12. Einige Sätze über Abbildungen auf die Sphäre.

Von Atuo KOMATU und Ryoji SAKATA.

(Eingegangen am 25. September, 1939.)

In einer früheren Arbeit⁽¹⁾ haben wir den folgenden Satz festgestellt:

Für einen n -dimensionalen Komplex K^n ist die Abbildung f von $\bar{K}^n$ auf die Sphäre S^r dann und nur dann wesentlich, wenn es in K^n einen s -dimensionalen Zyklus z^s ($\neq 0$ in bezug auf J^s) gibt, der durch f auf S^r wesentlich abgebildet wird. ($n \geq s \geq r$)

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des entsprechenden Satzes für endlich-dimensionale Kompakta. Wir werden nämlich beweisen:

Satz 1. Die Abbildung f des endlich-dimensionalen Kompaktum F in die Sphäre (beliebiger Dimension) ist dann und nur dann wesentlich, wenn es in F einen konvergenten Zyklus $Z \neq 0$ gibt, der durch f auf S^r wesentlich abgebildet wird.

§1. *Beweis des Satzes 1.* Es genügt offenbar nur zu zeigen, dass die Bedingung des Satzes notwendig ist. F sei eine wesentliche Abbildung des n -dimensionalen Kompaktums F auf die r -dimensionale Sphäre S^r .

Wir dürfen uns den n -dimensionalen F in eine Folge von n -dimensionalen Polyedern

$$N_1 \leftarrow N_2 \leftarrow \dots, \leftarrow N_k \leftarrow \dots; \quad N_k = \pi_k^l(N_l) \quad (1)$$

entwickelt denken, wobei für jedes k die Eckpunkte von N_k zu F gehören.

Man betrachte zunächst eine Folge der Abbildungen π_k von F in N_k und der zu f gehörigen wesentlichen Abbildungen f_k von N_k auf S^r . Indem wir in (1) evtl. endlich viele N_i weglassen, können wir $f_k \pi_k$ von F in S^r bzw. $f_k \pi_k^l$ von N_l in S^r zu f bzw. zu f_l homotop annehmen. Dann wird N_k durch f_k wesentlich auf S^r abgebildet.

Auf Grund des oben zitierten Satzes gibt es in jedem N_k einen algebraischen Zyklus z_k , der durch f_k , also durch f , wesentlich abgebildet wird. Somit entsteht eine Folge der Zyklen

---

(1) A. Komatu und R. Sakata, Über ein Problem von Herrn Borsuk, Jap. Journal of Math. vol. 16 (1939), 57-62.

$$z_1^{s_1}, z_2^{s_2}, \dots, z_k^{s_k}, \dots, \quad (2)$$

wobei jede Dimensionszahl $s_k \leq n$ ist. Daraus folgt, dass es ein festes s gibt derart, dass für unendlich viele $z_k^{s_k}$ $s_k = s$ gelten. Wir behalten in (2) nur die Zyklen, die s als Dimensionszahl besitzen, und betrachten die so gewonnene Teilfolge

$$z_1, z_2, \dots, z_k, \dots \quad (3)$$

an Stelle der Folge (2).

Sodann wählen wir die Teilfolge

$$z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_k^{(1)}, \dots$$

der Folge (3) derart, dass die Projektionen von $z_k^{(1)}$ in N_1 , die kurz mit $\pi_1 z_k^{(1)}$ bezeichnet werden, gegen den algebraischen Komplex $\bar{z}_1$ von N_1 konvergieren. Ferner kann man die Teilfolge

$$z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_k^{(n)}, \dots$$

der Folge

$$z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}, \dots, z_k^{(n-1)}, \dots$$

so wählen, dass die Projektionen $\pi_n z_k^{(n)}$ gegen den algebraischen Komplex $\bar{z}_n$ von N_n konvergieren. Wie leicht ersichtlich, ist dann

$$Z = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_k, \dots)$$

ein projektiver Zyklus; d.h. $\bar{z}_k = \pi_k^{k+1} \bar{z}_{k+1}$.

Nun überzeugt man sich leicht, dass der so gewonnene Zyklus Z durch f wesentlich abgebildet wird. In der Tat: da $f_1 \pi_1$ für jedes k zu f_k homotop ist, wird $z_k^{(1)}$ durch $f_1 \pi_1$ wesentlich abgebildet; m.a.W.: $\pi_1 z_k^{(1)}$ wird durch f_1 , also durch f , wesentlich abgebildet. Folglich gilt dasselbe auch von $\bar{z}_1$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

§2. Für das Weitere benutzen wir dieselben Bezeichnungen wie in der unter ⁽¹⁾ zitierten Arbeit. In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, dass man die Resultate von Herrn S. Eilenberg mit unserer Beweismethode einfach und direkt beweisen kann ⁽²⁾. Dazu muss man den folgenden Satz neu beweisen:

---

(2) S. Eilenberg, Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques, Comp. Math. 6 (1939), 428-433. Siehe auch unter ⁽¹⁾ zitierte Arbeit.

