8. Über die Invarianten endlicher Gruppen linearer Substitutionen im Körper der Charakteristik p .

Von Kenjiro SHODA.

(Eingegangen am 22. April, 1940.)

In der vorliegenden Note soll der Endlichkeitssatz für die Invarianten der endlichen Gruppen (ganzer oder) gebrochener linearer Substitutionen im Körper beliebiger Charakteristik bewiesen werden. In der Literatur ist der Satz nur im Fall der Charakteristik Null angegeben.⁽¹⁾ Nach dieser Ausdehnung des Satzes kann man die Brauersche Theorie⁽²⁾ des Kleinschen Formenproblems in den Fall der Charakteristik p übertragen.

1. Den Ausgangspunkt bildet der Endlichkeitssatz für Permutationsgruppen. Es sei k ein beliebiger Körper. Sind $s_1, \dots, s_n$ die elementaren symmetrischen Funktionen der n Variablen $x_1, \dots, x_n$, so ist der aus den rationalen Funktionen von den x mit Koeffizienten aus k bestehende Körper $k(x) = k(x_1, \dots, x_n)$ ein separabler galoisscher Erweiterungskörper von $k(s) = k(s_1, \dots, s_n)$, dessen galoissche Gruppe die symmetrische Gruppe der n Variablen x_i ist. Der Polynombereich $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ ist dann ein endlicher $k[s]$ -Modul, da jedes Polynom von den x_i sich nach der Gleichung

$$x^n - s_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n = 0$$

reduzieren lässt. In $k[s]$ gilt aber bekanntlich der Basissatz, weil die n symmetrischen Funktionen s_i algebraisch unabhängig, also $k[s]$ zu $k[x]$ isomorph ist. Daher kann man den Endlichkeitssatz für Permutationsgruppen folgendermassen formulieren.

Hilfssatz. *Jeder Zwischenring von $k[s]$ und $k[x]$ ist ein endlicher $k[s]$ -Modul.*

2. Wir werden nun den Endlichkeitssatz für endliche Kollineationsgruppen aus dem eben bewiesenen Hilfssatz ableiten. Da wir nur den

(1) Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl. § 57. E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, Math. Ann., **77** (1916), 89-92. R. Brauer, Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen, Math. Ann., **110** (1934), 473-500. Im Fall der Charakteristik p ist der Satz nur für ganze lineare Substitutionsgruppen bewiesen. Vgl. E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher linearer Gruppen der Charakteristik p , Göttinger Nachr., (1926), 28-35.

(2) R. Brauer, a. a. O.

von R. Brauer⁽³⁾ vorgezeigten Weg etwas zu modifizieren brauchen, behalten wir hier auch seine Bezeichnungen bei, die wir der Vollständigkeit halber wieder angeben werden.

Eine Kollineation

$$x_k = \frac{a_{k0} + a_{k1}y_1 + \cdots + a_{kn}y_n}{a_{00} + a_{01}y_1 + \cdots + a_{0n}y_n}$$

bezeichnen wir mit $x = C(y)$. Setzt man

$$(x_k)_C = \frac{a_{k0} + a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n}$$

und für eine rationale Funktion f

$$f_C(x_1, \dots, x_n) = f((x_1)_C, \dots, (x_n)_C),$$

so wird die Invariante durch $f = f_C$ definiert. Es gilt ferner im allgemeinen

$$(fc_1)_{c_2} = f_{c_1c_2}.$$

Es sei nun eine endliche Gruppe der Kollineationen C vorgegeben. Ist $J = \frac{A}{B} \neq 0$ eine Invariante, wo A und B teilerfremde Polynome in den x_i etwa von den Graden a und b , $a \geq b$, sind, so erkennt man leicht

$$A_C = A((x_1)_C, \dots, (x_n)_C) = \frac{h_C A(x_1, \dots, x_n)}{z_C^a},$$

$$B_C = B((x_1)_C, \dots, (x_n)_C) = \frac{h_C B(x_1, \dots, x_n)}{z_C^b},$$

wo z_C der Nenner der Kollineation C ist. Ist die Charakteristik von k gleich p und ist die Ordnung h der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch p^r genau teilbar, $h = p^r q$, $(p, q) = 1$, so kann man $\mathfrak{G}$ nach einer Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von der Ordnung p^r zerlegen:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}P_1 + \mathfrak{S}P_2 + \cdots + \mathfrak{S}P_q.$$

Dann ist

$$J^{p^r} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \prod_{C \in P_i} J_C = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{\prod_{C \in P_i} A((x_1)_C, \dots, (x_n)_C)}{\prod_{C \in P_i} B((x_1)_C, \dots, (x_n)_C)}.$$

(³) R. Brauer, a. a. O. § 2.

