15. Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion conforme.

Par Kentaro YANO et Yosio MUTÔ.

(reçu le 10 Juin, 1940.)

Introduction.

On sait que c'est M. E. Cartan⁽¹⁾ qui a premièrement introduit la notion de connexion conforme et a développé la théorie des espaces à connexion conforme avec sa méthode du repère mobile. Il s'est aussi occupé des sous-espaces dans cet espace à connexion conforme.

D'autre part, les géomètres de l'Ecole de Princeton,⁽²⁾ en particulier MM. O. Veblen, T. Y. Thomas et J. M. Thomas ont étudié, d'après l'idée fondamentale de M. H. Weyl, les invariants conformes d'une forme quadratique $ds^2 = g_{jk} du^j du^k$, c'est-à-dire, les quantités invariantes par rapport à la transformation conforme

$$g_{jk} \rightarrow \rho^2 g_{jk}$$

du tenseur fondamental g_{jk} d'un espace de Riemann.

Pour étudier la géométrie conforme généralisée, les géomètres de l'Ecole de Delft,⁽³⁾ MM. J. A. Schouten et J. Haantjes ont proposé encore une autre méthode qui consiste à employer les coordonnées homogènes de M. D. van Dantzig.

Tout récemment, un des présents auteurs⁽⁴⁾ a étudié la théorie des espaces à connexion conforme à l'aide du repère mobile naturel de M. E. Cartan et a examiné en détail la relation entre la théorie de M. E. Cartan et celle de l'Ecole de Princeton.

(1) E. Cartan (I). Voir la Bibliographie placée à la fin du présent Mémoire. Nous avons accueilli ici seulement les Mémoires sur la théorie des sous-espaces dans un espace à connexion conforme. On peut trouver une Bibliographie complète sur la théorie générale des espaces à connexion conforme à la fin du Mémoire de K. Yano (2).

(2) T. Y. Thomas: Differential invariants of generalized spaces. Cambridge University Press. 1935.

O. Veblen: Formalism for conformal geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. 21 (1935) 168-173.

(3) J. A. Schouten et J. Haantjes: Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie. I. II. Math. Ann. 112 (1936) 594-629, 113 (1936) 568-583.

(4) K. Yano (2).

Il a étudié aussi la théorie des courbes et en particulier la théorie des circonférences généralisées⁽¹⁾ dans cet espace à connexion conforme.

Le but du présent Mémoire est de développer la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion conforme. La méthode adoptée ici est celle de M.E. Cartan utilisée dans le Mémoire cité ci-dessus de K. Yano.⁽²⁾

Dans le première Chapitre, nous résumerons, pour faciliter la lecture, quelques résultats obtenus dans le Mémoire de K. Yano.

Dans le deuxième Chapitre, on considère une hypersurface dans un espace à connexion conforme et étudie les repères attachés à cette hypersurface.

Le Chapitre 3 est consacré à la détermination de la connexion conforme sur l'hypersurface par rapport à la connexion conforme de l'espace ambiant.

On étudie, dans le Chapitre 4, les tenseurs de courbure de l'hypersurface et cherche les équations de Gauss et de Codazzi bien connues dans le cas de l'espace de Riemann. Dans le Chapitre 5, on traite des courbes tracées sur l'hypersurface et en particulier dans le Chapitre 6 les circonférences généralisées tracées sur l'hypersurface.

Le Chapitre 7 est consacré à l'étude des courbes autoconcourantes considérées par M. A. Haimovici.⁽³⁾

On étudie finalement, dans le Chapitre 8, quelques propriétés des ombilics et des hypersurfaces totalement ombiliquées.

Table des Matières

Introduction.....	229
§ 1. Notions préliminaires.....	230
§ 2. Les hypersurfaces dans un espace à connexion conforme.....	237
§ 3. La connexion conforme induite sur les hypersurfaces.....	246
§ 4. Tenseurs de courbure, les équations de Gauss et de Codazzi.....	260
§ 5. Propriétés des courbes sur les hypersurfaces.....	270
§ 6. Circonférences généralisées sur les hypersurfaces.....	277
§ 7. Les courbes autoconcourantes.....	283
§ 8. Les propriétés des ombilics et des hypersurfaces totalement ombiliquées.....	287

Chapitre I. Notions préliminaires.

Prenons une variété arithmétique à n dimensions, c'est-à-dire une variété numérique dont chaque point est défini par un système de n nombres réels $u^1, u^2, \dots, u^n$ et supposons que le voisinage immédiat

(1) K. Yano (1), (2).

(2) K. Yano (2).

(3) A. Haimovici (1).

Or, les équations (1.1), (1.2) et (1.3) nous donnent

$$(1.5) \quad \begin{cases} \omega_0^\infty = \omega_\infty^0 = 0, & \omega_0^i g_{ij} - \omega_j^\infty = 0, & \omega_\infty^i g_{ij} - \omega_j^0 = 0, & \omega_0^0 + \omega_\infty^\infty = 0, \\ & \omega_j^i g_{ik} + \omega_k^i g_{ij} = dg_{jk}. \end{cases}$$

ω_0^∞ étant identiquement nul, dA_0 a la forme suivante :

$$(1.6) \quad dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \cdots + \omega_0^n A_n.$$

Cela étant, quand on effectue une transformation du repère

$$(1.7) \quad \bar{A}_B = U_B^C A_C, \quad (A, B, C, \dots = 0, 1, 2, \dots, n, \infty)$$

ω_0^0 et ω_0^i seront respectivement transformés par les équations

$$(1.8) \quad \begin{cases} U_0^0 \bar{\omega}_0^0 + U_i^0 \bar{\omega}_0^i = U_0^0 \omega_0^0 + dU_0^0, \\ U_j^i \bar{\omega}_0^j = U_0^i \omega_0^i. \end{cases}$$

Ces équations nous assurent qu'on peut choisir un repère $(n+2)$ -sphérique pour lequel on a

$$(1.9) \quad \omega_0^0 = p_i du^i, \quad \omega_0^i = du^i,$$

c'est-à-dire qu'on a, pour le déplacement de A_0 ,

$$(1.10) \quad dA_0 = du^0 A_0 + du^1 A_1 + \cdots + du^n A_n$$

et par conséquent

$$(1.11) \quad (dA_0)^2 = g_{ij} du^i du^j$$

où nous avons posé

$$(1.12) \quad du^0 = p_i du^i.$$

On appelle repère mobile semi-naturel un repère mobile réalisant la condition (1.10) et par suite (1.11)

La connexion conforme étant complètement définie par

$$(1.13) \quad \begin{cases} \Pi_{B0}^A = \delta_B^A, \\ \Pi_{Bk}^A = \omega_{Bk}^A - \delta_B^A p_k, \end{cases}$$

où

$$(1.14) \quad \omega_{Bk}^A du^k = \omega_B^A,$$

nous appelons Π_{B0}^A et Π_{Bk}^A les composantes de la connexion conforme.

Dans le cas de sans torsion, on obtient de (1.5)

$$(1.15) \quad \begin{cases} \Pi_{jk}^0 = \omega_{jk}^0, & \Pi_{\infty k}^0 = \Pi_{0k}^\infty = 0, \\ \Pi_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} - \delta_j^i p_k - \delta_k^i p_j + g^{ia} p_a g_{jk}, & \Pi_{0k}^0 = 0, \\ \Pi_{jk}^\infty = g_{jk}, & \Pi_{\infty k}^\infty = -2 p_k, \\ \Pi_{\infty k}^i = g^{ij} \Pi_{jk}^0, & \Pi_{B0}^A = \delta_B^A, \Pi_{0i}^A = \delta_i^A, \end{cases}$$

où les $\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \}$ désignent les symboles de Christoffel formés avec les g_{jk} ,

$$(1.16) \quad \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2} g^{ia} (g_{aj, k} + g_{ak, j} - g_{jk, a}),$$

la virgule désignant la dérivée partielle par rapport à u^k .

Le choix du repère mobile semi-naturel n'étant pas unique, on peut admettre encore deux sortes de transformations du repère semi-naturel:

(i) transformation du tenseur fondamental

$$(1.17) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = \lambda A_0, \\ \bar{A}_i = \lambda A_i, \\ \bar{A}_\infty = \frac{1}{\lambda} A_\infty, \end{cases}$$

(ii) transformation du point de l'infini

$$(1.18) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = A_0, \\ \bar{A}_i = \phi_i A_0 + A_i, \\ \bar{A}_\infty = \frac{1}{2} g_{ij} \phi^i \phi^j A_0 + \phi^i A_i + A_\infty, \quad (\phi^i = g^{ij} \phi_j), \end{cases}$$

où λ et ϕ_i sont des fonctions arbitraires de coordonnées u^k .

Quand on effectue ces transformations du repère semi-naturel, les composantes de la connexion conforme se transforment de la manière suivante:

Pour la transformation du tenseur fondamental, on a

$$(1.19) \quad \begin{cases} \bar{p}_k = p_k + \lambda_k, \\ \bar{\Pi}_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0, \\ \bar{\Pi}_{jk}^i = \Pi_{jk}^i, \\ \bar{\Pi}_{ij}^\infty = \lambda^2 \Pi_{ij}^\infty, \\ \bar{\Pi}_{\infty k}^i = \frac{1}{\lambda^2} \Pi_{\infty k}^i, \end{cases}$$

ou

$$\lambda_k = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u^k},$$

et pour la transformation du point de l'infini, on a

$$(1.20) \quad \begin{cases} \bar{p}_k = p_k - \phi_k, \\ \bar{\Pi}_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0 + (\phi_{j,k} - \phi_i \Pi_{jk}^i) - \phi_j \phi_k + \frac{1}{2} g_{ab} \phi^a \phi^b g_{jk}, \\ \bar{\Pi}_{jk}^i = \Pi_{jk}^i + \delta_j^i \phi_k + \delta_k^i \phi_j - g^{ia} \phi_a g_{jk}, \\ \bar{\Pi}_{jk}^\infty = \Pi_{jk}^\infty, \\ \bar{\Pi}_{\infty k}^i = \Pi_{\infty k}^i + (\phi^i_{,k} + \phi^j \Pi_{jk}^i) - \phi^i \phi_k + 2 \phi^i p_k + \frac{1}{2} g_{ab} \phi^a \phi^b \delta_k^i. \end{cases}$$

En utilisant ces deux sortes de transformation, on peut uniquement déterminer un repère semi-naturel particulier satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes :

$$(1.21) \quad \begin{cases} p_k = 0, \\ \Pi_{ik}^i = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, nous aurons, pour les composantes de la connexion, l'expression suivante

$$(1.22) \quad \begin{cases} \Pi_{0k}^0 = \Pi_{\infty k}^0 = \Pi_{0k}^\infty = \Pi_{\infty k}^\infty = 0, & \Pi_{0j}^i = \delta_j^i, \\ \Pi_{jk}^i = \frac{1}{2} G^{ia} (G_{aj,k} + G_{ak,j} - G_{jk,a}), \\ \Pi_{jk}^\infty = G_{jk}, \\ \Pi_{jk}^0 = G_{ij} \Pi_{\infty}^i, \end{cases}$$

où G_{jk} est une densité tesorielle du poids $-\frac{2}{n}$ définie par

$$(1.23) \quad A_i A_j = G_{ij} = g_{ij} / g^{\frac{1}{n}},$$

g étant le déterminant formé avec les g_{ij} . Il est à remarquer que la valeur du déterminant $|G_{ij}|$ est égale à l'unité.

Nous appelons repère naturel le repère semi-naturel satisfaisant à la condition supplémentaire (1.21).

Quand on fixe le système de coordonnées de la variété, le repère mobile naturel sera uniquement déterminé. Cela étant, quand on effectue une transformation de coordonnées

$$(1.24) \quad \bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2, u^3, \dots, u^n)$$

avec le jacobien J non nul

$$(1.25) \quad J = \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right| \neq 0,$$

les A_0, A_j et A_∞ , formant le repère naturel, seront transformés en $\bar{A}_0, \bar{A}_j$ et $\bar{A}_\infty$ respectivement de la manière suivante :

$$(1.26) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = J^{-\frac{1}{n}} A_0, \\ \bar{A}_i = J^{-\frac{1}{n}} \bar{\psi}_i A_0 + J^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} A_j, \\ \bar{A}_\infty = \frac{1}{2} J^{-\frac{1}{n}} \bar{G}^{ij} \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j A_0 + J^{-\frac{1}{n}} \bar{G}^{ij} \bar{\psi}_i \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^j} A_a + J^{+\frac{1}{n}} A_\infty, \end{cases}$$

où

$$(1.27) \quad \bar{\psi}_i = \frac{\partial \log J^{-\frac{1}{n}}}{\partial \bar{u}^i},$$

et

$$(1.28) \quad \begin{cases} \bar{G}_{ij} = J^{-\frac{2}{n}} \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j} G_{ab}, \\ \bar{G}^{ij} = J^{+\frac{2}{n}} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^a} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^b} G^{ab}, \quad G^{ab} G_{bc} = \delta_c^a. \end{cases}$$

Le tenseur de courbure étant défini par

$$(1.29) \quad \Omega_{Bkh}^A = \Pi_{Bk, h}^A - \Pi_{Bh, k}^A + \Pi_{Bk}^C \Pi_{Ch}^A - \Pi_{Bh}^C \Pi_{Ck}^A,$$

le tenseur

$$(1.30) \quad C_{jkh}^i = \Omega_{jkh}^i - \delta_j^i \Omega_{0kh}^0$$

joue un rôle très important dans la théorie des espaces à connexion conforme.

Quand le tenseur C_{jkh}^i satisfait à la condition

$$(1.31) \quad C_{jki}^i = 0,$$

la connexion sera dite normale. Si la connexion est normale, le tenseur de courbure C_{jkh}^i coïncide avec celui de M. Weyl.

Dans ce cas, on peut choisir, parmi les repères mobiles semi-naturels, un repère privilégié pour lequel les composantes de la connexion seront:

$$(1.32) \quad \begin{cases} \Pi_{0i}^0 = \Pi_{\infty i}^\infty = \Pi_{\infty i}^0 = \Pi_{0i}^\infty = 0, & \Pi_{0j}^i = \delta_j^i, \\ \Pi_{jk}^0 = -\frac{R_{jk}}{n-2} + \frac{g_{jk}R}{2(n-1)(n-2)}, \\ \Pi_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k} + g_{ak,j} - g_{jk,a}), \\ \Pi_{jk}^\infty = g_{jk}, \\ \Pi_{\infty k}^i = -\frac{R_{ik}}{n-2} + \frac{\delta_k^i R}{2(n-1)(n-2)}, \end{cases}$$

où

$$(1.33) \quad R_{jk} = R_{jki}^i, \quad R_{ik}^i = g^{ij}R_{jk}, \quad R = g^{ij}R_{ij},$$

$$\text{et} \quad R_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \},_h - \{ \begin{smallmatrix} i \\ jh \end{smallmatrix} \},_k + \{ \begin{smallmatrix} a \\ jk \end{smallmatrix} \} \{ \begin{smallmatrix} i \\ ah \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} a \\ jh \end{smallmatrix} \} \{ \begin{smallmatrix} i \\ ak \end{smallmatrix} \}.$$

Nous appelons ce repère le repère de M. O. Veblen.⁽¹⁾

Dans le cas de la connexion normale, les composantes de la connexion par rapport au repère naturel seront:

$$(1.34) \quad \begin{cases} \Pi_{B0}^A = \delta_B^A, & \Pi_{0j}^i = \delta_j^i, & \Pi_{0k}^0 = \Pi_{\infty k}^\infty = \Pi_{\infty k}^0 = \Pi_{0k}^\infty = 0, \\ \Pi_{jk}^0 = -\frac{1}{n-2} \left[\Pi_{jki}^i - \frac{G_{jk} \Pi_{abi}^i G^{ab}}{2(n-1)} \right], \\ \Pi_{jk}^i = \frac{1}{2}G^{ia}(G_{aj,k} + G_{ak,j} - G_{jk,a}), \\ \Pi_{jk}^\infty = G_{jk}, \\ \Pi_{\infty k}^i = G^{ij} \Pi_{jk}^0, \end{cases}$$

où

$$(1.35) \quad \Pi_{jkh}^i = \Pi_{jk,h}^i - \Pi_{jh,k}^i + \Pi_{jk}^a \Pi_{ah}^i - \Pi_{jh}^a \Pi_{ak}^i.$$

La connexion que nous étudierons dans la suite n'étant pas toujours normale, nous employons en principe le repère naturel, mais si la connexion est normale, nous utiliserons aussi le repère de M. O. Veblen.

