWICZ, l'ensemble D est homéomorphe à un sous-ensemble fermé N relativement à $R(y)$. On peut dire donc de plus, sans perdre la généralité, que le complémentaire analytique C soit contenu dans N , et que $g(t)$ soit défini sur N . Or, N est fermé relativement à $R(y)$, on peut prolonger $g(t)$ sur $R(y)$, de façon que $g(t)$ est continue sur $R(x)$. Considérons maintenant dans le plan XOY l'ensemble K de tous les points $(g(t), t)$, où t désigne un point de C . K est alors un complémentaire analytique et la projection sur l'axe OX de cet ensemble est E . Étant donné un intervalle $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ de BAIRE sur $R(y)$, posons maintenant

$$H_{n_1 n_2 \dots n_k} = g((n_1 n_2 \dots n_k)C).$$

Soient $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ deux intervalles distincts de BAIRE d'ordre k . Comme les deux ensembles $(n_1, n_2, \dots, n_k)C$ et $(m_1, m_2, \dots, m_k)C$ sont les complémentaires analytiques disjoints et séparables au moyen des complémentaires analytiques, les deux ensembles $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et $H_{m_1 m_2 \dots m_k}$ sont aussi séparables au moyen des complémentaires analytiques. On peut définir donc les complémentaires analytiques $J_{n_1 n_2 \dots n_k}$ tels qu'on ait

$$(1) \quad H_{n_1 n_2 \dots n_k} \subset J_{n_1 n_2 \dots n_k},$$

(2) pour deux intervalles distincts $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ de BAIRE d'ordre k , nous avons $J_{n_1 n_2 \dots n_k} J_{m_1 m_2 \dots m_k} = 0$,

Ici, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait

$$(3) \quad J_{n_1 n_2 \dots n_k} \subset \overline{H_{n_1 n_2 \dots n_k}}, \text{ où } \overline{H_{n_1 n_2 \dots n_k}} \text{ désigne la fermeture de } H_{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

$$(4) \quad J_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset J_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}} \quad (k, n_k = 1, 2, \dots).$$

En effet, il suffit de considérer au lieu de $J_{n_1 n_2 \dots n_k}$ les ensembles $\overline{H_{n_1 n_2 \dots n_k}} \cap J_{n_1 n_2 \dots n_i}$. Or, puisque la transformation $g(t)$ est continue sur $R(y)$, nous avons d'après la définition de $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$ et la relation (3)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(H_{n_1 n_2 \dots n_k}) = 0,$$

où $\delta(H_{n_1 n_2 \dots n_k})$ désigne le diamètre de $H_{n_1 n_2 \dots n_k}$. Posons maintenant

(20) Voir, p. ex., C. KURATOWSKI, Topologie, I, (1933), Warszawa, p. 210.

$$J = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} J_{n_1 n_2 \dots n_k} ,$$

et

$$J_{n_1 n_2 \dots n_k}^* = J J_{n_1 n_2 \dots n_k} .$$

Les ensembles J et $J_{n_1 n_2 \dots n_k}^*$ sont alors les complémentaires analytiques. Or, pour un nombre fixe k , $J_{n_1 n_2 \dots n_k}^*$ sont disjoints deux-à-deux, et $J = \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} J_{n_1 n_2 \dots n_k}^*$. Par suite, l'ensemble $J_{n_1 n_2 \dots n_k}^*$ est analytique relativement à l'ensemble J , d'où on peut choisir un ensemble analytique $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ tel qu'on ait

$$J_{n_1 n_2 \dots n_k}^* = J M_{n_1 n_2 \dots n_k} .$$

Maintenant, posons

$$Q = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} J_{n_1 n_2 \dots n_k}^* \times (n_1, n_2, \dots, n_k) ,$$

et

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \dots n_k} M_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (n_1, n_2, \dots, n_k) .$$

Nous avons alors $Q = \{J \times R(y)\}M$. Or, on peut voir les propositions suivantes.

1°, La projection sur l'axe OX de l'ensemble Q est l'ensemble J .