Satz 2.⁽³⁾ (Satz von Eilenberg-Freudental) Es sei: K^n ein n -dimensionaler Zellenkomplex; L ein solcher Teilkomplex von K^n , dass für jedes $s (\geq q+1)$

$$B^{s+1}(K^n) \bmod L = 0 \quad \text{in bezug auf } J^s$$

gilt; f eine stetige Abbildung von L in S^p . Ist dann f auf $K^{q+1} + L$ zu einer Abbildung F fortsetzbar, so lässt sich f auf K^n erweitern.

Beweis. Fasst man $K^n - L$ als einen Zellenraum auf, so sieht man sofort ein, dass $B^s(K^n) \bmod L \subseteq B^s(K^n - L)$ wird. Daraus folgt nach unserer Voraussetzung:

$$B^{s+1}(K^n - L) = 0 \quad \text{in bezug auf } J^s \quad (s \geq q+1).$$

Wir ordnen nach Freudenthal⁽⁴⁾ jedem Simplex T^{q+2} von K^n bzw. $K^n - L$ ein bestimmtes Element (*Hypergrad*) zu, mit dem die Randsphäre T^{q+2} mittels F in S^p abgebildet wird. Dadurch entsteht ein $(q+2)$ -dimensionaler oberer Komplex f^{q+2} bzw. $\tilde{f}^{q+2}$, was das $(q+2)$ -dimensionale Hindernis von F auf K^n bzw. $K^n - L$ heisst. Das Hindernis f^{q+2} ist ein oberer Zyklus. Weiter wird gezeigt: $\tilde{f}^{q+2}$ ist ebenfalls ein oberer Zyklus des Zellenraumes $K^n - L$.

In der Tat: Aus $g_0 f^{q+2} = 0$ folgt

$$g_0 f^{q+2}(T^{q+3}) = \sum_{T^{q+3} \rightarrow T_j^{q+2}} f^{q+2}(T_j^{q+2}) = 0 \quad (4)$$

für jedes T^{q+3} aus K^n . Im Fall eines Simplexes T_j^{q+2} aus L verschwindet offenbar $f^{q+2}(T_j^{q+2})$. Mithin gilt aus (4)

$$g_0 f^{q+2}(T^{q+3}) = \sum_{T^{q+3} \rightarrow T_j^{q+2}} f^{q+2}(T_j^{q+2}) = 0$$

in $K^n - L$; die Summe hierin erstreckt sich über diejenigen $(q+2)$ -dimensionalen Simplexe aus $K^n - L$, welche zu T^{q+3} inzident sind.

Vermöge $f^{q+2} \sim 0$ (in $K^n - L$) gibt es einen $(q+1)$ -dimensionalen Komplex f^{q+1} mit $g_0 f^{q+1} = f^{q+2}$, also ist für jedes T^{q+2} aus $K^n - L$

$$g_0 f^{q+1}(T^{q+2}) = \sum_{T^{q+2} \rightarrow T_j^{q+1}} f^{q+1}(T_j^{q+1}) \quad \text{in } K^n - L. \quad (5)$$

Wir wählen nun in jedem T_j^{q+1} von $K^n - L$ ein homothetisches Simplex t_j^{q+1} und bezeichnen mit o den gemeinsamen Schwerpunkt von T_j^{q+1} und

⁽³⁾ S. Eilenberg, a. a. O.; théorème 5. Diese Tatsache ist auch von Herrn H. Freudenthal ohne Beweisskizze angekündigt worden. vgl. H. Freudenthal, Neue Erweiterungs- und Überführungssätze, Proc. Amsterdam. **42** (1938), 139-140.

⁽⁴⁾ H. Freudenthal, a. a. O.

t_j^{q+1} . Für jeden Punkt p von $\dot{T}_j^{q+1}$ versteht man unter q den Schnittpunkt des Strahles $\overrightarrow{op}$ mit t_j^{q+1} ; φ_j sei eine solche Abbildung, die die Strecke $\overline{qp}$ proportional auf die Strecke $\overline{op}$ abbildet.