(1) O. Veblen: Formalism for conformal geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. 21 (1935) 168-173.

Chapitre 2. Les hypersurfaces dans un espace à connexion conforme.

On considère une hypersurface C_{n-1} dans une variété C_n à connexion conforme telle que nous avons expliquée dans le Chapitre précédent. Une telle hypersurface sera donnée par les équations paramétriques de la forme

$$(2.1) \quad u^i = u^i(u^1, u^2, u^3, \dots, u^{n-1})$$

ou plus simplement par

$$(2.2) \quad u^i = u^i(u^\alpha), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-1).$$

Nous supposons, dans la suite, que les lettres latines $i, j, k, \dots$ parcourent les symboles $1, 2, 3, \dots, n$ tandis que les lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ parcourent les symboles $1, 2, 3, \dots, n-1$. A chaque point (u^α) sur cette hypersurface, nous attacherons un espace conforme ordinaire à $(n-1)$ dimensions et nous allons considérer sa connexion. On peut déterminer une connexion sur cette hypersurface à partir de la densité tensorielle fondamentale sur l'hypersurface, mais ce que nous allons faire dans la suite, c'est déterminer une connexion sur l'hypersurface par rapport à la connexion conforme de la variété dans laquelle est plongée cette hypersurface.

Etant donnée une connexion de la variété ambiante C_n , nous allons choisir un repère $[A_0, A_\alpha, A_n, A_\infty]$ sur notre hypersurface. A_0 sera un point sur l'hypersurface, il est, bien entendu, regardé aussi comme étant un point de l'espace ambiant C_n .

Alors, A_0 doit avoir la forme

$$(2.3) \quad A_0 = \rho A_0,$$

où ρ est une fonction arbitraire des paramètres u^α .

Quand on considère un point $\left(u^i + \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha\right)$ infiniment voisin du point (u^i) sur l'hypersurface, le A_0 considéré à ce point correspond à $A_0 + dA_0$ dans l'espace conforme attaché au point (u^i) , et on aura

$$\begin{aligned} dA_0 &= d\rho A_0 + \rho dA_0 \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial u^\alpha} du^\alpha A_0 + \rho \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha A_i. \end{aligned}$$

Donc, si l'on veut choisir A_α de manière qu'on ait

$$dA_0 = du^\alpha A_\alpha,$$

on doit poser

$$(2.4) \quad A_\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial u^\alpha} A_0 + \rho \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} A_i.$$

Les A_0 et A_α sont bien déterminés ainsi à une fonction arbitraire ρ près, si l'on se donne un système de coordonnées (u^α) sur l'hypersurface.

L'interprétation géométrique de A_0 est évidente. A_0 étant un point courant de la variété C_n , A_0 est un point courant sur l'hypersurface. Quant à A_i , par exemple, on peut l'interpréter comme il suit: si l'on se déplace sur la courbe le long de laquelle le seul paramètre u^i change, on a

$$A_0 + dA_0 = A_0 + du^i A_i,$$

on voit donc que A_i est une sphère qui passe par le point A_0 et orthogonale à la direction de la tangente de la courbe le long de laquelle u^i seul change.

Nous allons choisir A_n comme une sphère orthogonale à toutes les sphères A_α passant par le point A_0 . Alors, nous avons toujours

$$dA_0 A_n = 0$$

sur l'hypersurface, donc on voit que A_n est une sphère tangente à l'hypersurface. Si l'on normalise A_n , on aura

$$A_n A_n = 1,$$

mais, il reste encore une transformation de A_n de la forme

$$(2.5) \quad A_n \rightarrow \sigma A_n + A_n.$$

La sphère A_n satisfaisant aux relations

$$(2.6) \quad A_0 A_n = 0, \quad A_\alpha A_n = 0, \quad A_n A_n = 1,$$

si, l'on définit une densité vectorielle N^i du poids $+\frac{1}{n}$ par les équations

$$(2.7) \quad G_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} N^j = 0, \quad G_{jk} N^j N^k = 1,$$

on aura une équation de la forme

$$(2.8) \quad A_n = N^0 A_0 + N^i A_i,$$

où N^0 est une fonction indéterminée. Il est évident que $(N^0, N^i, 0)$ forment les composantes d'un vecteur conforme contrevariant⁽¹⁾ par rapport au repère naturel.

On désigne finalement par A_∞ le point d'intersection autre que A_0 de sphères A_α et A_n , et on le normalise de manière qu'on ait

$$A_0 A_\infty = -1.$$

Alors A_∞ peut être représenté par l'équation suivante

$$(2.9) \quad A_\infty = \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} (N^0)^2 + \rho G^{\alpha\beta} \frac{\partial \log \rho}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \log \rho}{\partial u^\beta} \right\} A_0 \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\rho} N^0 N^i + \rho G^{\alpha\beta} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \log \rho}{\partial u^\beta} \right) A_i + \frac{1}{\rho} A_\infty \right],$$

où

$$G_{\alpha\beta} = A_\alpha A_\beta = \rho^2 G_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta}, \quad G^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

Nous avons pu ainsi déterminé complètement un point A_0 sur l'hypersurface, $n-1$ sphères A_α passant par A_0 et orthogonale aux toutes les courbes paramétriques sur l'hypersurface, une sphère A_n passant par A_0 et orthogonale aux A_α et le point d'intersection A_∞ des A_0 , A_α et A_n .

Ils comprennent cependant encore deux fonctions arbitraires ρ et N^0 . Pour déterminer d'abord la fonction ρ , nous imposons la condition suivante :

$$\det. |A_\alpha A_\beta| = \det. |G_{\alpha\beta}| = 1.$$

Alors la fonction ρ sera déterminée par l'équation

$$\rho^{2(n-1)} \left| G_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} \right| = 1.$$

Nous allons chercher une autre expression pour le déterminant $\left| G_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} \right|$. Pour cela, posons

(1) K. Yano (2) p. 26.

Quand on effectue une transformation du système de coordonnées (u^i) de l'espace ambiant, les A_0 , A_i , et A_∞ se transforment d'après

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{A}_0 &= J^{-\frac{1}{n}} A_0, \\ \bar{A}_i &= J^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial \log J^{-\frac{1}{n}}}{\partial \bar{u}^i} A_0 + J^{-\frac{1}{n}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} A_j, \\ \bar{A}_\infty &= \frac{1}{2} J^{-\frac{1}{n}} \bar{G}^{ij} \frac{\partial \log J^{-\frac{1}{n}}}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \log J^{-\frac{1}{n}}}{\partial \bar{u}^j} A_0 \\ &\quad + J^{-\frac{1}{n}} \bar{G}^{ij} \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \log J^{-\frac{1}{n}}}{\partial \bar{u}^j} A_a + J^{\frac{1}{n}} A_\infty, \end{aligned} \right.$$

où

$$\bar{G}^{ij} = J^{+\frac{2}{n}} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^a} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^b} G^{ab},$$

et les N^0 et N^i d'après

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{N}^0 &= J^{\frac{1}{n}} N^0 - J^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \log J^{-\frac{1}{n}}}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^a} N^a, \\ \bar{N}^i &= J^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} N^j. \end{aligned} \right.$$

Quand au déterminant a , il se transforme suivant

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \\ \bar{N}^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \\ J^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} N^j \end{vmatrix} = J^{\frac{1}{n}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \\ N^j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \\ N^j \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire suivant

$$(2.15) \quad \bar{a} = J^{-\frac{n-1}{n}} a.$$

On voit donc facilement que les A_0 , A_a , A_i et A_∞ restent invariants pendant une transformation de système de coordonnées de l'espace ambiant.

Cela étant, considérons une transformation de coordonnées de l'hypersurface

$$(2.16) \quad \bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\beta),$$

et posons

$$(2.17) \quad D = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}.$$

Dans ce cas, le déterminant a se transforme par

$$\bar{a} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\beta} \\ N^i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} & \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \\ & N^i \end{array} \right|,$$

c'est-à-dire par

$$(2.18) \quad \bar{a} = D \cdot a.$$

Les sphères A_0, A_i, A_∞ et les composantes N^0, N^i étant invariantes pendant la transformation (2.16), on trouve la loi suivante de transformation des A_0, A_α, A_n , et A_∞ ,

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_0 = D^{-\frac{1}{n-1}} A_0, \\ \bar{A}_\alpha = D^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial \log D}{\partial \bar{u}^\alpha} A_0 + D^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} A_\beta, \\ \bar{A}_n = A_n, \\ \bar{A}_\infty = \frac{1}{2} D^{-\frac{1}{n-1}} \bar{G}^{\alpha\beta} \frac{\partial \log D}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial \log D}{\partial \bar{u}^\beta} A_0 \\ \quad + D^{-\frac{1}{n-1}} \bar{G}^{\alpha\beta} \frac{\partial \log D}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} A_\gamma + D^{-\frac{1}{n-1}} A_\infty, \end{array} \right.$$

où

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \bar{G}^{\alpha\beta} \bar{G}_{\beta\gamma} &= \delta_\gamma^\alpha, \quad \bar{G}_{\alpha\beta} = D^{-\frac{2}{n-1}} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\beta} G_{\gamma\delta}, \\ \bar{G}^{\alpha\beta} &= D^{-\frac{2}{n-1}} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\delta} G^{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

On voit que les équations (2.19) ont la même forme que (2.13).

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la connexion soit générale, et nous avons exclusivement employé le repère naturel. Nous allons maintenant supposer que la connexion soit normale et prenons un repère de M. O. Veblen. Le fait que la connexion conforme de l'espace ambiant est normale ne donne pas toujours la conclusion que la connexion conforme sur l'hypersurface est normale, donc on ne peut pas toujours choisir un repère de M. O. Veblen sur l'hypersurface. Mais nous allons, dans la suite, essayer de chercher un repère analogue à celui de M. O. Veblen sur l'hypersurface.

Le repère de M. O. Veblen étant donné par A_0 , A_i et A_∞ , les composantes de la connexion satisfont aux relations

$$(2.21) \quad \begin{cases} \Pi_{0i}^0 = \Pi_{\infty i}^\infty = \Pi_{\infty i}^0 = \Pi_{0i}^\infty = 0, & \Pi_{0j}^i = \delta_j^i, \\ \Pi_{jk}^0 = -\frac{R_{jk}}{n-2} + \frac{g_{jk}R}{2(n-1)(n-2)}, \\ \Pi_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} = \frac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k} + g_{ak,j} - g_{jk,a}), \\ \Pi_{jk}^\infty = g_{jk}, \\ \Pi_{\infty k}^i = -\frac{R^i_k}{n-2} + \frac{\delta_k^i R}{2(n-1)(n-2)}. \end{cases}$$

Le repère de M. O. Veblen se transformant, pendant une transformation de coordonnées, d'après

$$(2.22) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = A_0, \\ \bar{A}_i = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} A_j, \\ \bar{A}_\infty = A_\infty, \end{cases}$$

les composantes de la connexion se transforment suivant les formules :

$$(2.23) \quad \begin{cases} \bar{\Pi}_{0i}^0 = \bar{\Pi}_{\infty i}^\infty = \bar{\Pi}_{\infty i}^0 = \bar{\Pi}_{0i}^\infty = 0, & \bar{\Pi}_{0j}^i = \delta_j^i, \\ \bar{\Pi}_{jk}^0 = \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^k} \Pi_{ab}^0, \\ \bar{\Pi}_{jk}^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^a} \left(\frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^k} \Pi_{bc}^a + \frac{\partial^2 u^a}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} \right), \\ \bar{\Pi}_{jk}^\infty = \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^k} \Pi_{ab}^\infty, \\ \bar{\Pi}_{\infty k}^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^a} \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^k} \Pi_{\infty b}^a. \end{cases}$$

Quand on multiplie A_0 par une fonction arbitraire λ et on pose

$$(2.24) \quad \bar{A}_0 = \lambda A_0 ,$$

la relation

$$d\bar{A}_0 = du^i \bar{A}_i ,$$

nous donne

$$(2.25) \quad \bar{A}_i = \lambda(\lambda_i A_0 + A_i) ,$$

où

$$\lambda_i = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u^i} .$$

En remarquant que

$$\bar{A}_0 \bar{A}_\infty = -1 , \quad \bar{A}_i \bar{A}_\infty = 0 , \quad \bar{A}_\infty \bar{A}_\infty = 0 ,$$

l'on trouve

$$(2.26) \quad \bar{A}_\infty = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \lambda_a \lambda_b A_0 + g^{ab} \lambda_a A_b + A_\infty \right) .$$

Pendant une transformation de repère de M. O. Veblen

$$(2.27) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = \lambda A_0 , \\ \bar{A}_i = \lambda(\lambda_i A_0 + A_i) , \\ \bar{A}_\infty = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \lambda_a \lambda_b A_0 + g^{ab} \lambda_a A_b + A_\infty \right) , \end{cases}$$

les composantes de la connexion se transforment donc suivant les formules

$$(2.28) \quad \begin{cases} \bar{\Pi}_{0i}^0 = \bar{\Pi}_{\infty i}^\infty = \bar{\Pi}_{\infty i}^0 = \bar{\Pi}_{0i}^\infty = 0 , \quad \bar{\Pi}_{0i}^i = \delta_j^i , \\ \bar{\Pi}_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0 + \left(\lambda_{j,k} - \lambda_i \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} \right) - \lambda_j \lambda_k + \frac{1}{2} g^{ab} \lambda_a \lambda_b g_{jk} , \\ \bar{\Pi}_{jk}^i = \Pi_{jk}^i + \delta_j^i \lambda_k + \delta_k^i \lambda_j - g^{ia} \lambda_a g_{jk} , \\ \bar{\Pi}_{jk}^\infty = \lambda^2 g_{jk} , \\ \bar{\Pi}_{\infty k}^i = \Pi_{\infty k}^i + \left(\lambda^i_{,k} + \lambda^j \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} \right) - \lambda^i \lambda_k + \frac{1}{2} g^{ab} \lambda_a \lambda_b \delta_k^i , \end{cases}$$

où

$$\lambda^i = g^{ia} \lambda_a .$$

Cela étant dans chaque espace conforme attaché à un point sur l'hypersurface, nous définissons les sphères A_0 , A_α , A_n et A_∞ par les équations

$$(2.29) \quad \begin{cases} A_0 = A_0, \\ A_\alpha = \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} A_i, \\ A_n = B^0 A_0 + B^i A_i, \\ A_\infty = \frac{1}{2}(B^0)^2 + B^0 B^i A_i + A_\infty, \end{cases}$$

où B^i est un vecteur contrevariant défini sur l'hypersurface par

$$(2.30) \quad g_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} B^k = 0, \quad \text{et} \quad g_{jk} B^j B^k = 1,$$

et B^0 est une fonction arbitraire de u^α . Alors, il sera facilement vérifié que les A_0 , A_α , A_n et A_∞ satisfont aux équations suivantes

$$\begin{aligned} A_0 A_0 &= 0, & A_0 A_\alpha &= 0, & A_0 A_n &= 0, & A_0 A_\infty &= -1, \\ A_\alpha A_\beta &= g_{\alpha\beta}, & A_\alpha A_n &= 0, & A_\alpha A_\infty &= 0, \\ A_n A_n &= 1, & A_n A_\infty &= 0, \\ A_\infty A_\infty &= 0, \end{aligned}$$

où

$$(2.31) \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} g_{jk},$$

et on voit bien que A_0 est un point coïncidant avec A_0 , A_α une sphère passant par A_0 et orthogonale à la courbe paramétrique $u^\alpha = \text{constante}$, A_n une sphère passant par A_0 et orthogonale à toutes les sphères A_α et finalement A_∞ le point d'intersection autre que A_0 de A_α et A_n .