2°, Quelque soit le point x_0 de J , l'ensemble $Q^{(x_0)}$ ne contient que un point.

En effet, supposons par impossible que $Q^{(x_0)}$ contient les deux points distincts (x_0, y) et (x_0, z) . On peut alors choisir les deux intervalles distincts $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ de BAIRE d'ordre k tels qu'on ait $y \in (n_1, n_2, \dots, n_k)$ et $z \in (m_1, m_2, \dots, m_k)$. Nous avons alors, d'après la définition de (x_0, y) et (x_0, z) , $x_0 \in J_{n_1 n_2 \dots n_k}^*$ et $x_0 \in J_{m_1 m_2 \dots m_k}^*$, ce qui entraîne une contradiction.

3°, $K < Q$.

En effet, prenons un point (x_0, y_0) de K , où $y_0 = (n_1, n_2, \dots)$. Nous avons alors $x_0 \in H_{n_1 n_2 \dots n_k} < J_{n_1 n_2 \dots n_k}$, d'où $(x_0, y_0) \in J_{n_1 n_2 \dots n_k}^* \times (n_1, n_2, \dots, n_k)$ et par suite $(x_0, y_0) \in Q$.

D'ailleurs, comme $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ($k, n_k = 1, 2, \dots$) sont les ensembles analytiques, l'ensemble M , et par suite $M-K$, est analytique. Donc la projection sur l'axe OX de l'ensemble $M-K$ est aussi analytique et

$$\text{Proj}_{OX}(Q-K) = J \text{Proj}_{OX}(M-K) ,$$

d'où la projection de $Q-K$ sur l'axe OX est analytique relativement à J . Or, d'après les propositions 2° et 3°, nous avons $\text{Proj}_{OX} K \times \text{Proj}_{OX} (Q-K) = 0$ et $J = \text{Proj}_{OX} K + \text{Proj}_{OX} (Q-K)$, c'est-à-dire,

$$E = \text{Proj}_{OX} K = J - \text{Proj}_{OX} (Q-K),$$

d'où l'ensemble E est un complémentaire analytique. C. Q. F. D.

De même, comme nous avons fait précédemment, on peut démontrer le théorème suivant sur la projection uniforme d'un ensemble projectif de la classe (B_2) .

Théorème 4. *Pour qu'une image continue uniforme d'un ensemble E projectif de la classe (B_2) est aussi de la classe (B_2) , il faut et il suffit que deux ensembles projectifs de la classe (B_2) contenus dans E soient transformés en deux ensembles aussi séparés au moyen des ensembles projectifs de la classe (B_2) .*

16. L'image continue uniforme de l'ensemble de M. H. LEBESGUE. Étant donné dans le plan XOY le crible binaire Γ de M. H. LEBESGUE,⁽²¹⁾ désignons par L l'ensemble de tous les points irrationnels binairement x de l'intervalle $[0, 1]$ tels que $\Gamma^{(x)}$ soit bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OY , et nous appelons L l'ensemble de M. H. LEBESGUE. J'ai démontré récemment que tout ensemble E linéaire non dénombrable analytique peut être représenté comme une image continue uniforme de l'ensemble L de M. H. LEBESGUE, quand on néglige une infinité dénombrable de point de E ⁽²²⁾. Or, il serait très intéressant de savoir la classe de tous les ensembles donnés comme des images continues uniformes de L . On peut résoudre ce problème comme il suit. Tout d'abord nous donnerons quelque définition. Nous dirons que un ensemble E contient partout des ensembles parfaits lorsque qu'il existe un sous-ensemble parfait de E dans tous les voisinages de chaque point de E . Nous avons alors le

Théorème 5. *Tout ensemble E linéaire non dénombrable projectif de la seconde classe qui contient partout des sous-ensembles parfaits peut être représenté comme une image continue uniforme de l'ensemble L de M. H. LEBESGUE, quand, on néglige une infinité dénombrable de points de E . Et, toute image continue uniforme de l'ensemble L est projectif de la seconde classe et contient partout des sous-ensembles parfaits.*

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire non dénombrable projectif de la seconde classe qui contient partout des sous-ensembles parfaits.