Hieraus folgt

$$J^{pr} = \frac{Z}{N}, \quad N = q \prod_{C \in \mathfrak{G}} B((x_1)_C, \dots, (x_n)_C)$$

$$Z = \sum_{i=1}^q \prod_{D \in \mathfrak{G}_{P_i}} A((x_1)_D, \dots, (x_n)_D) \prod_{\substack{C \in \mathfrak{G}_{P_j} \\ i \neq j}} B((x_1)_C, \dots, (x_n)_C)$$

Ist die Charakteristik von k gleich Null, so hat man nur $r = 0$ zu setzen. Dies ist gerade der von R. Brauer betrachtete Fall. Bezeichnet man nun die hn Grössen $(x_i)_C$ in irgendeiner Reihenfolge mit $t_1, \dots, t_{hn}$, so erhält man eine Permutation von den t_i , wenn man (x_i) durch $(x_i)_C$ ersetzt. Dadurch erhält man eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Permutationsgruppe $\mathfrak{G}^*$. N und Z sind, aufgefasst als Polynome in den t_i , Invariante von $\mathfrak{G}^*$. Nach dem Hilfssatz gibt es endlich viele Invarianten $J_1, \dots, J_k$ so, daß jede ganze Invariante für $\mathfrak{G}^*$ auch als Polynom in den J_i darstellen läßt:

$$J^{pr} = \frac{\Phi(J_1, \dots, J_k)}{\Psi(J_1, \dots, J_k)}.$$

Das gilt natürlich auch, wenn man die t_i wieder in ihrer ursprünglichen Bedeutung nimmt. Ist $r = 0$, so gilt daher der Endlichkeitssatz für $\mathfrak{G}$.

Wir nehmen jetzt an, daß der Grundkörper vollkommen ist. Ist die Charakteristik von k gleich p , so sieht man leicht, daß der Invariantenkörper für $\mathfrak{G}$ ein Zwischenkörper von $k(J_1, \dots, J_k)$ und seine endliche Erweiterung $k(\sqrt[p]{J_1}, \dots, \sqrt[p]{J_k})$ ist. Also ist der Invariantenkörper eine endliche Erweiterung von $k(J_1, \dots, J_k)$. Damit ist also gezeigt, daß der Invariantenkörper durch endlich vielen Invarianten erzeugt wird. Man kann ferner ersichtlich annehmen, daß der Invariantenkörper durch Adjunktion der Invarianten J von der Gestalt

$$J^{pr} = \Phi(J_1, \dots, J_k)$$

aus $k(J_1, \dots, J_k)$ entsteht, also, daß der Nenner von J , wie J_i , ein Potenzprodukt von den z_C ist. Zusammenfassend erhält man den Endlichkeitssatz für endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ der Kollineationen in der folgenden Form:

Satz 1. *Jede rationale Invariante für $\mathfrak{G}$ lässt sich als rationale Funktion der endlich vielen Grundinvarianten J_i darstellen. Als den Nenner von J_i kann man ein Potenzprodukt der Nenner der Kollineationen annehmen.*

3. Für eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ganzer linearer Substitutionen kann man analog vorgehen und dadurch erhält man wieder die formel

$$J^{pr} = \phi(J_1, \dots, J_k),$$

wo $J, J_1, \dots, J_k$ jetzt Polynome aus $k[x]$ sind. Ist k vollkommen, so ist J ein Polynom von den $\sqrt[r]{J}$. Also ist der Invariantenbereich für $\mathfrak{G}$ in einem endlichen $k[J_1, \dots, J_k]$ -Modul enthalten. Fasst man $k[J_1, \dots, J_k]$ wieder als Polynombereich T von den t_i auf, so ist T ein endlicher $k[s]$ -Modul, also gilt nach dem Hilfssatz der Basissatz in T . Der daraus durch Spezialisierung von den t_i entstehende Bereich $k[J_1, \dots, J_k]$ ist zu T homomorph, also gilt in $k[J_1, \dots, J_k]$ auch der Basissatz. Daher ist der Invariantenbereich für $\mathfrak{G}$ ein endlicher $k[J_1, \dots, J_k]$ -Modul.