Quand on effectue une transformation de système de coordonnées de l'espace ambiant, les A_0 , A_α et A_∞ restent invariants, la fonction B^0 étant invariante pendant cette transformation.

Si l'on effectue une transformation de système de coordonnées sur l'hypersurface

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\beta),$$

les A_0 , A_α , A_n , A_∞ se transforment d'après

$$(2.32) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = A_0, \\ \bar{A}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} A_\beta, \\ \bar{A}_n = A_n, \\ \bar{A}_\infty = A_\infty, \end{cases}$$

parce que les fonctions B^0 et B^i restent invariantes pendant cette transformation. Pendant la transformation (2.27) du repère de M. O. Veblen de l'espace ambiant, les A_0 , A_α , A_n et A_∞ se transforment d'après

$$(2.33) \quad \begin{cases} \bar{A}_0 = \lambda A_0, \\ \bar{A}_\alpha = \lambda(\lambda_\alpha A_0 + A_\alpha), \\ \bar{A}_n = A_n, \\ \bar{A}_\infty = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta A_0 + g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha A_\beta + A_\infty \right), \end{cases}$$

où

$$\lambda_\alpha = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha}, \quad \bar{A}_n = \bar{B}_0 \bar{A}_0 + \bar{B}^i A_i,$$

et

$$(2.34) \quad \bar{B}^0 = \frac{1}{\lambda} (B^0 - \lambda_i B^i), \quad \bar{B}^i = \frac{1}{\lambda} B^i.$$

Chapitre 3. La connexion conforme induite sur les hypersurfaces.

Nous allons, dans ce Chapitre, définir une connexion conforme sur l'hypersurface. Pour cet effet, prenons le repère naturel $[A_0, A_i, A_n]$ pour l'espace ambiant et définissons un repère $[A_0, A_\alpha, A_n, A_\infty]$ pour l'hypersurface par

$$(3.1) \quad \begin{cases} A_0 = a^{-\frac{1}{n-1}} A_0, \\ A_\alpha = a^{-\frac{1}{n-1}} \left(\frac{\partial \log a}{\partial u^\alpha} A_0 + \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} A_i \right), \\ A_n = N^0 A_0 + N^i A_i, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\infty} &= a^{\frac{1}{n-1}} \left[\frac{1}{2} \left\{ (N^0)^2 + a^{-\frac{2}{n-1}} G_{\alpha\beta} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^{\beta}} \right\} A_0 \right. \\ &\quad \left. + \left(N^0 N^i + a^{-\frac{2}{n-1}} G_{\alpha\beta} \frac{\partial u^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^{\beta}} \right) A_i + A_{\infty} \right]. \end{aligned} \right.$$

Pour définir une connexion conforme sur l'hypersurface, nous devons d'abord déterminer la fonction arbitraire N^0 . Pour cela, nous adopterons une méthode proposée par M. E. Cartan⁽¹⁾ et calculerons l'expression $dA_0 dA_n$.

dA_0 et dA_n étant respectivement donnés par

$$dA_0 = a^{-\frac{1}{n-1}} \left(d \log a^{-\frac{1}{n-1}} A_0 + du^i A_i \right),$$

et

$$dA_n = (dN^0 + H_{jk}^0 N^j du^k) A_0 + (N^0 du^i + dN^i + H_{hk}^i N^h du^k) A_i + G_{jk} N^j du^k A_{\infty},$$

nous avons

$$dA_0 dA_n = a^{-\frac{1}{n-1}} G_{ij} \left(N^0 \frac{\partial u^i}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial N^i}{\partial u^{\alpha}} + H_{hk}^i N^h \frac{\partial u^k}{\partial u^{\alpha}} \right) \frac{\partial u^j}{\partial u^{\beta}} du^{\alpha} du^{\beta},$$

en raison de la relation

$$G_{jk} N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^{\alpha}} = 0.$$

Mais, on a d'autre part,

$$G_{ij} \left(\frac{\partial N^i}{\partial u^{\alpha}} + H_{hk}^i N^h \frac{\partial u^k}{\partial u^{\alpha}} \right) = \frac{\partial N_j}{\partial u^{\alpha}} - H_{jk}^i N_i \frac{\partial u^k}{\partial u^{\alpha}},$$

où

$$N_j = G_{ij} N^i.$$

Donc, en posant

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial N_j}{\partial u^{\alpha}} - H_{jk}^i N_i \frac{\partial u^k}{\partial u^{\alpha}} \right) \frac{\partial u^j}{\partial u^{\beta}} = -N_{\alpha\beta}$$

nous avons

$$(3.3) \quad dA_0 dA_n = a^{\frac{1}{n-1}} \left(N^0 G_{\alpha\beta} - a^{-\frac{2}{n-2}} N_{\alpha\beta} \right) du^{\alpha} du^{\beta}.$$

(1) E. Cartan (I).

Cela étant, nous allons choisir la fonction N^0 de manière que la moyenne de $dA_0 dA_n$ par rapport à du^α s'annule, soit

$$a^{\frac{1}{n-1}} \left(N^0 G_{\alpha\beta} - a^{-\frac{2}{n-2}} N_{\alpha\beta} \right) G^{\alpha\beta} = 0 ,$$

d'où

$$(3.4) \quad N^0 = a^{-\frac{2}{n-2}} \cdot \frac{G^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}}{n-1} .$$

En substituant cette valeur de N^0 dans (3.3), on trouve

$$(3.5) \quad dA_0 dA_n = -M_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta ,$$

où nous avons posé

$$(3.6) \quad M_{\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{n-1}} \left(N_{\alpha\beta} - \frac{G^{\gamma\delta} N_{\gamma\delta}}{n-1} G_{\alpha\beta} \right) .$$

Comme nous avons les identités

$$(3.7) \quad \left(\frac{\partial N_j}{\partial u^\alpha} - H_{jk}^i N_i \frac{\partial u^k}{\partial u^\alpha} \right) \frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} = -N_i \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + H_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \right) .$$

on voit que la quantité $N_{\alpha\beta}$ et par suite $M_{\alpha\beta}$ introduite ici est symétrique par rapport aux deux indices inférieures α et β .

Le tenseur $M_{\alpha\beta}$ qui satisfait à la relation

$$(3.8) \quad G^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} = 0$$

va jouer, dans la suite, le rôle du second tenseur fondamental de l'hypersurface.

En substituant la valeur de N^0 donnée par (3.4) dans (3.1), nous avons

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = a^{-\frac{1}{n-1}} A_0 , \\ A_\alpha = a^{-\frac{1}{n-1}} \left(\frac{\partial \log a}{\partial u^\alpha} A_0 + \frac{\partial u^i}{\partial u^\alpha} A_i \right) , \\ A_n = a^{-\frac{2}{n-1}} \frac{G^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}}{n-1} A_0 + N^i A_i , \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\infty} = a^{\frac{1}{n-1}} & \left[\frac{1}{2} \left(a^{-\frac{2}{n-1}} \frac{G^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}}{n-1} \right)^2 \right. \\ & \left. + a^{-\frac{2}{n-1}} G^{\alpha\beta} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^{\beta}} \right] A_0 \\ & + \left(a^{-\frac{2}{n-1}} \frac{G^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}}{n-1} N^i + a^{-\frac{2}{n-1}} G^{\alpha\beta} \frac{\partial u^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^{\beta}} \right) A_i + A_{\infty} \end{aligned} \right\}.$$

La fonction N^0 étant ainsi déterminée, nous allons calculer les composantes de la connexion par rapport au repère $[A_0, A_{\alpha}, A_i, A_{\infty}]$. En tenant comptes des relations $A_0 dA_0 = A_i dA_0 = A_{\infty} dA_0 = 0$, $A_0 dA_i = A_i dA_i = 0$ et $A_0 dA_{\infty} = A_{\infty} dA_{\infty} = 0$, on aura les équations de la forme

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{aligned} dA_0 &= du^{\alpha} A_{\alpha}, \\ dA_{\alpha} &= \Pi_{\alpha\beta}^0 du^{\beta} A_0 + \Pi_{\alpha\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma} + \Pi_{\alpha\beta}^i du^{\beta} A_i + \Pi_{\alpha\beta}^{\infty} du^{\beta} A_{\infty}, \\ dA_i &= \Pi_{i\beta}^0 du^{\beta} A_0 + \Pi_{i\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma}, \\ dA_{\infty} &= \Pi_{\infty\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma} + \Pi_{\infty\beta}^i du^{\beta} A_i. \end{aligned} \right.$$

Déterminons ces composantes. On a déjà vu que le repère $[A_0, A_{\alpha}, A_i, A_{\infty}]$ est déterminé par les équations de la forme

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \rho A_0, \\ A_{\alpha} &= \rho \left(\rho_{\alpha} A_0 + \frac{\partial u^i}{\partial u^{\alpha}} A_i \right), \\ A_i &= N^0 A_0 + N^i A_i, \\ A_{\infty} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} (N^0)^2 + \rho G^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \right\} A_0 + \left(\frac{1}{\rho} N^0 N^i + \rho G^{\alpha\beta} \frac{\partial u^i}{\partial u^{\alpha}} \rho_{\beta} \right) A_i \\ &\quad + \frac{1}{\rho} A_{\infty}, \end{aligned} \right.$$

où

$$(3.12) \quad \rho_{\alpha} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u^{\alpha}}, \quad G_{\alpha\beta} = \rho^2 \frac{\partial u^j}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{\beta}} G_{jk}, \quad G^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}.$$

Si $[A_0, A_i, A_{\infty}]$ forme le repère naturel et $[A_0, A_{\alpha}, A_i, A_{\infty}]$ forme aussi le repère naturel, ρ prend la valeur $a^{-\frac{1}{n-1}}$.

Si l'on pose

$$(3.13) \quad B_{\alpha}^{\cdot j} = \rho \frac{\partial u^j}{\partial u^{\alpha}},$$

on obtient

$$(3.14) \quad \begin{cases} G_{\alpha\beta} = B_{\alpha}^{\cdot j} B_{\beta}^{\cdot k} G_{jk}, \\ 0 = B_{\alpha}^{\cdot j} N^k G_{jk}, \\ 1 = N^j N^k G_{jk}, \end{cases}$$

d'où

$$(3.15) \quad G_{jk} = B_{\cdot j}^{\alpha} B_{\cdot k}^{\beta} G_{\alpha\beta} + N_j N_k$$

où nous avons posé

$$(3.16) \quad B_{\cdot j}^{\alpha} = G^{\alpha\beta} G_{ij} B_{\beta}^{\cdot i}.$$

En multipliant (3.15) par G^{ij} et en contractant, on trouve

$$(3.17) \quad \delta_k^i = B_{\cdot i}^{\alpha} B_{\cdot k}^{\alpha} + N^i N_k.$$

En utilisant ces équations, on peut résoudre (3.11) par rapport aux A_0 , A_i et A_{∞} ,

$$(3.18) \quad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{\rho} A_{\dot{0}}, \\ A_i = -\left(\rho_i + \frac{1}{\rho} N^0 N_i\right) A_{\dot{0}} + B_{\cdot i}^{\alpha} A_{\alpha} + N_i A_{\dot{n}}, \\ A_{\infty} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} (N^0)^2 + \rho G^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta} \right\} A_{\dot{0}} - \rho G^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} A_{\beta} - N^0 A_{\dot{n}} + \rho A_{\infty}, \end{cases}$$

où

$$(3.19) \quad \rho_i = \rho_{\alpha} B_{\cdot i}^{\alpha}.$$

Cela dit, nous avons de (3.11)

$$\begin{aligned} dA_{\alpha} = & \left(\rho \rho_{\alpha} \rho_{\beta} + \rho \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} + \rho \Pi_{jk}^0 \frac{\partial u^j}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{\beta}} \right) du^{\beta} A_0 \\ & + \left(B_{\beta}^{\cdot i} \rho_{\alpha} + B_{\alpha}^{\cdot i} \rho_{\beta} + \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} + \rho \Pi_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^k}{\partial u^{\beta}} \right) du^{\beta} A_i + \frac{1}{\rho} G_{\alpha\beta} du^{\beta} A_{\infty}. \end{aligned}$$

Donc, en substituant (3.18) dans ces équations, l'on trouve

$$\begin{aligned}
 dA_\alpha = & \left[\Pi_{jk}^0 \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u^\beta} - \rho \rho_\tau B_{\tau i}^\tau \Pi_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \right) - \rho_\alpha \rho_\beta - \rho \rho_\tau B_{\tau i}^\tau \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right. \\
 & \left. - N^0 N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{N^0}{\rho} \right)^2 + G^{\tau\delta} \rho_\tau \rho_\delta \right\} G_{\alpha\beta} \right] du^\beta A_0 \\
 & + \left[\rho B_{\tau i}^\tau \left(\Pi_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) + \delta_\alpha^\tau \rho_\beta + \delta_\beta^\tau \rho_\alpha - G^{\tau\delta} \rho_\delta G_{\alpha\beta} \right] du^\beta A_\tau \\
 & + \left[\rho N_{\alpha\beta} - \frac{1}{\rho} N^0 G_{\alpha\beta} \right] du^\beta A_n + G_{\alpha\beta} du^\beta A_\infty,
 \end{aligned}$$

d'où, en comparant avec (3.10),

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad \Pi_{\alpha\beta}^0 = & \Pi_{jk}^0 \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u^\beta} - \rho \rho_\tau B_{\tau i}^\tau \Pi_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \right) \\
 & - \rho_\alpha \rho_\beta - \rho \rho_\tau B_{\tau i}^\tau \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - N^0 N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{N^0}{\rho} \right)^2 + G^{\tau\delta} \rho_\tau \rho_\delta \right\} G_{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

$$(3.21) \quad \Pi_{\alpha\beta}^\tau = \rho B_{\tau i}^\tau \left(\Pi_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) + \delta_\alpha^\tau \rho_\beta + \delta_\beta^\tau \rho_\alpha - G^{\tau\delta} \rho_\delta G_{\alpha\beta},$$

$$(3.23) \quad \Pi_{\alpha\beta}^n = \rho N_{\alpha\beta} - \frac{1}{\rho} N^0 G_{\alpha\beta},$$

$$(3.23) \quad \Pi_{\alpha\beta}^\infty = G_{\alpha\beta}.$$

En substituant (3.21) dans (3.20), on a

$$\begin{aligned}
 (3.24) \quad \Pi_{\alpha\beta}^0 = & \Pi_{jk}^0 \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \left(\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial u^\beta} - \rho_\tau \Pi_{\alpha\beta}^\tau \right) \\
 & + \rho_\alpha \rho_\beta - \frac{1}{2} G^{\tau\delta} \rho_\tau \rho_\delta G_{\alpha\beta} - N^0 N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{N^0}{\rho} \right)^2 G_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Cela étant, calculons ensuite dA_n . On a, de la troisième équation de (3.11),

$$dA_n = \left[\frac{\partial N^0}{\partial u^\beta} + \Pi_{jk}^0 N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \right] du^\beta A_0 + \left[N^0 \frac{\partial u^i}{\partial u^\beta} + \frac{\partial N^i}{\partial u^\beta} + \Pi_{jk}^i N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \right] du^\beta A_i.$$