Sodann definiert man eine Abbildung F^* von K^{q+1} auf S^p folgendermassen: F^* bildet jedes t_j^{q+1} mit dem Hypergrad $-f^{q+1}(t_j^{q+1})$ derart auf S^p ab, dass $F^*(t_j^{q+1}) = f(o)$ in S^p ist. Was den übrigen Teil $T_j^{q+1} - t_j^{q+1}$ betrifft, so setzen wir $F^* = f\varphi_j$. Wie leicht ersichtlich, ist F^* stetig und stimmt auf L mit f überein. Aus (5) sieht man ein, dass das $(q+2)$ -dimensionale Hindernis von F^* auf K^n verschwindet. Daher lässt sich F^* zu einer Abbildung von $K^{q+2} + L$ erweitern.

In dieser Art schrittweise von $s = q+1$ aus weitergehend, findet man schliesslich die gesuchte Abbildung von K^n auf S^p , w.z.b.w.

Die damit bewiesene Tatsache führt uns weiter zu einer Verallgemeinerung der Sätze von Herren Pontrjagin⁽⁵⁾ und Eilenberg⁽⁶⁾.

Satz 3. *f und g seien zwei Abbildungen von K^n in die Sphäre S^p , und zwar auf K^p punktwise identisch. Dafür, dass f und g einander homotop sind, ist die Pontrjaginsche Bedingung notwendig und hinreichend, sobald die oberen Bettischen Gruppen $B_0^s(K^n)$ in bezug auf $\pi^s(S^p)$ ($s = p+2, \dots, n$) verschwinden.*

Zum Beweis braucht man bloss zu zeigen, dass der Pontrjaginsche obere Komplex auch in diesem Fall ein oberer Zyklus ist. Der Pontrjaginsche obere Komplex γ^{p+1} wird dabei wie folgt definiert: T^{p+1} sei ein $(p+1)$ -dimensionales Simplex von K^n . Zwei Exemplare T_1^{p+1} und T_2^{p+1} von T^{p+1} , welche an den Randsphären identifiziert sind, bilden eine $(p+1)$ -dimensionale Sphäre S^{p+1} . Da f und g am Rande $\dot{T}_1^{p+1} = \dot{T}_2^{p+1}$ übereinstimmen, so sieht man sofort, dass für jedes T^{p+1} zwei Abbildungen f und g als eine Abbildung von S^{p+1} in S^p aufgefasst werden. Jedem Simplex T^{p+1} von K^n ist somit ein bestimmtes Element von $\pi^{p+1}(S^p)$ zugeordnet; gemäss dieser Zuordnung entsteht ein algebraischer Komplex γ^{p+1} .

Wir bezeichnen mit f^{p+2} bzw. g^{p+2} das $(p+2)$ -dimensionale Hindernis von f bzw. g . Dann gilt

$$g_0 \gamma^{p+1} = f^{p+2} - g^{p+2}. \quad (6)$$

In der Tat: Zwei Abbildungen $f(\dot{T}^{p+2})$ und $g(\dot{T}^{p+2})$, welche am Rande jedes Simplexes T_j^{p+1} (in T^{p+2}) übereinstimmen, dürfen wir als eine Abbildung von S^{p+1} in S^p mit dem Hypergrad $(f^{p+2} + g^{p+2})(T^{p+2})$ auffassen.

(5) vgl. hierzu L. Pontrjagin, Classification des transformations d'un complexe $n+1$ -dimensionnel dans une sphère n -dimensionnelle, C.R., **206** (1938), 1436-1438.

(6) S. Eilenberg, a. a. O.; théorème 2.

Unter Benutzung der einfachen Homotopieeigenschaften folgt ohne weiteres die Formel (6).

Da die Abbildungen f und g auf K^n definiert sind, so haben wir $f^{p+2} = g^{p+2} = 0$; daraus folgt $g_0 \gamma^{p+1} = 0$; mithin ist γ^{p+1} ein oberer Zyklus.

Die Formel (6) zeigt übrigens, dass zwei beliebige Erweiterungen $f(K^{p+1})$ und $g(K^{p+1})$ einer und derselben Abbildung $f(K^p)$ in S^p zwei einander homologe Hindernisse angeben.

Der weitere Verlauf des Beweises stützt sich auf den Satz 2 und ist eine wörtliche Wiedergabe der Ausführung von Eilenberg⁽⁷⁾.

Mathematisches Institut,
Kaiserliche Universität zu Osaka.

---

(7) vgl. S. Eilenberg, a. a. O.; 6, Démonstration du Th. 2, 431–432.