Satz 2. *Jede ganze rationale Invariante für $\mathfrak{G}$ lässt sich als ganze rationale Funktion der endlich vielen Grundinvarianten darstellen.*

4. Die obigen beiden Sätze gelten im allgemeinen auch, wenn der Grundkörper k unvollkommen ist. Das ist eine unmittelbare Folgerung von

Satz 3. *Gilt der Endlichkeitssatz einer ganzen oder gebrochenen Substitutionsgruppe in einem algebraischen Erweiterungskörper von k , so gilt er auch im Grundkörper k .*

Es sei nämlich k' eine algebraische Erweiterung von k . Sind $I_1, \dots, I_m$ die Grundinvarianten für $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus k' , so sind die Koeffizienten von den I_i in einer endlichen Erweiterung von k enthalten. Daher nehmen wir an, daß k' endlich bezüglich k ist. Sind $\omega_1, \dots, \omega_N$ die Körperbasis von k' , so lässt sich I_i eindeutig in der Form

$$I_i = J_i^{(1)}\omega_1 + \dots + J_i^{(N)}\omega_N$$

darstellen, wo die $J_i^{(1)}$ in $k[x]$ liegen. Dann sind die $J_i^{(g)}$ auch Invarianten für $\mathfrak{G}$ und der Invariantenbereich (Invariantenkörper) wird durch den $J_i^{(g)}$ erzeugt. Ist $\mathfrak{G}$ eine Kollineationsgruppe und ist der Nenner von I ein Potenzprodukt der Nenner der Kollineationen, so gilt dasselbe auch für den Nenner von J . Daher kann man die in Satz 1 bzw. 2 angegebenen Grundinvarianten stets in $k[x]$ annehmen. Ist F eine Invariante aus $k(x)$, so lässt sich F in der Form

$$F = F_1\omega_1 + \dots + F_N\omega_N$$

darstellen, wo die F_i Funktionen von den Grundinvarianten J_i sind. Wenn man nun $\omega_1 = 1$ annimmt, wie immer möglich ist, so ergibt sich hieraus $F = F_1$, also ist F eine Funktion von den J_i mit Koeffizienten aus k . Damit ist der Satz bewiesen.

5. Wir werden nun die Invarianten einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer Substitutionen als eine Anwendung der Darstellungstheorie untersuchen. Wir beweisen zunächst⁽⁴⁾

(4) Diesen Satz verdanke ich T. Nakayama. Zum Beweis benützt er gewisse Struktursätze über Algebren.

Satz 4. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra, $M(a)$ eine Darstellung von $\mathfrak{A}$ durch Matrizen, $L(a)$ eine linke reguläre Darstellung von $\mathfrak{A}$. Für hinreichend grosses m enthält die Darstellung

$$mL(a) = \begin{pmatrix} L(a) & & & \\ & L(a) & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(a) \end{pmatrix}$$

die Darstellung $M(a)$ als (nicht notwendig direkten) Bestandteil :

$$mL(a) \supseteq \begin{pmatrix} M(a) & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Ist m der linke Darstellungsmodul für $M(a)$, so kann man ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{A}m = m$ ist. Ist der Rank von $\mathfrak{A}$ bzw. m gleich h bzw. m , so nehmen wir hm linear unabhängige Elemente $u_{\kappa}^{(\lambda)}$, $\kappa = 1, \dots, h$, $\lambda = 1, \dots, m$, an so, daß die h Elemente $u_1^{(\lambda)}, \dots, u_h^{(\lambda)}$ einen zu $\mathfrak{A}$ operatorisomorphen Darstellungsmodul bilden. Dann vermittelt der aus den sämtlichen $u_{\kappa}^{(\lambda)}$ gebildete Darstellungsmodul u die Darstellung $mL(a)$. Ist a_{κ} das $u_{\kappa}^{(\lambda)}$ zugeordnete Element aus $\mathfrak{A}$, so erhält man eine homomorphe Abbildung von u auf $\mathfrak{A}m = m$, wenn man $u_{\kappa}^{(\lambda)}$ auf $a_{\kappa} \varepsilon_{\lambda}$ abbildet. Dabei bedeutet das System $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ein Basis von m . Das besagt in der Darstellungstheorie nichts anderes als den Satz 4.