En substituant (3.18) dans cette équation, on obtient

$$dA_i = \left[\frac{\partial}{\partial u^\beta} \frac{1}{\rho} N^0 + \frac{1}{\rho} H_{jk}^0 N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \rho \rho_\alpha N^\alpha_\beta \right] du^\beta A_0 + \left(\frac{1}{\rho} N^0 \delta^\alpha_\beta - \rho N^\alpha_\beta \right) du^\beta A_\alpha,$$

où

$$(3.25) \quad N^\alpha_\beta = G^{\alpha\gamma} N_{\gamma\beta},$$

d'où en comparant avec (3.10)

$$(3.26) \quad H_{n\beta}^0 = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \frac{1}{\rho} N^0 + \frac{1}{\rho} H_{jk}^0 N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \rho \rho_\alpha N^\alpha_\beta,$$

$$(3.27) \quad H_{n\beta}^\alpha = - \left(\rho N^\alpha_\beta - \frac{1}{\rho} N^0 \delta^\alpha_\beta \right).$$

Pour calculer $H_{\infty\beta}^\gamma$ et $H_{\infty\beta}^n$ nous remarquons que

$$A_\alpha dA_\infty = -A_\infty dA_\alpha \quad \text{et} \quad A_n dA_\infty = -A_\infty dA_n,$$

d'où

$$(3.28) \quad H_{\infty\beta}^\gamma = G^{\gamma\alpha} H_{\alpha\beta}^0,$$

$$(3.29) \quad H_{\infty\beta}^n = H_{n\beta}^0.$$

Toutes composantes dans (3.10) étant calculées, introduisons les valeurs

$$\rho = a^{-\frac{1}{n-1}},$$

$$\rho_\alpha = \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha},$$

$$N^0 = a^{-\frac{2}{n-1}} \frac{G^{\gamma\delta} N_{\gamma\delta}}{n-1},$$

$$M_{\alpha\beta} = a^{-\frac{1}{n-1}} \left(N_{\alpha\beta} - \frac{G^{\gamma\delta} N_{\gamma\delta}}{n-1} G_{\alpha\beta} \right),$$

dans (3.24), (3.21), (3.22), (3.23), (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29), alors on obtiendra

$$\begin{aligned}
 (3.30) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \Pi_{\alpha\beta}^0 &= \Pi_{jk}^0 \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \frac{\partial^2 \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\gamma} \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \\
 &+ \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta} - \frac{1}{2} G^{\gamma\delta} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\delta} G_{\alpha\beta} \\
 &- \left(a^{-\frac{2}{n-1}} \frac{G^{\gamma\delta} N_{\gamma\delta}}{n-1} \right) N_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(a^{-\frac{1}{n-1}} \frac{G^{\gamma\delta} N_{\gamma\delta}}{n-1} \right)^2 G_{\alpha\beta}, \\
 \Pi_{\alpha\beta}^\gamma &= a^{-\frac{1}{n-1}} B_{\gamma i}^\gamma \left(\Pi_{jk}^0 \frac{\partial u^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) \\
 &+ \delta_\alpha^i \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta} + \delta_\beta^i \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha} - G^{\gamma\delta} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\delta} G_{\alpha\beta}, \\
 &= \frac{1}{2} G^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial G_{\delta\alpha}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial G_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right), \\
 \Pi_{\alpha\beta}^{\dot{n}} &= M_{\alpha\beta}, \\
 \Pi_{\alpha\beta}^{\infty} &= G_{\alpha\beta}, \\
 \Pi_{n\beta}^0 &= \frac{1}{n-1} \frac{\partial a^{-\frac{1}{n-1}} G^{\gamma\delta} N_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta} + a^{\frac{1}{n-1}} \Pi_{jk}^0 N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \\
 &+ a^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha} N_\beta^\alpha, \\
 \Pi_{n\beta}^\alpha &= -M_{\alpha\beta}^\alpha, \\
 \Pi_{\infty\beta}^\gamma &= G^{\gamma\alpha} \Pi_{\alpha\beta}^0, \\
 \Pi_{\infty\beta}^{\dot{n}} &= \Pi_{\eta\beta}^0,
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$(3.31) \quad M_\beta^\alpha = G^{\alpha\delta} M_{\delta\beta}.$$

Cela étant, pour induire une connexion conforme sur l'hypersurface, nous prendrons la sphère A_n comme l'espace conforme attaché à chaque point de l'hypersurface. Si l'on prend deux points $P(u^\alpha)$ et $P'(u^\alpha + du^\alpha)$ et deux sphères A_n et A'_n qui sont y attachées respectivement, A'_n

correspond, d'après la connexion conforme de l'espace ambiant, à la sphère $A_n + dA_n$. Donc, pour induire une connexion conforme sur l'hypersurface, il faut établir une correspondance conforme entre A_n et $A_n + dA_n$. Pour cela, il nous sera utile une considération générale suivante :

Soient A et B deux sphères unitaires à $(n-1)$ dimensions dans un espace à n dimensions. Pour établir une correspondance conforme entre une sphère à $(n-2)$ dimensions sur A et une autre sphère à $(n-2)$ dimensions sur B , nous considérerons une sphère à $(n-1)$ dimensions X qui coupe A orthogonalement et une autre sphère à $(n-1)$ dimensions Y qui coupe B aussi orthogonalement.

Si les sphères X et Y font toujours l'angle égal avec toutes les sphères C qui coupent A et B orthogonalement, la sphère à $(n-2)$ dimensions qui est l'intersection de A et de X et la sphère à $(n-2)$ dimensions qui est l'intersection de B et de Y se correspondent par définition.

Nous exprimerons analytiquement ce fait comme il suit :

Deux sphères X et Y satisfaisant à la condition $A \cdot X = 0$, $B \cdot Y = 0$, si l'on a

$$(3.32) \quad A \cdot C = 0, \quad B \cdot C = 0,$$

on doit avoir toujours

$$(3.33) \quad \frac{(C \cdot X)^2}{(C \cdot C)(X \cdot X)} = \frac{(C \cdot Y)^2}{(C \cdot C)(Y \cdot Y)}.$$

Donc, si l'on a $C \cdot X = 0$, $C \cdot Y = 0$ sera toujours satisfaite, et l'on voit bien que la sphère Y doit avoir la forme suivante :

$$(3.34) \quad Y = x \cdot X + a \cdot A + b \cdot B.$$

En substituant cette équation dans (3.33), nous trouvons

$$\frac{(C \cdot X)^2}{(X \cdot X)} = \frac{x^2(C \cdot X)^2}{x^2(X \cdot X) + a^2 + b^2 + 2ab(A \cdot B) + 2bx(B \cdot X)}$$

grâce aux relations

$$A \cdot A = B \cdot B = 1, \quad A \cdot X = 0,$$

d'où l'on obtient

$$(3.35) \quad a^2 + b^2 + 2ab(A \cdot B) + 2bx(B \cdot X) = 0.$$

D'autre part, on a, en multipliant (3.34) par B ,

$$(3.36) \quad x(B \cdot X) + a(A \cdot B) + b = 0 .$$

Les équations (3.35) et (3.36) nous donnent

$$(3.37) \quad \begin{aligned} a &= \pm b , \\ x &= -\frac{A \cdot B \pm 1}{B \cdot X} a . \end{aligned}$$

En choisissant le signe de B de manière qu'on ait

$$a = b ,$$

on a, de (3.34) et de (3.37),

$$Y = -\frac{(A \cdot B + 1)a}{B \cdot X} X + aA + aB$$

ou, en multipliant par un facteur convenable,

$$(3.38) \quad Y = X - \frac{B \cdot X}{A \cdot B + 1} (A + B) .$$

En particulier, dans le cas où $B = A + dA$, on peut poser $Y = X + dX$. Donc, si l'on normalise X de manière à avoir $X \cdot dX = 0$, on obtient de (3.38)

$$(3.39) \quad dX = -(X \cdot dA) A .$$

Cela étant, nous allons appliquer ce résultat pour notre A_n .

En un point $M(u^\alpha)$ sur l'hypersurface, une sphère X à $(n-2)$ dimensions sur A_n peut être représentée par

$$(3.40) \quad X = X^0 A_0 + X^\alpha A_\alpha + X^\infty A_\infty ,$$

elle sera aussi interprétée comme une sphère à $(n-1)$ dimensions qui coupe la sphère A_n orthogonalement. Par conséquent, la sphère correspondante $X + dX$ à $(n-2)$ dimensions sur $A_n + dA_n$ sera facilement obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} dX &= -(XdA_n)A_n \\ &= -\left[X^0(A_0 dA_n) + X^\alpha(A_\alpha \cdot dA_n) + X^\infty(A_\infty dA_n)\right]A_n \end{aligned}$$

donc

$$(3.41) \quad \begin{aligned} X + dX &= X^0 \left[A_0 - (A_0 \cdot dA_n) A_n \right] + X^\alpha \left[A_\alpha - (A_\alpha \cdot dA_n) A_n \right] \\ &\quad + X^\infty \left[A_\infty - (A_\infty \cdot dA_n) A_n \right] . \end{aligned}$$

Pour obtenir la sphère correspondante en $M'(u^\alpha + du^\alpha)$ soit en $A_0 + dA_0$, on n'a qu'à substituer A_0 , A_α , A_n et A_∞ par $A_0 - dA_0$, $A_\alpha - dA_\alpha$, $A_n - dA_n$ et $A_\infty - dA_\infty$ respectivement dans (3.41).

$$\begin{aligned} X + dX &= X^0 [A_0 - dA_0 - (A_0 dA_n) A_n] + X^\alpha [A_\alpha - dA_\alpha - (A_\alpha dA_n) A_n] \\ &\quad + X^\infty [A_\infty - dA_\infty - (A_\infty dA_n) A_n] \\ &= X^0 (A_0 - \delta A_0) + X^\alpha (A_\alpha - \delta A_\alpha) + X^\infty (A_\infty - \delta A_\infty) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$(3.42) \quad \begin{cases} \delta A_0 = dA_0 + (A_0 dA_n) = dA_0 - (dA_0 \cdot A_n) \cdot A_n, \\ \delta A_\alpha = dA_\alpha + (A_\alpha dA_n) = dA_\alpha - (dA_\alpha \cdot A_n) \cdot A_n, \\ \delta A_\infty = dA_\infty + (A_\infty dA_n) = dA_\infty - (dA_\infty \cdot A_n) \cdot A_n. \end{cases}$$

Les équations (3.10) et (3.42) nous donnent

$$(3.43) \quad \begin{cases} \delta A_0 = du^\alpha A_\alpha, \\ \delta A_\alpha = H_{\alpha\beta}^0 du^\beta A_0 + H_{\alpha\beta}^\gamma du^\beta A_\gamma + H_{\alpha\beta}^\infty du^\beta A_\infty, \\ \delta A_\infty = H_{\infty\beta}^\gamma du^\beta A_\gamma. \end{cases}$$

On peut aussi interpréter ce fait comme il suit: les sphères A_0 , A_α et A_∞ en $M'(u^\alpha + du^\alpha)$ correspondent respectivement aux sphères $A_0 + \delta A_0$, $A_\alpha + \delta A_\alpha$ et $A_\infty + \delta A_\infty$ en $M(u^\alpha)$ par (3.43), donc les équations (3.43) définissent une connexion conforme induite sur l'hypersurface. En général, si la sphère X correspond, d'après la connexion conforme de l'espace ambiant, à la sphère $X + dX$ et que $X \cdot A_n = 0$, X correspond à la sphère $X + \delta X$ d'après la connexion conforme induite sur l'hypersurface où

$$(3.44) \quad \delta X = dX - (dX \cdot A_n) A_n.$$

Nous avons pu ainsi déterminer une connexion conforme induite sur l'hypersurface, en employant le repère naturel pour tous les deux espaces ambiant et plongé.

Or, en supposant que la connexion soit normale, prenons le repère de M. O. Veblen pour l'espace ambiant et un repère analogue à celui de M. O. Veblen pour l'hypersurface plongée et considérons la connexion conforme induite.

$[A_0, A_i, A_\infty]$ étant le repère de M. O. Veblen, on définit un repère $[A_0, A_\alpha, A_n, A_\infty]$ pour l'hypersurface par les équations

$$(3.45) \quad \begin{cases} A_{\dot{0}} = A_0, \\ A_{\alpha} = B_{\alpha}^{\cdot i} A_i \\ A_{\dot{n}} = B^0 A_0 + B^i A_i, \\ A_{\infty} = \frac{1}{2}(B^0)^2 A_0 + B^0 B^i A_i + A_{\infty}, \end{cases}$$

où

$$(3.46) \quad B_{\alpha}^{\cdot i} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{\alpha}}$$

et

$$(3.47) \quad \begin{cases} g_{ij} B_{\alpha}^{\cdot i} B_{\beta}^{\cdot j} = g_{\alpha\beta}, \\ g_{ij} B_{\alpha}^{\cdot i} B^j = 0, \\ g_{ij} B^i B^j = 1. \end{cases}$$

Pour déterminer la fonction indéterminée B^0 , nous imposons, comme auparavant, la condition suivante :

$$(3.48) \quad M_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 0,$$

où

$$(3.49) \quad dA_{\dot{0}} dA_{\dot{n}} = -M_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}.$$

Or nous avons

$$(3.50) \quad dA_{\dot{0}} \cdot dA_{\dot{n}} = g_{ij} B_{\alpha}^{\cdot i} \left(B^0 B_{\beta}^{\cdot j} + \frac{\partial B^j}{\partial u^{\alpha}} + \{ \begin{smallmatrix} j \\ kh \end{smallmatrix} \} B^k B_{\beta}^{\cdot h} \right) du^{\alpha} du^{\beta}$$

en tenant compte de

$$(3.51) \quad dA_{\dot{0}} = du^{\alpha} B_{\alpha}^{\cdot i} A_i,$$

$$(3.52) \quad dA_{\dot{n}} = (dB^0 + B_{jk}^0 B^j du^k) A_0 \\ + (B^0 du^i + dB^i + \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} B^j du^k) A_i + g_{jk} B^j du^k A_{\infty}.$$

Donc, on trouve que

$$(3.53) \quad M_{\alpha\beta} = -g_{ij} B_{\alpha}^{\cdot i} \left(B^0 B_{\beta}^{\cdot j} + \frac{\partial B^j}{\partial u^{\alpha}} + \{ \begin{smallmatrix} j \\ kh \end{smallmatrix} \} B^k B_{\beta}^{\cdot h} \right).$$

Mais, on a, d'autre part,

$$(3.54) \quad -g_{ij}B_{\alpha}^{\cdot i}\left(\frac{\partial B^j}{\partial u^3} + \{ \begin{smallmatrix} j \\ kh \end{smallmatrix} \} B^k B_{\beta}^{\cdot h}\right) = g_{ij}H_{\alpha\beta}^{\cdot i} B^j,$$

où

$$(3.55) \quad H_{\alpha\beta}^{\cdot i} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} + B_{\alpha}^{\cdot j} \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \} B_{\beta}^{\cdot k} - B_{\gamma}^{\cdot i} \{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \}$$

donc, (3.53) nous donne

$$(3.56) \quad M_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} B^0 + H_{\alpha\beta}^{\cdot i} B_i,$$

où

$$(3.57) \quad B_i = g_{ij} B^j.$$

Les équations (3.48) et (3.56) nous permettent de déterminer la fonction B^0 , soit

$$(-g_{\alpha\beta} B^0 + H_{\alpha\beta}^{\cdot i} B_i) g^{\alpha\beta} = 0,$$

d'où

$$(3.58) \quad B^0 = \frac{1}{n-1} g^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}^{\cdot i} B_i.$$

En substituant la valeur de B^0 dans (3.56), on trouve

$$(3.59) \quad M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{\cdot i} B_i,$$

où

$$(3.60) \quad M_{\alpha\beta}^{\cdot i} = H_{\alpha\beta}^{\cdot i} - \frac{1}{n-1} g^{\gamma\delta} H_{\gamma\delta}^{\cdot i} g_{\alpha\beta}.^{(1)}$$

Le tenseur $M_{\alpha\beta}^{\cdot i}$ ainsi défini est un tenseur conforme et satisfait aux relations

$$(3.61) \quad g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}^{\cdot i} = 0, \quad g_{ij} B_{\alpha}^{\cdot i} M_{\beta\gamma}^{\cdot j} = 0.$$

Le repère $[A_0, A_{\alpha}, A_n, A_{\infty}]$ étant ainsi complètement déterminé, nous allons ensuite déterminer les composantes de la connexion conforme par rapport à ce repère.