(21) N. LUSIN, loc. cit., (13), 199.

(22) M. KONDÔ, Sur la représentation paramétrique régulière des ensembles analytiques, Fund. Math., **31** (1938), 29-46, désignons par R. P. cette note dans la suite.

Comme E contient partout des sous-ensembles parfaits, de même que nous avons fait dans la démonstration de lemme 5 de R. P., on peut définir une suite dénombrable $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) des ensembles F_σ disjoints deux-à-deux et condensés dans E . Posons maintenant

$$E^* = E - \sum_{n=1}^{\infty} E_n .$$

Puis que l'ensemble E^* est aussi projectif de la seconde classe, on peut définir d'après le théorème 1 un complémentaire analytique W_0 dans le plan XOY tel que la projection uniforme de W_0 sur l'axe OX soit précisément l'ensemble E .

En désignant par $\{r_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) les nombres rationnels, posons

$$W = W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \times (r_n) .$$

L'ensemble W est un complémentaire analytique et nous avons

$$\text{Proj}_{OX} W = \text{Proj}_{OX} W_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n = E^* + \sum_{n=1}^{\infty} E_n = E ,$$

et de plus cette projection est uniforme. Or, on voit que W contient partout des sous-ensembles parfaits. En effet, soient $p_0 = (x_0, y_0)$ un point de W et ϵ un nombre positif. Il existe alors un nombre rationnel r_{n_0} tel qu'on ait $|y_0 - r_{n_0}| < \frac{1}{2}\epsilon$. Le point x_0 est contenu dans E et par suite, x_0 est un point condensation de E , d'où il existe un sous-ensemble parfait P de E_{n_0} tel qu'on ait $\text{dis}(x_0, p) < \frac{1}{2}\epsilon$ pour tout point p de P . Or, W contient l'ensemble $E_{n_0} \times (r_{n_0})$ et par suite $P \times (r_{n_0})$; et pour tout point (p, r_{n_0}) de $P \times (r_{n_0})$, nous avons

$$\text{dis}((x_0, y_0), (p, r_{n_0})) \leq \text{dis}(x_0, p) + \text{dis}(y_0, r_{n_0}) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon ,$$

c'est-à-dire, il existe dans un voisinage $U(p_0; \epsilon)$ de p_0 du diamètre ϵ un sous-ensemble parfait de W . Il en résulte que l'ensemble E est donné comme une image continue uniforme d'un complémentaire analytique W quand on néglige une infinité dénombrable de points de E et que W contient partout des sous-ensembles parfaits. Or, d'après la démonstration du théorème de R. P., l'ensemble W et par suite E , est une image continue uniforme de l'ensemble de M. H. LEBESGUE, quand on néglige une infinité dénombrable de points de W et E .

Puis, nous avons démontré qu'une image continue uniforme de l'ensemble L de M. H. LEBESGUE est un ensemble projectif de la seconde classe qui contient partout des sous-ensembles parfaits. Or, l'ensemble L contient

partout des sous-ensemble parfaits. En effet, supposons que le crible binaire Γ de M. H. LEBESGUE qui définit L soit défini en dépendant d'une suite $\{r_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) de nombres rationnels. Prenons les nombres rationnels r_{n_k} ($k = 1, 2, \dots$) tels que l'ensemble de nombres rationnels r_{n_k} ($k = 1, 2, \dots$) soit bien ordonné suivant la grandeur des nombres rationnels. Considérons tou point binairement irrationnel

$$t = 2^{-m_1} + 2^{-m_2} + \dots + 2^{-m_k} + \dots \quad (m_1 < m_2 < \dots),$$

tel que l'ensemble M de nombres naturels m_k ($k = 1, 2, \dots$) soit contenu dans l'ensemble de nombres naturels n_k ($k = 1, 2, \dots$). L'ensemble H de ces points ainsi obtenus est mesurable (B) et indénombrable, et donc H contient un sous-ensemble parfait. Or, comme H est un sous-ensemble de L , l'ensemble L contient un sous-ensemble parfait. Or, d'après le lemme 1 de R. P., L est homogène, c'est-à-dire, quel que soit l'intervalle ouvert I , II est homéomorphe à L . Par suite, L contient partout des sous-ensembles parfaits. Il en résulte que une image continue uniforme de l'ensemble de LEBESGUE contient partout des sous-ensembles parfaits, et de plus, puisque L est un complémentaire analytique, une image continue uniforme de L est d'après le théorème 1 un ensemble projectif de la seconde classe.