Wir betrachten nun ganze Invarianten einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ganzer linearer Substitutionen

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)A$$

mit Matrizen A des Grades n . Es sei $\mathfrak{G}$ reduzibel :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &= (X_1, \dots, X_n)P \\ (X_1, \dots, X_n) &= (Y_1, \dots, Y_n) \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wo der Grad von A_1 bzw. A_2 gleich n_1 bzw. n_2 ist. Ist J eine Invariante für $\mathfrak{G}$, so erhält man eine Invariante J_1 für die aus den Substitutionen

$$(X_1, \dots, X_{n_1}) = (Y_1, \dots, Y_{n_1})A_1$$

bestehende Gruppe $\mathfrak{G}_1$, wenn man in J alle $Y = 0$ für $i > n_1$ setzt. Es ist nämlich

$$J \equiv J_1 \pmod{Y_{n_1+1}, \dots, Y_n}.$$

Das Ideal $(Y_{n_1+1}, \dots, Y_n)$ in $k[Y_1, \dots, Y_n]$ wird durch die Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ in sich übergeführt. Daher werden $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_1}$, modulo dem Ideal betrachtet, unter ihnen transformiert:

$$(X_1, \dots, X_{n_1}) \equiv (Y_1, \dots, Y_{n_1})A_1.$$

Aus der Invarianteneigenschaft von J für $\mathfrak{G}$ folgt also unmittelbar die von J_1 für $\mathfrak{G}_1$. Die sämtlichen Polynome, die, modulo dem Ideal $(Y_{n_1+1}, \dots, Y_n)$ betrachtet, Invarianten für $\mathfrak{G}$ sind, bilden einen den Invariantenbereich für $\mathfrak{G}$ enthaltenden Bereich B . Setzt man in einem Polynom aus B $Y_{n_1+1} = \dots = Y_n = 0$, so erhält man eine Invariante für $\mathfrak{G}_1$; und jede Invariante für $\mathfrak{G}_1$ kann man dadurch erhalten.

Satz 5. *Sind der Invariantenbereich für $\mathfrak{G}$ und alle Oberbereich endlich, so ist der Invariantenbereich für einem Bestandteil $\mathfrak{G}_1$ auch endlich.*

Ist nun $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, so ist ihre reguläre Darstellung eine Permutationsgruppe, also ist $\mathfrak{G}_1$ in einer Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ als Bestandteil enthalten. Daher folgt der Endlichkeitssatz für $\mathfrak{G}_1$ unmittelbar aus Sätzen 4 und 5.

6. Jede Kollineation wird bekanntlich durch eine ganze lineare Substitution bestimmt. Dadurch kann man jede Kollineationsgruppe $\mathfrak{S}$ von n Variablen durch eine ganze Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}$ von $n+1$ Variablen bestimmen. Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen den Invarianten für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G}$. Ist $F_{\mathfrak{S}} = F(x_1, \dots, x_n)$ eine Invariante für $\mathfrak{S}$, so ist $F_{\mathfrak{G}} = F\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ eine Invariante für $\mathfrak{G}$. Es ist dann $F_{\mathfrak{G}} = \frac{A}{B}$ mit ganzen homogenen A und B vom gleichen Grad, etwa a . Umgekehrt bestimmt solche Funktion eine Invariante für $\mathfrak{S}$.

Satz 6. *Der Invariantenbereich für $\mathfrak{S}$ ist endlich, wenn der Invariantenbereich der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ endlich ist.*

Es sei nämlich der Invariantenbereich für $\mathfrak{G}$ endlich. Ist.

$$F_{\mathfrak{G}} = \frac{A}{B} = \frac{\Phi(J_1, \dots, J_k)}{\Psi(J_1, \dots, J_k)}$$

mit den Grundinvarianten $J_1, \dots, J_k$ für $\mathfrak{G}$. Der Grad von J_i sei gleich m_i . Ist d der grösste gemeinsame Teiler von den m_i ,

$$\sum_{i=1}^k l_i m_i = d, \quad m_i = n_i d,$$

so setze man⁽⁵⁾

$$J = \prod_{i=1}^k J_i^{l_i}.$$

(5) Diese Konstruktion von J verdanke ich K. Asano.

Dann ist der Grad von J gleich d und der von $\frac{J_i}{J^{n_i}}$ gleich Null. Also bestimmt $\frac{J_i}{J^{n_i}}$ eine Invariante für $\mathfrak{S}$. Dividiert man den Zähler und den Nenner durch $J^{\frac{a}{d}}$, so erkennt man, daß $F_{\mathfrak{S}}$ rationale Funktion von den $\frac{J_i}{J^{n_i}}$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, so kann man $\mathfrak{G}$ als endliche Gruppe annehmen, da das Faktorensystem in einem gewissen Erweiterungskörper einem aus Einheitswurzeln bestehenden assoziiert ist. Die Bestimmung der Grundinvarianten für endliche Kollineationsgruppe ist also eine Folgerung derselben für endliche ganze Substitutionsgruppe.

Mathematisches Institut
Kaiserliche Universität zu Osaka.