(1) K. Yano (3) (4) (5).

Le repère $[A_{\dot{0}}, A_{\alpha}, A_{\dot{n}}, A_{\infty}]$ satisfaisant aux relations

$$(3.62) \quad \begin{aligned} A_{\dot{0}}A_{\dot{0}} &= A_{\dot{0}}A_{\alpha} = A_{\dot{0}}A_{\dot{n}} = 0, & A_{\dot{0}}A_{\infty} &= -1, \\ A_{\alpha}A_{\beta} &= g_{\alpha\beta}, & A_{\alpha}A_{\dot{n}} &= A_{\alpha}A_{\infty} = 0, \\ A_{\dot{n}}A_{\dot{n}} &= 1, & A_{\dot{n}}A_{\infty} &= 0, \\ A_{\infty}A_{\infty} &= 0, \end{aligned}$$

nous avons les équations de la forme

$$(3.63) \quad \begin{cases} dA_{\dot{0}} = & du^{\alpha}A_{\alpha}, \\ dA_{\alpha} = & H_{\alpha\beta}^{\dot{0}}du^{\beta}A_{\dot{0}} + H_{\alpha\beta}^{\tau}du^{\beta}A_{\tau} + H_{\alpha\beta}^{\dot{n}}du^{\beta}A_{\dot{n}} + H_{\alpha\beta}^{\infty}du^{\beta}A_{\infty}, \\ dA_{\dot{n}} = & H_{\dot{n}\beta}^{\dot{0}}du^{\beta}A_{\dot{0}} + H_{\dot{n}\beta}^{\tau}du^{\beta}A_{\tau}, \\ dA_{\infty} = & H_{\infty\beta}^{\tau}du^{\beta}A_{\tau} + H_{\infty\beta}^{\dot{n}}du^{\beta}A_{\dot{n}}. \end{cases}$$

Pour déterminer les $H_{Q\beta}^P$ on n'a qu'à répéter le calcul analogue à celui fait au début de ce Chapitre, donc nous exposerons ici seulement les résultats :

$$(3.64) \quad H_{\alpha\beta}^{\dot{0}} = H_{jk}^0 B_{\alpha}^j B_{\beta}^k - \frac{1}{n-1} g^{\tau\delta} H_{\tau\delta} H_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} g^{\tau\delta} H_{\tau\delta} \right)^2 g_{\alpha\beta},$$

$$(3.65) \quad H_{\alpha\beta}^{\tau} = \{ \tau_{\alpha\beta} \} = B_{\tau i}^{\tau} \left(B_{\beta}^j B_{\tau}^k \{ j_k^i \} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{\beta} \partial u^{\tau}} \right),$$

$$(3.66) \quad H_{\alpha\beta}^{\dot{n}} = M_{\alpha\beta},$$

$$(3.67) \quad H_{\alpha\beta}^{\infty} = g_{\alpha\beta},$$

$$(3.68) \quad H_{\dot{n}\beta}^{\dot{0}} = \frac{\partial}{\partial u^{\beta}} \left(\frac{1}{n-1} g^{\tau\delta} H_{\tau\delta} \right) + H_{jk}^0 B^j B_{\beta}^k,$$

$$(3.69) \quad H_{\dot{n}\beta}^{\alpha} = -M_{\beta}^{\alpha},$$

$$(3.70) \quad H_{\infty\beta}^{\tau} = g^{\tau\alpha} H_{\alpha\beta}^{\dot{0}},$$

$$(3.71) \quad H_{\infty\beta}^{\dot{n}} = H_{\infty\beta}^{\dot{0}},$$

où nous avons posé

$$(3.72) \quad H_{\tau\delta} = H_{\tau\delta}^i B_i, \quad B_{\tau i}^{\tau} = g_{ij} g^{\tau\delta} B_{\delta}^j, \quad M_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\delta} M_{\delta\beta},$$

Cela étant, on peut définir la connexion conforme induite sur l'hypersurface par

$$(3.73) \quad \begin{cases} \delta A_{\dot{0}} = dA_{\dot{0}} - (dA_{\dot{0}}A_{\dot{n}})A_{\dot{n}}, \\ \delta A_{\alpha} = dA_{\alpha} - (dA_{\alpha}A_{\dot{n}})A_{\dot{n}}, \\ \delta A_{\infty} = dA_{\infty} - (dA_{\infty}A_{\dot{n}})A_{\dot{n}}, \end{cases}$$

d'où l'on trouve

$$(3.74) \quad \begin{cases} \delta A_{\dot{0}} = du^{\alpha} A_{\alpha}, \\ \delta A_{\alpha} = H_{\alpha\beta}^{\dot{0}} du^{\beta} A_{\dot{0}} + H_{\alpha\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma} + H_{\alpha\beta}^{\infty} du^{\beta} A_{\infty}, \\ \delta A_{\infty} = H_{\infty\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma}. \end{cases}$$

Chapitre 4. Tenseurs de courbure, les équations de Gauss et de Codazzi.

Pour traiter les tenseurs de courbure de l'hypersurface, prenons d'abord le repère naturel. La connexion conforme induite sur l'hypersurface étant donnée par

$$(4.1) \quad \begin{cases} \delta A_{\dot{0}} = du^{\alpha} A_{\alpha}, \\ \delta A_{\alpha} = H_{\alpha\beta}^{\dot{0}} du^{\beta} A_{\dot{0}} + H_{\alpha\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma} + H_{\alpha\beta}^{\infty} du^{\beta} A_{\infty}, \\ \delta A_{\infty} = H_{\infty\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma}, \end{cases}$$

on peut définir les tenseurs de courbure de l'hypersurface comme il suit⁽¹⁾:

$$(4.3) \quad \Omega_{Q\gamma\delta}^P = H_{Q\gamma,\delta}^P - H_{Q\delta,\gamma}^P + H_{Q\gamma}^R H_{R\delta}^P - H_{Q\delta}^R H_{R\gamma}^P, \\ (P, Q, R, \dots = \dot{0}, 1, \dots, n-1, \infty)$$

c'est-à-dire

$$(4.3) \quad \Omega_{0\gamma\delta}^{\dot{0}} = H_{\gamma\delta}^{\dot{0}} - H_{\delta\gamma}^{\dot{0}},$$

$$(4.4) \quad \Omega_{\beta\gamma\delta}^{\dot{0}} = H_{\beta\gamma,\delta}^{\dot{0}} - H_{\beta\delta,\gamma}^{\dot{0}} + H_{\beta\gamma}^{\varepsilon} H_{\varepsilon\delta}^{\dot{0}} - H_{\beta\delta}^{\varepsilon} H_{\varepsilon\gamma}^{\dot{0}},$$

$$(4.5) \quad \Omega_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = H_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + H_{\beta\gamma}^{\dot{0}} \delta_{\delta}^{\alpha} - H_{\beta\delta}^{\dot{0}} \delta_{\gamma}^{\alpha} + G_{\beta\gamma} H_{\infty\delta}^{\alpha} - G_{\beta\delta} H_{\infty\gamma}^{\alpha},$$

$$(4.6) \quad \Omega_{\infty\gamma\delta}^{\infty} = -\Omega_{0\gamma\delta}^{\dot{0}},$$

(1) K. Yano (2).

$$(4.7) \quad \mathcal{Q}_{\infty\gamma\delta}^{\alpha} = G^{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\beta\gamma\delta}^0,$$

$$(4.8) \quad \mathcal{Q}_{0\beta\gamma}^{\alpha} = \mathcal{Q}_{\infty\gamma\delta}^0 = \mathcal{Q}_{0\gamma\delta}^{\infty} = \mathcal{Q}_{\beta\gamma\delta}^{\infty} = 0,$$

où nous avons posé

$$(4.9) \quad \Pi_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Pi_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} - \Pi_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} + \Pi_{\beta\gamma}^{\varepsilon} \Pi_{\varepsilon\delta}^{\alpha} - \Pi_{\beta\delta}^{\varepsilon} \Pi_{\varepsilon\gamma}^{\alpha},$$

la virgule désignant la dérivée partielle par rapport aux variables u^{δ} .

Nous chercherons, dans ce Chapitre, les relations qu'il existe entre les tenseurs de courbure $\mathcal{Q}_{Q\gamma\delta}^P$ définis sur l'hypersurface et les tenseurs de courbure $\mathcal{Q}_{Bkh}^A$ ($A, B, C, \dots = 0, 1, 2, \dots, n, \infty$) de l'espace ambiant à connexion conforme :

$$(4.10) \quad \mathcal{Q}_{0kh}^0 = \Pi_{kh}^0 - \Pi_{hk}^0,$$

$$(4.11) \quad \mathcal{Q}_{jkh}^0 = \Pi_{jk,h}^0 - \Pi_{jh,k}^0 + \Pi_{jk}^a \Pi_{ah}^0 - \Pi_{jh}^a \Pi_{ak}^0,$$

$$(4.12) \quad \mathcal{Q}_{jkh}^i = \Pi_{jkh}^i + \Pi_{jk}^0 \delta_h^i - \Pi_{jh}^0 \delta_k^i + G_{jk} \Pi_{\infty h}^i - G_{jh} \Pi_{\infty k}^i,$$

$$(4.13) \quad \mathcal{Q}_{\infty kh}^{\infty} = -\mathcal{Q}_{0kh}^0,$$

$$(4.14) \quad \mathcal{Q}_{\infty kh}^i = G^{ij} \mathcal{Q}_{jkh}^0,$$

$$(4.15) \quad \mathcal{Q}_{0kh}^i = \mathcal{Q}_{jkh}^{\infty} = \mathcal{Q}_{\infty kh}^0 = \mathcal{Q}_{0kh}^{\infty} = 0,$$

où

$$(4.16) \quad \Pi_{jkh}^i = \Pi_{jk,h}^i - \Pi_{jh,k}^i + \Pi_{jk}^a \Pi_{ah}^i - \Pi_{jh}^a \Pi_{ak}^i,$$

et la virgule désigne la dérivée partielle par rapport aux variables u^h .

Pour cet effet, posons (3.9) sous la forme suivante :

$$(4.17) \quad A_P = B_P^A A_A.$$

Alors, en remarquant que

$$dA_P = \delta A_P - (A_P dA_n) A_n,$$

on tire de (4.17)

$$(4.18) \quad \Pi_{P,\gamma}^Q du^{\gamma} A_Q - (A_P dA_n) A_n = B_P^A{}_{,\gamma} du^{\gamma} A_A + B_P^C \Pi_{Ck}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^{\gamma}} du^{\gamma} A_A$$

Mais, on a d'autre part

$$(4.19) \quad \begin{aligned} (A_P dA_n) &= A_P (\Pi_{n\gamma}^0 du^{\gamma} A_0 + \Pi_{n\gamma}^{\varepsilon} du^{\gamma} A_{\varepsilon}) \\ &= -M_{P\gamma} du^{\gamma} \end{aligned}$$

où

$$(4.20) \quad M_{0\tau} = 0 \quad \text{et} \quad M_{\alpha\tau} = \frac{1}{n-1} \frac{\partial a^{-\frac{1}{n-1}} G^{\delta\tau} N_{\delta\tau}}{\partial u^\tau} + a^{\frac{1}{n-1}} \Pi_{jk}^0 N^j \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \\ + a^{-\frac{1}{n-1}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha} N^\alpha_\tau,$$

$M_{\alpha\beta}$ ayant été défini par (3.6). Donc les équations (4.18) nous donnent

$$B_Q^A \Pi_{P\tau}^Q du^\tau A_A + M_{P\tau} du^\tau N^A A_A = B_{P,\tau}^A du^\tau A_A + B_P^C \Pi_{Ck}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} du^\tau A_A,$$

d'où l'on obtient

$$(4.21) \quad B_Q^A \Pi_{P\tau}^Q = B_P^C \Pi_{Ck}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} + B_{P,\tau}^A - M_{P\tau} N^A.$$

En dérivant (4.21) par rapport à u^δ , on trouve

$$(4.22) \quad B_{Q,\delta}^A \Pi_{P\tau}^Q + B_Q^A \Pi_{P\tau,\delta}^Q = B_{P,\delta}^C \Pi_{Ck}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} + B_P^C \Pi_{Ck,h}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} \\ + B_P^C \Pi_{Ck}^A \frac{\partial^2 u^k}{\partial u^\tau \partial u^\delta} + B_{P,\tau,\delta}^A - M_{P\tau,\delta} N^A - M_{P\tau} N^A_{,\delta}.$$

Les $B_{Q,\delta}^A$ étant donnés par

$$B_{Q,\delta}^A = B_R^A \Pi_{Q\delta}^R - B_Q^B \Pi_{Bk}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\delta} + M_{Q\delta} N^A,$$

les équations (4.22) deviennent

$$(4.23) \quad \left(B_R^A \Pi_{Q\delta}^R - B_Q^B \Pi_{Bk}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\delta} + M_{Q\delta} N^A \right) \Pi_{P\tau}^Q + B_Q^A \Pi_{P\tau,\delta}^Q \\ = \left(B_R^C \Pi_{P\delta}^R - B_P^B \Pi_{Bh}^C \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} + M_{P\delta} N^C \right) \Pi_{Ck}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \\ + B_P^C \Pi_{Ck,h}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} + B_P^C \Pi_{Ck}^A \frac{\partial^2 u^k}{\partial u^\tau \partial u^\delta} \\ + B_{P,\tau,\delta}^A - M_{P\tau,\delta} N^A - M_{P\tau} N^A_{,\delta}.$$

En permutant γ et δ et en soustrayant les équations obtenues de (4.23), on trouve

$$(4.24) \quad B_Q^A \mathcal{Q}_{P\tau\delta}^Q = B_P^B \mathcal{Q}_{Bkh}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} - M_{P\tau} N^A{}_{;\delta} \\ + M_{P\delta} N^A{}_{;\tau} - (M_{P\tau}{}_{;\delta} - M_{P\delta}{}_{;\tau}) N^A,$$

où nous avons posé

$$(4.25) \quad N^A{}_{;\delta} = N^A{}_{,\delta} + N^B H_{Bk}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\delta},$$

$$(4.26) \quad M_{P\tau}{}_{;\delta} = M_{P\tau,\delta} - M_{Q\tau} H_{P\delta}^Q - M_{P\delta} H_{\tau\delta}^\varepsilon.$$

Cela étant, on tire de $A_{;n} = N^A A_A$,

$$(4.27) \quad dA_{;n} = N^A{}_{;\delta} du^\delta A_A,$$

d'où en tenant compte de (4.19)

$$(4.28) \quad G_{AB} B_P^B N^A{}_{;\delta} = -M_{P\delta},$$

et

$$(4.29) \quad N_A N^A{}_{;\delta} = 0, \quad (N_A = G_{AB} N^B)$$

où nous posons

$$A_A A_B = G_{AB}, \quad A_P A_Q = G_{PQ}.$$

Donc, en multipliant (4.28) par

$$(4.30) \quad B_{;C}^P = G_{BC} G^{PQ} B_Q^B \quad (G^{PQ} G_{QR} = \delta_R^P)$$

et en sommant, l'on obtient

$$(4.31) \quad B_{;C}^P M_{P\delta} = -G_{AC} N^A{}_{;\delta}$$

grâce aux relations

$$(4.32) \quad B_P^B B^Q{}_B = \delta_P^Q, \quad B_P^B B_{;C}^P = \delta_C^B - N^B N_C.$$