C. Q. F. D.

17. L'uniformisation des ensembles projectifs de la seconde classe.
 E étant un ensemble projectif de la seconde classe contenu dans la plan XOY . On peut alors choisir dans l'espace $XOYZ$ un complémentaire analytique C tel que la projection de C sur le plan XOY soit précisément E . Étant donnée une transformation $y' = \sigma(y, z)$ qui établit une homéomorphe généralisée (0, 2) au sens de M. C. KURATOWSKI entre la plan YOZ et l'axe OY , considérons une transformation $\varphi(p): x' = x, y' = \sigma(y, z)$ qui transforme l'espace $XOYZ$ en la plan XOY . D'après la définition de la transformation $\varphi(p)$, $\varphi(C)$ est aussi un complémentaire analytique dans le plan XOY . On peut donc d'après le théorème de l'uniformisation trouver un complémentaire analytique U qui est un uniformisateur de $\varphi(C)$. Or, comme nous avons $(\varphi(C))^{(x)} = \varphi(C^{(x)})$ pour tout point de l'axe OX , l'ensemble $U^{(x)}$ et par suite $(\varphi^{-1}(U))^{(x)}$ contient un point au plus pour tout point x l'axe OX , et de plus $(\varphi^{-1}(U))^{(x)}$ est vide ou non suivant que $C^{(x)}$ est vide ou non. Par conséquent, la projection de $\varphi^{-1}(U)$ sur le plan XOY est un uniformisateur de E . Or, $\varphi^{-1}(U)$ est d'après la définition de $\varphi(p)$ un complémentaire analytique, et donc la projection de $\varphi^{-1}(U)$ sur le plan XOY est projectif de la seconde classe. Nous avons donc le

Théorème 6. *Tout ensemble plan projectif de la seconde classe peut être uniformisé au moyen des ensembles de la même classe.*

Puis, nous allons considérer l'uniformisation des ensembles projectif de la classe (B_2) . E étant un ensemble plan projectif de la classe (B_2) ; comme nous avons fait plus haut, on peut choisir dans l'espace $XOYZ$ un complémentaire analytique C tel que la projection uniforme de C sur le plan XOY soit E , et un complémentaire analytique U contenu dans C tel que pour tout point x de la projection de E sur l'axe OX $U^{(x)}$ soit précisément un point. Il est alors évident que la projection de U sur le plan XOY est une uniformisation de E . Nous avons, d'après la définition de C , $\text{Proj}_{XOY}(C-U) + \text{Proj}_{XOY} U = E$ et $\text{Proj}_{XOY}(C-U) \times \text{Proj}_{XOY} U = 0$, d'où les deux ensembles $\text{Proj}_{XOY}(C-U)$ et $\text{Proj}_{XOY} U$ sont projectifs de la seconde classe. Or, comme E est projectif de la classe (B_2) , $\text{Proj}_{XOY} U$ est aussi projectif de la classe (B_2) . Par conséquent nous avons le

Théorème 7. *Tout ensemble projectif de la classe (B_2) peut être uniformisé au moyen des ensembles de la même classe.*

Remarque. M. A. LIAPOUNOFF a démontré récemment le théorème suivant dans sa note " Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques " (Recueil Mathématique, N. S., t. 3 (1938), p. 219-223).

Tout complémentaire analytique plan peut être uniformisé au moyen d'un ensemble CA_2 .

Or, ce résultat est contenu dans le théorème de l'uniformisation comme le cas particulier.