En multipliant (4.28) par G^{QP} et en sommant, on trouve

$$(4.33) \quad B^Q{}_A N^A{}_{;\delta} = -G^{QP} M_{P\delta} = -M^Q{}_{;\delta}.$$

Ceci dit, en multipliant (4.24) par $B^R{}_A$ et en sommant, on trouve

$$(4.34) \quad \mathcal{Q}_{P\tau\delta}^R = B^R{}_A B_P^B \mathcal{Q}_{Bkh}^A \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} + M_{P\tau} M^R{}_{;\delta} - M_{P\delta} M^R{}_{;\tau},$$

grâce à

$$(4.35) \quad B^R{}_A N^A = 0.$$

En multipliant en suite (4.24) par N_A et en sommant, on obtient

$$(4.36) \quad N_A B^B{}_P \Omega^A{}_{Bkh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} - M_{P\tau;\delta} + M_{P\delta;\tau} = 0,$$

en raison des relations

$$(4.37) \quad B^A{}_Q N_A = 0, \quad N_A N^A{}_{;\delta} = 0 \quad \text{et} \quad N_A N^A = 1.$$

En posant $A, B, \dots = 0, i, \infty; P, Q, \dots = 0, \alpha, \infty$, respectivement dans (4.34), on obtiendra

$$(4.38) \quad \Omega^0{}_{0\tau\delta} = \Omega^0{}_{0kh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta},$$

$$(4.39) \quad \begin{aligned} \Omega^0{}_{\beta\tau\delta} &= B^0{}_0 B^0{}_\beta \Omega^0{}_{0kh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} + B^0{}_0 B^j{}_\beta \Omega^0{}_{jkh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} \\ &\quad + B^0{}_i B^j{}_\beta \Omega^i{}_{jkh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} - M_{\beta\tau;\delta} + M_{\beta\delta;\tau}, \end{aligned}$$

$$(4.40) \quad \Omega^\alpha{}_{\beta\tau\delta} = B^\alpha{}_i B^j{}_\beta \Omega^i{}_{jkh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} + M_{\beta\tau;\delta} - M_{\beta\delta;\tau}.$$

On peut appeler (4.40) les équations de Gauss d'une hypersurface dans un espace à connexion conforme.

D'une manière analogue, on tire de (4.36)

$$(4.41) \quad N_i B^j{}_\beta \Omega^i{}_{jkh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} - M_{\beta\tau;\delta} + M_{\beta\delta;\tau} = 0,$$

$$(4.42) \quad \begin{aligned} N_i B^j{}_\infty \Omega^i{}_{jkh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} + N_i B^j{}_\infty \Omega^i{}_{\infty kh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} \\ + N_\infty B^j{}_\infty \Omega^\infty{}_{\infty kh} \frac{\partial u^k}{\partial u^\tau} \frac{\partial u^h}{\partial u^\delta} - M_{\infty\tau;\delta} + M_{\infty\delta;\tau} = 0. \end{aligned}$$

Les équations (4.41) peuvent être regardées comme les équations de Codazzi pour l'hypersurface, les équations (4.42) étant une conséquence de (4.41).

Cela étant, supposons ensuite que la connexion conforme de l'espace ambiant soit normale et prenons le repère de M. O. Veblen $[A_0, A_i, A_\infty]$

pour l'espace ambiant. Alors la connexion normale sera exprimée par les équations

$$(4.43) \quad \begin{cases} dA_0 = du^i A_i, \\ dA_j = \Pi_{jk}^0 du^k A_0 + \Pi_{jk}^i du^k A_i + \Pi_{jk}^\infty du^k A_\infty, \\ dA_\infty = \Pi_{\infty k}^i du^k A_i, \end{cases}$$

où

$$(4.44) \quad \begin{cases} \Pi_{jk}^0 = -\frac{R_{jk}}{n-2} + \frac{g_{jk}R}{2(n-1)(n-2)}, \\ \Pi_{jk}^i = \left\{ \frac{i}{jk} \right\}, \quad \Pi_{jk}^\infty = g_{jk}, \\ \Pi_{\infty k}^i = -\frac{R_{\cdot k}^i}{n-2} + \frac{\delta_k^i R}{2(n-1)(n-2)}, \end{cases}$$

et

$$(4.45) \quad \begin{cases} R_{jk} = R_{jki}^i, \quad R_{\cdot k}^i = g^{ij} R_{jk}, \quad R = g^{jk} R_{jk}, \\ R_{jkh}^i = \left\{ \frac{i}{jk} \right\}_{\cdot h} - \left\{ \frac{i}{jh} \right\}_{\cdot k} + \left\{ \frac{a}{jk} \right\} \left\{ \frac{i}{ah} \right\} - \left\{ \frac{a}{jh} \right\} \left\{ \frac{i}{ak} \right\}. \end{cases}$$

En partant de ces composantes de la connexion, on peut former les tenseurs de courbure suivantes :

$$(4.46) \quad \Omega_{Bkh}^A = \Pi_{Bk, h}^A - \Pi_{Bh, k}^A + \Pi_{Bk}^C \Pi_{Ch}^A - \Pi_{Bh}^C \Pi_{Ck}^A,$$

c'est-à-dire

$$(4.47) \quad \begin{cases} \Omega_{jkh}^0 = -\frac{1}{n-3} C_{jkh}^i \frac{i}{\cdot}, \\ \Omega_{jkh}^i = C_{jkh}^i, \\ \Omega_{\infty kh}^i = g^{ij} \Omega_{jkh}^0, \end{cases}$$

les autres étant tous nuls, où

$$(4.48) \quad C_{jkh}^i = R_{jkh}^i - \frac{1}{n-2} (R_{jk} \delta_h^i - R_{jh} \delta_k^i + g_{jk} R_{\cdot h}^i - g_{jh} R_{\cdot k}^i) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{jk} \delta_h^i - g_{jh} \delta_k^i)$$

désigne le tenseur conforme de M. Weyl et / la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\left\{ \frac{i}{jk} \right\}$.

Cela dit, définissons un repère $[A_0, A_\alpha, A_n, A_\infty]$ sur l'hypersurface par les équations

$$(4.49) \quad \begin{cases} A_{\dot{0}} = A_0, \\ A_{\alpha} = B_{\alpha}^i A_i, \\ A_{\dot{n}} = B^0 A_0 + B^i A_i, \\ A_{\dot{\infty}} = \frac{1}{2} (B^0)^2 A_0 + B^0 B^i A_i + A_{\infty}. \end{cases}$$

La connexion induite sur l'hypersurface étant définie par

$$(4.50) \quad \begin{cases} \delta A_{\dot{0}} = dA_{\dot{0}} - (dA_{\dot{0}} A_{\dot{n}}) A_{\dot{n}} = du^{\alpha} A_{\alpha}, \\ \delta A_{\alpha} = dA_{\alpha} - (dA_{\alpha} A_{\dot{n}}) A_{\dot{n}} = H_{\alpha\beta}^{\dot{0}} du^{\beta} A_{\dot{0}} + H_{\alpha\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma} + H_{\alpha\beta}^{\infty} du^{\beta} A_{\infty}, \\ \delta A_{\dot{\infty}} = dA_{\dot{\infty}} - (dA_{\dot{\infty}} A_{\dot{n}}) A_{\dot{n}} = H_{\infty\beta}^{\gamma} du^{\beta} A_{\gamma}, \end{cases}$$

on peut définir les tenseurs de courbure de cette connexion induite par

$$(4.51) \quad Q_{Q\gamma\delta}^P = H_{Q\gamma,\delta}^P - H_{Q\delta,\gamma}^P + H_{Q\gamma}^R H_{R\delta}^P - H_{Q\delta}^R H_{R\gamma}^P,$$

soit par

$$(4.52) \quad \begin{cases} Q_{0\gamma\delta}^{\dot{0}} = H_{\gamma\delta}^{\dot{0}} - H_{\delta\gamma}^{\dot{0}}, \\ Q_{\beta\gamma\delta}^{\dot{0}} = H_{\beta\gamma,\delta}^{\dot{0}} - H_{\beta\delta,\gamma}^{\dot{0}} + H_{\beta\gamma}^{\varepsilon} H_{\varepsilon\delta}^{\dot{0}} - H_{\beta\delta}^{\varepsilon} H_{\varepsilon\gamma}^{\dot{0}}, \\ Q_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = H_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + H_{\beta\gamma}^{\dot{0}} \delta_{\delta}^{\alpha} - H_{\beta\delta}^{\dot{0}} \delta_{\gamma}^{\alpha} + g_{\beta\gamma} H_{\infty\delta}^{\alpha} - g_{\beta\delta} H_{\infty\gamma}^{\alpha}, \\ Q_{\infty\gamma\delta}^{\infty} = -Q_{0\gamma\delta}^{\dot{0}}, \\ Q_{\infty\gamma\delta}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} Q_{\beta\gamma\delta}^{\dot{0}}, \\ Q_{0\beta\gamma}^{\alpha} = Q_{\infty\gamma\delta}^{\dot{0}} = Q_{0\gamma\delta}^{\infty} = Q_{\beta\gamma\delta}^{\infty} = 0, \end{cases}$$

où

$$(4.53) \quad H_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = H_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} - H_{\beta\delta,\gamma}^{\alpha} + H_{\beta\gamma}^{\varepsilon} H_{\varepsilon\delta}^{\alpha} - H_{\beta\delta}^{\varepsilon} H_{\varepsilon\gamma}^{\alpha}.$$

Les relations entre H_{Bk}^A et H_{Qk}^P étant données par (3.64), (3.65), ... et (3.71), nous allons chercher les relations entre les tenseurs de courbure de l'espace ambiant et de l'hypersurface.

Le calcul étant tout à fait le même qu'auparavant, nous écrivons ici seulement les résultats :

$$(4.54) \quad Q_{0\gamma\delta}^{\dot{0}} = B_{\gamma}^{\cdot k} B_{\delta}^{\cdot h} Q_{0kh}^0,$$

$$(4.55) \quad \Omega_{\beta\gamma\delta}^0 = B_{\beta}^{\cdot j} B_{\gamma}^{\cdot k} B_{\delta}^{\cdot h} \Omega_{jkh}^0 - B^0 B_i B_{\beta}^{\cdot j} B_{\gamma}^{\cdot k} B_{\delta}^{\cdot h} \Omega_{jkh}^i \\ - M_{\beta\gamma} \left[\frac{1}{n-1} \frac{\partial g^{\varepsilon\rho} H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\delta}} + \Pi_{jk}^0 B^j B_{\delta}^{\cdot k} \right] \\ + M_{\beta\delta} \left[\frac{1}{n-1} \frac{\partial g^{\varepsilon\rho} H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\gamma}} + \Pi_{jk}^0 B^j B_{\gamma}^{\cdot k} \right],$$

$$(4.56) \quad \Omega_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = B_{\gamma}^{\alpha} B_{\beta}^{\cdot j} B_{\gamma}^{\cdot k} B_{\delta}^{\cdot h} \Omega_{jkh}^i + M_{\beta\gamma} M_{\delta}^{\alpha} - M_{\beta\delta} M_{\gamma}^{\alpha},$$

$$(4.57) \quad B_i B_{\beta}^{\cdot j} B_{\gamma}^{\cdot k} B_{\delta}^{\cdot h} \Omega_{jkh}^i - M_{\beta\gamma\delta} + M_{\beta\delta\gamma} = 0,$$

où

$$M_{\beta\gamma\delta} = M_{\beta\gamma||\delta} - g_{\beta\delta} \left[\frac{1}{n-1} \frac{\partial g^{\varepsilon\rho} H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\gamma}} + \Pi_{jk}^0 B^j B_{\gamma}^{\cdot k} \right],$$

|| désignant la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\{\frac{\alpha}{\beta\gamma}\}$ formés avec les $g_{\alpha\beta}$.

Le tenseur Ω_{0kh}^0 étant toujours nul, on voit que $\Omega_{0\gamma\delta}^0$ est identiquement nul, par conséquent, $\Pi_{\gamma\delta}^0$ est symétrique par rapport à γ et δ .

En contractant, dans (4.56), par rapport à α et δ , nous avons

$$(4.58) \quad \Omega_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha} = B_i^h B_{\beta}^{\cdot j} B_{\gamma}^{\cdot k} \Omega_{jkh}^i - M_{\beta\alpha} M_{\gamma}^{\alpha},$$

où

$$B_i^h = B_{\cdot i}^{\alpha} B_{\alpha}^{\cdot h}.$$

La connexion induite n'étant pas toujours normale, $\Omega_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha}$ ne s'annule pas en général. En multipliant (4.58) par $g^{\beta\gamma}$ et en sommant, on trouve

$$(4.59) \quad g^{\beta\gamma} \Omega_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha} = B_i^h B^{jk} \Omega_{jkh}^i - M_{\alpha}^{\beta} M_{\beta}^{\alpha},$$

où

$$B^{jk} = B_{\beta}^{\cdot j} B_{\gamma}^{\cdot k} g^{\beta\gamma}.$$

Or, le tenseur de courbure étant défini par

$$(4.60) \quad R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} + \Pi_{\beta\gamma}^0 \delta_{\delta}^{\alpha} - \Pi_{\beta\delta}^0 \delta_{\gamma}^{\alpha} + g_{\beta\gamma} \Pi_{\infty\delta}^{\alpha} - g_{\beta\delta} \Pi_{\infty\gamma}^{\alpha},$$

où

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta\gamma} \right\}_{,\delta} - \left\{ \frac{\alpha}{\beta\delta} \right\}_{,\gamma} + \left\{ \frac{\varepsilon}{\beta\gamma} \right\} \left\{ \frac{\alpha}{\varepsilon\delta} \right\} - \left\{ \frac{\varepsilon}{\beta\delta} \right\} \left\{ \frac{\alpha}{\varepsilon\gamma} \right\},$$

on en tire

$$(4.61) \quad R_{\beta\gamma\alpha}^{\alpha} = R_{\beta\gamma} + (n-3) \Pi_{\beta\gamma}^0 + g_{\beta\gamma} g^{\varepsilon\rho} \Pi_{\varepsilon\rho}^0,$$

et

$$(4.62) \quad g^{\beta\gamma} \mathcal{Q}_{\beta\gamma\alpha}^\alpha = g^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma} + 2(n-2)g^{\varepsilon\rho} H_{\varepsilon\rho}^0.$$

En substituant (4.62) dans (4.61), on obtient

$$\mathcal{Q}_{\beta\gamma\alpha}^\alpha - \frac{g_{\beta\gamma} g^{\varepsilon\rho} \mathcal{Q}_{\varepsilon\rho\alpha}^\alpha}{2(n-2)} = R_{\beta\gamma} - \frac{g_{\beta\gamma} g^{\varepsilon\rho} R_{\varepsilon\rho}}{2(n-2)} + (n-3)H_{\beta\gamma}^0,$$

d'où

$$(4.63) \quad \left[\frac{\mathcal{Q}_{\beta\gamma\alpha}^\alpha}{n-3} - \frac{g_{\beta\gamma} g^{\varepsilon\rho} \mathcal{Q}_{\varepsilon\rho\alpha}^\alpha}{2(n-2)(n-3)} \right] - \left[\frac{R_{\beta\gamma}}{n-3} - \frac{g_{\beta\gamma} g^{\varepsilon\rho} R_{\varepsilon\rho}}{2(n-2)(n-3)} \right] = H_{\beta\gamma}^0,$$

et par conséquent

$$(4.64) \quad \left[\frac{g^{\alpha\beta} \mathcal{Q}_{\beta\gamma\varepsilon}^\varepsilon}{n-3} - \frac{\delta_{\gamma\varepsilon} g^{\varepsilon\rho} \mathcal{Q}_{\varepsilon\rho\pi}^\pi}{2(n-2)(n-3)} \right] - \left[\frac{R_{\gamma\varepsilon}}{n-3} - \frac{\delta_{\gamma\varepsilon} g^{\varepsilon\rho} R_{\varepsilon\rho}}{2(n-2)(n-3)} \right] = H_{\gamma\varepsilon}^\alpha,$$

où

$$R_{\gamma\varepsilon}^\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\beta\gamma\varepsilon}.$$

En substituant (4.63) et (4.64) dans (4.60), on trouve finalement

$$(4.65) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}_{\beta\gamma\delta}^\alpha - \frac{1}{n-3} [\mathcal{Q}_{\beta\gamma\varepsilon}^\varepsilon \delta_\delta^\alpha - \mathcal{Q}_{\beta\delta\varepsilon}^\varepsilon \delta_\gamma^\alpha + g_{\beta\gamma} g^{\alpha\varepsilon} \mathcal{Q}_{\varepsilon\delta\rho}^\rho - g_{\beta\delta} g^{\alpha\varepsilon} \mathcal{Q}_{\varepsilon\gamma\rho}^\rho] \\ + \frac{g^{\varepsilon\rho} \mathcal{Q}_{\varepsilon\rho\pi}^\pi}{(n-2)(n-3)} (g_{\beta\gamma} \delta_\delta^\alpha - g_{\beta\delta} \delta_\gamma^\alpha) \\ = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha - \frac{1}{n-3} [R_{\beta\gamma} \delta_\delta^\alpha - R_{\beta\delta} \delta_\gamma^\alpha + g_{\beta\gamma} R_{\gamma\delta}^\alpha - g_{\beta\delta} R_{\gamma\gamma}^\alpha] \\ + \frac{g^{\varepsilon\rho} R_{\varepsilon\rho}}{(n-2)(n-3)} (g_{\beta\gamma} \delta_\delta^\alpha - g_{\beta\delta} \delta_\gamma^\alpha). \end{aligned}$$

Cela étant, désignons par C_{jkh}^i et $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ les tenseurs de courbure de Weyl de l'espace ambiant et de l'hypersurface respectivement. Alors, en substituant les équations (4.58) et (4.59) dans (4.65), on trouve

$$(4.66) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = C_{\beta\gamma\delta}^\alpha + \frac{1}{n-3} [B_i^h B_{\beta\gamma}^{jk} C_{jkh}^i \delta_\delta^\alpha - B_i^h B_{\beta\delta}^{jk} C_{jkh}^i \delta_\gamma^\alpha + \\ + g_{\beta\gamma} g^{\alpha\varepsilon} B_i^h B_{\varepsilon\delta}^{jk} C_{jkh}^i - g_{\beta\delta} g^{\alpha\varepsilon} B_i^h B_{\varepsilon\gamma}^{jk} C_{jkh}^i] \\ - \frac{B_i^h B_{\beta\gamma}^{jk} C_{jkh}^i}{(n-2)(n-3)} (g_{\beta\gamma} \delta_\delta^\alpha - \delta_{\beta\delta} \delta_\gamma^\alpha) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n-3}[M_{\beta\varepsilon}M_{\gamma}^{\varepsilon}\delta_{\delta}^{\alpha}-M_{\beta\varepsilon}M_{\delta}^{\varepsilon}\delta_{\gamma}^{\alpha}+g_{\beta\gamma}M_{\varepsilon}^{\alpha}M_{\delta}^{\varepsilon}-g_{\beta\delta}M_{\varepsilon}^{\alpha}M_{\gamma}^{\varepsilon}]$$

$$+\frac{M_{\beta}^{\varepsilon}M_{\varepsilon}^{\rho}}{(n-2)(n-3)}(g_{\beta\gamma}\delta_{\delta}^{\alpha}-g_{\beta\delta}\delta_{\gamma}^{\alpha}),$$

où

$$B_{\beta\gamma}^{jk}=B_{\beta}^{\cdot j}B_{\gamma}^{\cdot k}, \quad B^{jk}=B_{\beta}^{\cdot j}B_{\gamma}^{\cdot k}g^{\beta\gamma}.$$

Les équations (4.56) et (4.66) nous donnent finalement

$$(4.67) \quad C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}=B_{i\beta\gamma\delta}^{\alpha jkh}C_{jkh}^i-\frac{1}{n-3}[B_i^hB_{\beta\gamma}^{jk}C_{jkh}^i\delta_{\delta}^{\alpha}-B_i^hB_{\beta\delta}^{jk}C_{jkh}^i\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$+g_{\beta\gamma}g^{\alpha\varepsilon}B_i^hB_{\varepsilon\delta}^{jk}C_{jkh}^i-g_{\beta\delta}g^{\alpha\varepsilon}B_i^hB_{\varepsilon\gamma}^{jk}C_{jkh}^i]$$

$$+\frac{B_i^hB_{\beta\gamma}^{jk}C_{jkh}^i}{(n-2)(n-3)}(g_{\beta\gamma}\delta_{\delta}^{\alpha}-g_{\beta\delta}\delta_{\gamma}^{\alpha})$$

$$+M_{\beta\gamma}M_{\delta}^{\alpha}-M_{\beta\delta}M_{\gamma}^{\alpha}+\frac{1}{n-3}[M_{\beta\varepsilon}M_{\gamma}^{\varepsilon}\delta_{\delta}^{\alpha}-M_{\beta\varepsilon}M_{\delta}^{\varepsilon}\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$+g_{\beta\gamma}M_{\varepsilon}^{\alpha}M_{\delta}^{\varepsilon}-g_{\beta\delta}M_{\varepsilon}^{\alpha}M_{\gamma}^{\varepsilon}]$$

$$-\frac{M_{\beta}^{\varepsilon}M_{\varepsilon}^{\rho}}{(n-2)(n-3)}(g_{\beta\gamma}\delta_{\delta}^{\alpha}-g_{\beta\delta}\delta_{\gamma}^{\alpha}),$$

où

$$B_{i\beta\gamma\delta}^{\alpha jkh}=B_{\cdot i}^{\alpha}B_{\beta}^{\cdot j}B_{\gamma}^{\cdot k}B_{\delta}^{\cdot h}.$$

Ce sont les équations de Gauss pour une hypersurface dans un espace à connexion conforme normale. Ces équations ont été déjà obtenues pour le cas de l'espace de Riemann par un des présents auteurs.⁽¹⁾

Cela étant, passons à l'équation (4.57), ce qui peut être écrite aussi sous la forme

$$(4.68) \quad B^jB_{i\gamma\delta}^{\alpha kh}C_{jkh}^i=-M_{\gamma\delta}^{\alpha}+M_{\delta\gamma}^{\alpha}, \quad (B_{i\gamma\delta}^{\alpha kh}=B_{\cdot i}^{\alpha}B_{\gamma}^{\cdot k}B_{\delta}^{\cdot h}).$$

En contractant par rapport à α et γ , on trouve

$$(4.69) \quad M_{\alpha\delta}^{\alpha}=M_{\delta\alpha}^{\alpha}.$$

Donc les équations

$$(4.70) \quad M_{\beta\gamma\delta}=M_{\beta\gamma||\delta}-g_{\beta\delta}\left[\frac{1}{n-1}\frac{\partial g^{\varepsilon\rho}H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\gamma}}+H_{jk}^0B^jB_{\gamma}^{\cdot k}\right]$$

(1) K. Yano (3).

nous donnent

$$M^{\alpha}_{\cdot\alpha\delta} = -\left[\frac{1}{n-1}\frac{\partial g^{\varepsilon\rho}H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\delta}} + H^0_{jk}B^jB^{\cdot k}_{\delta}\right],$$

$$M^{\alpha}_{\cdot\delta\alpha} = M^{\alpha}_{\cdot\delta\parallel\alpha} - (n-1)\left[\frac{1}{n-1}\frac{\partial g^{\varepsilon\rho}H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\delta}} + H^0_{jk}B^jB^{\cdot k}_{\delta}\right],$$

d'où

$$\frac{1}{n-1}\frac{\partial g^{\varepsilon\rho}H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\delta}} + H^0_{jk}B^jB^{\cdot k}_{\delta} = \frac{1}{n-2}M^{\alpha}_{\cdot\delta\parallel\alpha}.$$

Donc l'équation (4.70) devient

$$(4.71) \quad M_{\beta\gamma\delta} = M_{\beta\gamma\parallel\delta} - \frac{1}{n-2}g_{\delta\delta}M^{\alpha}_{\cdot\gamma\parallel\alpha},$$

et les équations (4.68) nous donnent

$$(4.72) \quad B^jB^{\alpha}_{\cdot i}B^{kh}_{\gamma\delta}C^i_{jkh} = -M^{\alpha}_{\cdot\gamma\parallel\delta} + M^{\alpha}_{\cdot\delta\parallel\gamma} + \frac{1}{n-2}[M^{\alpha}_{\cdot\gamma\parallel\varepsilon}\delta^{\varepsilon}_{\delta} - M^{\alpha}_{\cdot\delta\parallel\varepsilon}\delta^{\varepsilon}_{\gamma}].$$

Ce sont les équations de Codazzi pour l'hypersurface dans un espace à connexion normale. Dans le cas de Riemann, elles ont été aussi obtenues par un des présents auteurs.⁽¹⁾

Chapitre 5. Propriétés des courbes sur les hypersurfaces.

Considérons une courbe $C: u^{\lambda}(\tau)$ sur l'hypersurface, et définissons un point S et une sphère S respectivement par les équations suivantes :

$$(5.1) \quad \underset{(0)}{S} = \underset{(0)}{\frac{d\tau}{d\sigma}} A_{\dot{0}},$$

$$(5.2) \quad \underset{(i)}{S} = \frac{\delta}{\delta\tau} \underset{(0)}{S} = \frac{d}{d\tau} \underset{(0)}{S} - \left(\frac{d}{d\tau} \underset{(0)}{S} A_{\dot{i}} \right) A_{\dot{i}},$$

où le paramètre σ a été choisi de manière qu'on ait

$$(5.3) \quad G_{\alpha\beta} \frac{du^{\alpha}}{d\sigma} \frac{du^{\beta}}{d\sigma} = 1$$

(1) K. Yano (4).

le long de la courbe. Si l'on a

$$(5.4) \quad \left(\frac{\delta}{\delta \tau} S \right)_{(i)}^2 = 0$$

le long de la courbe, on appelle τ le paramètre projectif⁽¹⁾ de la courbe considérée sur l'hypersurface.

Quand on regarde la courbe C comme étant une courbe dans l'espace ambiant, le paramètre projectif t est défini par les équations

$$(5.5) \quad S_{(0)} = \frac{dt}{ds} A_0,$$

$$(5.6) \quad S_{(1)} = \frac{d}{dt} S_{(0)},$$

$$(5.7) \quad \left(\frac{d}{dt} S \right)_{(1)}^2 = 0,$$

où le paramètre conforme s est défini par

$$G_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 1,$$

par conséquent, par

$$\frac{ds}{d\sigma} = a^{\frac{1}{n-1}}.$$

Grâce à la relation $A_n \frac{d}{dt} S_{(0)} = 0$, on a successivement

$$(5.8) \quad S_{(0)} = \frac{d\tau}{dt} S,$$

$$(5.9) \quad S_{(i)} = \frac{\frac{d^2 \tau}{dt^2}}{\frac{d\tau}{dt}} S_{(0)} + S_{(1)},$$

$$(5.10) \quad \frac{\delta}{\delta t} S_{(i)} = \left[\frac{\frac{d^3 \tau}{dt^3}}{\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2} - \frac{\left(\frac{d^2 \tau}{dt^2} \right)^2}{\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^3} \right] S_{(0)} + \frac{\frac{d^2 \tau}{dt^2}}{\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2} S_{(1)} + \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}} \left[\frac{d}{dt} S_{(1)} - \left(A_n \frac{d}{dt} S \right) A_n \right].$$

(1) K. Yano (2).

En substituant (5.10) dans (5.4) et en tenant compte des relations

$$S_{(0)}^2 = 0, \quad S_{(1)}^2 = 1, \quad \left(\frac{d}{dt} S_{(1)}\right)^2 = 0, \quad S_{(0)(1)} S = 0, \quad S_{(0)} \frac{d}{dt} S = -1, \quad S_{(1)} \frac{d}{dt} S = 0 \quad \text{et} \\ SA_n = SA_n = 0, \quad \text{on obtient}$$

$$\frac{\left(\frac{d^2\tau}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^4} - \frac{1}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2} \left(A_n \frac{d}{dt} S_{(1)}\right)^2 - \frac{2}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)} \left[\frac{\frac{d^3\tau}{dt^3}}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2} - \frac{\left(\frac{d^2\tau}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^3} \right] = 0,$$

d'où

$$(5.11) \quad \frac{\frac{d^3\tau}{dt^3}}{\frac{d\tau}{dt}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2\tau}{dt^2}}{\frac{d\tau}{dt}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(A_n \frac{d}{dt} S_{(1)} \right)^2 = 0.$$

On voit donc que si la courbe C sur l'hypersurface est en contact du second ordre avec la sphère A_n le long de la courbe, c'est-à-dire si l'on a $A_n \frac{d}{dt} S = 0$ le long de la courbe, les paramètres projectifs τ et t coïncident à une transformation homographique près.

Mais, on a, d'autre part,

$$A_n \frac{d}{dt} S = - \left(\frac{dA_n}{dt} \right)_{(1)} S = - \left(II_{n\alpha}^0 \frac{du^\alpha}{dt} A_0 + II_{n\alpha}^3 \frac{du^\alpha}{dt} A_\alpha \right) \\ \times \left(\frac{d^2t}{d\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} A_0 + \frac{du^\alpha}{d\sigma} A_\alpha \right) \\ = M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{d\sigma},$$

en tenant compte des relations

$$S_{(0)} = \frac{dt}{d\sigma} A_0, \quad S_{(1)} = \frac{d}{dt} S = \frac{d^2t}{d\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} A_0 + \frac{du^\alpha}{d\sigma} A_\alpha,$$

en conséquence, (5.11) devient

$$(5.12) \quad \{ \tau, t \} + \frac{1}{2} \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right)^2 = 0,$$

où nous avons posé

$$(5.13) \quad \left\{ \tau, t \right\} = \frac{\frac{d^3 \tau}{d\tau^3}}{\frac{d\tau}{dt}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 \tau}{d\tau^2}}{\frac{d\tau}{dt}} \right)^2.$$

Les équations $M_{\alpha\beta} = 0$ représentant le fait que notre hypersurface est totalement ombiliquée (Voir le Chapitre 8), nous avons le théorème :

Si une courbe est tracée sur une hypersurface totalement ombiliquée, le paramètre projectif t sur la courbe regardée comme celle dans l'espace ambiant et le paramètre projectif τ sur la courbe regardée comme celle sur l'hypersurface coïncident à une transformation homographique près.

Si l'on prend un paramètre projectif t , les sphères

$$(5.14) \quad S_{(0)} = \frac{dt}{ds} A_0, \quad S_{(1)} = \frac{d}{dt} S_{(0)}, \quad S_{(2)} = \frac{d}{dt} S_{(1)},$$

satisfont aux relations

$$(5.15) \quad \left\{ \begin{array}{lll} S_{(0)(0)} S = 0, & S_{(0)(1)} S = 0, & S_{(0)(2)} S = -1, \\ & S_{(1)(1)} S = 1, & S_{(1)(2)} S = 0, \\ & & S_{(2)(2)} S = 0. \end{array} \right.$$

Cela étant, les équations de Frenet s'écrivent

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} S_{(2)} = -\kappa_{(3)}^3 S_{(0)(3)}, \quad S_{(0)(3)} S_{(1)(3)} = \dots = S_{(2)(3)} S_{(3)(3)} = 0, \quad S_{(3)(3)} S = 1, \\ \frac{d}{dt} S_{(3)} = -\kappa_{(4)}^3 S_{(0)(4)} + \kappa_{(4)}^4 S_{(1)(4)}, \quad S_{(0)(4)} S_{(1)(4)} = \dots = S_{(3)(4)} S_{(4)(4)} = 0, \quad S_{(4)(4)} S = 1, \\ \frac{d}{dt} S_{(4)} = -\kappa_{(5)}^4 S_{(0)(5)} + \kappa_{(5)}^5 S_{(1)(5)}, \quad S_{(0)(5)} S_{(1)(5)} = \dots = S_{(4)(5)} S_{(5)(5)} = 0, \quad S_{(5)(5)} S = 1, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Quand on effectue une transformation homographique

$$(5.17) \quad t' = \frac{at + b}{ct + d},$$

du paramètre projectif t , les points et les sphères $S, S_{(0)}, S_{(1)}, \dots$ se changent respectivement en $S', S'_{(0)}, S'_{(1)}, \dots$. Nous allons, en passant, considérer les relations qui existent entre elles.

On a tout d'abord

$$(5.18) \quad S'_{(0)} = \frac{dt'}{dt} S_{(0)},$$

donc, en dérivant successivement, on obtient

$$(5.19) \quad S'_{(1)} = \frac{d^2 t'}{dt^2} \frac{dt}{dt'} S_{(0)} + S_{(1)},$$

$$(5.20) \quad S'_{(2)} = \left[\frac{d^3 t'}{dt^3} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 + \frac{d^2 t'}{dt^2} \frac{d^2 t}{dt'^2} \right] S_{(0)} + \frac{d^2 t'}{dt^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 S_{(1)} + \frac{dt}{dt'} S_{(2)},$$

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt'} S'_{(2)} = & \left[\frac{d^4 t'}{dt^4} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3 + 3 \frac{d^3 t'}{dt^3} \frac{d^2 t}{dt'^2} \frac{dt}{dt'} + \frac{d^2 t'}{dt^2} \frac{d^3 t}{dt'^3} \right] S_{(0)} \\ & + \left[2 \frac{d^3 t'}{dt^3} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3 + 3 \frac{d^2 t'}{dt^2} \frac{d^2 t}{dt'^2} \frac{dt}{dt'} \right] S_{(1)} \\ & + \left[\frac{d^2 t'}{dt^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3 + \frac{d^2 t}{dt'^2} \right] S_{(2)} + \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 \frac{d}{dt} S_{(2)}. \end{aligned}$$

Or, les relations

$$\begin{cases} \frac{d^4 t'}{dt^4} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3 + 3 \frac{d^3 t'}{dt^3} \frac{d^2 t}{dt'^2} \frac{dt}{dt'} + \frac{d^2 t'}{dt^2} \frac{d^3 t}{dt'^3} = 0, \\ 2 \frac{d^3 t'}{dt^3} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3 + 3 \frac{d^2 t'}{dt^2} \frac{d^2 t}{dt'^2} \frac{dt}{dt'} = 0, \\ \frac{d^2 t'}{dt^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3 + \frac{d^2 t}{dt'^2} = 0, \end{cases}$$

qui résultent du (5.17), nous donnent

$$(5.22) \quad \frac{d}{dt'} S'_{(2)} = \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 \frac{d}{dt} S_{(2)},$$

d'où

$$(5.23) \quad \kappa' = \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 \kappa,$$

en raison des relations

$$\left(\frac{d}{dt'} S_{(2)} \right)^2 = \kappa'^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d}{dt} S_{(2)} \right)^2 = \kappa^2.$$

Donc on voit que

$$(5.24) \quad S' = S.$$

Cela étant, les équations de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S &= -\kappa S + \kappa S, \\ \frac{d}{dt'} S' &= -\kappa' S' + \kappa' S', \end{aligned}$$

montrent que

$$(5.25) \quad \kappa' = \frac{dt}{dt'} \kappa \quad \text{et} \quad S' = S.$$

En utilisant la relation (5.23), on peut définir une quantité invariante par rapport à la transformation homographique (5.17) de paramètre projectif.

On obtient de (5.23)

$$(5.26) \quad \frac{d\kappa'}{dt'} = 2 \frac{d^2 t}{dt'^2} \frac{dt}{dt'} \kappa + \frac{d\kappa}{dt} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^3$$

$$(5.27) \quad \frac{d^2 \kappa'}{dt'^2} = 2 \left[\frac{d^3 t}{dt'^3} \frac{dt}{dt'} + \left(\frac{d^2 t}{dt'^2} \right)^2 \right] \kappa + 5 \frac{d^2 t}{dt'^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 \frac{d\kappa}{dt} + \frac{d^2 \kappa}{dt^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^4$$

d'où

$$(5.28) \quad \frac{d^2 \kappa'}{dt'^2} = 5 \left(\frac{d^2 t}{dt'^2} \right)^2 \kappa + 5 \frac{d^2 t}{dt'^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^2 \frac{d\kappa}{dt} + \frac{d^2 \kappa}{dt^2} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^4$$

grâce à l'équation

$$\frac{d^3 t}{dt'^3} \frac{dt}{dt'} = \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 t}{dt'^2} \right)^2.$$

Donc, nous avons

$$\frac{1}{(\kappa')^2} \frac{d^2 \kappa'}{dt'^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{(\kappa')^3} \left(\frac{d\kappa'}{dt'} \right)^2 = \frac{1}{(\kappa)^2} \frac{d^2 \kappa}{dt^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{(\kappa)^3} \left(\frac{d\kappa}{dt} \right)^2,$$

par conséquent, on voit que la quantité

$$(5.29) \quad \frac{1}{(\kappa)^2} \frac{d^2 \kappa}{dt^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{(\kappa)^3} \left(\frac{d\kappa}{dt} \right)^2$$

est invariante par rapport à la transformation homographique de paramètre projectif t .

Cela dit, nous allons, dans la suite, chercher la relation entre les points et les sphères $S S \dots$ sur l'hypersurface et $S S \dots$ dans l'espace ambiant. On a (0), (1),

$$(5.30) \quad S_{(0)} = \frac{d\tau}{dt} S_{(0)},$$

$$(5.31) \quad S_{(1)} = \frac{d^2\tau}{dt^2} \frac{dt}{d\tau} S_{(0)} + S_{(1)},$$

$$(5.32) \quad S_{(2)} = \left[\frac{d^3\tau}{dt^3} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2\tau}{dt^2} \frac{d^2t}{d\tau^2} \right] S_{(0)} + \frac{d^3\tau}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 S_{(1)} + \left[S_{(2)} - (A_{(2)} S) A_{(2)} \right] \frac{dt}{d\tau},$$

d'où l'on tire encore

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\tau} S_{(2)} &= \frac{d}{d\tau} \left[\frac{d^3\tau}{dt^3} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2\tau}{dt^2} \frac{d^2t}{d\tau^2} \right] S_{(0)} \\ &\quad + \left[\frac{d^3\tau}{dt^3} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^3 + 3 \frac{d^2\tau}{dt^2} \frac{d^2t}{d\tau^2} \frac{dt}{d\tau} + \frac{d^3\tau}{dt^3} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^3 \right] S_{(1)} \\ &\quad + \left[S_{(2)} - (A_{(2)} S) A_{(2)} \right] \left[\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{d^2\tau}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^3 \right] \\ &\quad + \left[\frac{d}{dt} S_{(2)} - \left(A_{(2)} \frac{d}{dt} S \right) A_{(2)} - (A_{(2)} S) \frac{dA_{(2)}}{dt} \right] \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \end{aligned}$$

Or comme nous avons les identités

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{dt^2}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^3 = 0,$$

$$\{\tau, t\} + \{t, \tau\} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 0,$$

on tire de (5.33)

$$(5.34) \quad \begin{aligned} -\frac{3}{\kappa} S_{(3)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d}{dt} \left[M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right] S_{(0)} \\ &\quad - \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{d\tau} \right)^2 S_{(1)} \\ &\quad + \left[-\frac{3}{\kappa} S_{(3)} - (A_{(2)} S) \frac{dA_{(2)}}{dt} + \frac{3}{\kappa} (A_{(2)} S) A_{(2)} \right] \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2, \end{aligned}$$

ce qui peut être encore écrite sous la forme :

$$(5.35) \quad -\dot{\kappa} S_{(3)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d}{dt} (A_{(2)} S_{(0)})^2 S_{(1)} - (A_{(2)} S_{(2)})^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 S_{(1)} \\ + \left[-\kappa_{(3)} S_{(3)} + \kappa_{(3)} (A_{(3)} S_{(3)}) A_{(3)} - (A_{(2)} S_{(2)}) \frac{dA_{(3)}}{dt} \right] \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2.$$

Ces équations nous donnent

$$(5.36) \quad (\dot{\kappa})^2 = \left[(\kappa_{(3)}^2 - (\kappa_{(3)}^2) (A_{(3)} S_{(3)})^2 + 2\kappa_{(3)} (A_{(3)} S_{(3)}) \left(\frac{dA_{(3)}}{dt} S_{(3)} \right) \right. \\ \left. + (A_{(2)} S_{(2)})^2 \frac{dA_{(3)}}{dt} \frac{dA_{(3)}}{dt} - (A_{(2)} S_{(2)})^4 \right] \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^4.$$

Donc en posant

$$(5.37) \quad K^2 = (\kappa_{(3)}^2 - (\kappa_{(3)}^2) (A_{(3)} S_{(3)})^2 + 2\kappa_{(3)} (A_{(3)} S_{(3)}) \left(\frac{dA_{(3)}}{dt} S_{(3)} \right) \\ + (A_{(2)} S_{(2)})^2 \frac{dA_{(3)}}{dt} \frac{dA_{(3)}}{dt} - (A_{(2)} S_{(2)})^4$$

on obtient

$$(5.38) \quad \frac{1}{(\kappa_{(3)}^2)^2} \frac{d^2 \kappa_{(3)}}{d\tau^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{(\kappa_{(3)}^3)} \left(\frac{d\kappa_{(3)}}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{K^2} \frac{d^2 K}{dt^2} - \frac{5}{4} \frac{1}{K^3} \left(\frac{dK}{dt} \right)^2 + \frac{(A_{(2)} S_{(2)})^2}{K},$$

et

$$(5.39) \quad S_{(3)} = \left\{ \frac{\kappa_{(3)}}{K} S_{(3)} + \frac{(A_{(3)} S_{(3)})}{K} \frac{dA_{(3)}}{dt} - \frac{\kappa_{(3)}}{K} (A_{(3)} S_{(3)}) A_{(3)} \right\} \\ + \frac{1}{K} \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 S_{(1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{K} \frac{d}{dt} \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right)^2 S_{(0)}.$$

Chpitre 6. Circonférences généralisées sur les hypersurfaces.

La circonférence généralisée⁽¹⁾ sur l'hypersurface peut être définie comme une courbe sur l'hypersurface pour laquelle nous avons $\dot{\kappa} = 0$. Donc, pour une telle courbe nous avons de (5.35)

(1) K. Yano. (1).

$$(6.1) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_n S)_{(2)}^2 S - (A_n S)_{(2)}^2 S_{(1)} - {}^3\kappa S + {}^3\kappa (A_n S)_{(3)} A_n - (A_n S)_{(2)} \frac{dA_n}{dt} = 0.$$

Cela étant, on a, d'autre part,

$$S_{(0)} = \frac{dt}{ds} A_0,$$

$$S_{(1)} = \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}} A_0 + \frac{dA_0}{ds},$$

$$S_{(2)} = \left[\frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} - \frac{\left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^3} \right] A_0 + \frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \frac{dA_0}{ds} + \frac{1}{\frac{dt}{ds}} \frac{d^2 A_0}{ds^2},$$

$$\begin{aligned} -{}^3\kappa S_{(3)} = & \left[\frac{\frac{d^4 t}{ds^4}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^3} - \frac{4 \frac{d^3 t}{ds^3} \frac{d^2 t}{ds^2}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^4} + 3 \frac{\left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)^3}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^5} \right] A_0 \\ & + \left[2 \frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^3} - \frac{3 \left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)^2}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^4} \right] \frac{dA_0}{ds} + \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \frac{d^3 A_0}{ds^3}, \end{aligned}$$

d'où, en utilisant la notation

$$\{t, s\} = \frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\frac{dt}{ds}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}} \right)^2$$

on obtient

$$(6.2) \quad -{}^3\kappa S_{(3)} = \frac{\frac{d}{ds} \{t, s\}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} A_0 + \frac{2 \{t, s\}}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \frac{dA_0}{ds} + \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \frac{d^3 A_0}{ds^3}.$$

Par conséquent, en substituant les relations

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{ds} &= \frac{du^i}{ds} A_i, \\ \frac{d^2 A_0}{ds^2} &= \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} A_0 + \left(\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) A_i + A_\infty, \\ \frac{d^3 A_0}{ds^3} &= \left[\frac{d}{ds} \left(\Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) + \Pi_{jk}^0 \alpha^j \frac{du^k}{ds} \right] A_0 \\ &\quad + \left(\frac{d\alpha^i}{ds} + \Pi_{jk}^i \alpha^j \frac{du^k}{ds} + \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} + \Pi_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right) A_i, \\ \{t, s\} &= \frac{1}{2} G_{jk} \alpha^j \alpha^k - \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds},\end{aligned}$$

où

$$\alpha^i = \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi_{jk}^i \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds},$$

dans (6.2), on trouve

$$\begin{aligned}(6.3) \quad -\kappa_{(3)}^3 S &= \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \left[\frac{1}{2} (G_{jk} \alpha^j \alpha^k) + \Pi_{jk}^0 \alpha^j \frac{du^k}{ds} \right] A_0 \\ &\quad + \frac{1}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \left[\frac{d\alpha^i}{ds} + \Pi_{jk}^i \alpha^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk} \alpha^j \alpha^k - \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} \right. \\ &\quad \left. + \Pi_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right] A_i.\end{aligned}$$

Les équations (6.1) et (6.3) nous donnent

$$\begin{aligned}(6.4) \quad &\left[\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (G_{jk} \alpha^j \alpha^k) + \Pi_{jk}^0 \alpha^j \frac{du^k}{ds} \right] A_0 \\ &+ \left[\frac{d\alpha^i}{ds} + \Pi_{jk}^i \alpha^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk} \alpha^j \alpha^k - \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} \right. \\ &\quad \left. + \Pi_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right] [A_i - (A_i A_n) A_n]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \frac{dA_i}{ds} - \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \left(\frac{d^2t}{ds^2} A_0 + \frac{du^i}{ds} A_i \right) \\
& - \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right) \frac{d\sigma}{ds} \frac{d}{ds} \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) \frac{dt}{ds} A_0 = 0 .
\end{aligned}$$

D' autre part, $\frac{dA_i}{ds}$ étant donné par

$$\begin{aligned}
(6.5) \quad \frac{dA_i}{ds} &= \left(\frac{dN^0}{ds} + H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} \right) A_0 + \left(\frac{dN^i}{ds} + H_{jk}^i N^j \frac{du^k}{ds} + N^0 \frac{du^i}{ds} \right) A_i \\
&= \left(\frac{dN^0}{ds} + H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} \right) A_0 - B_{\alpha}{}^i M_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{ds} A_i ,
\end{aligned}$$

où

$$N^0 = \frac{a^{-\frac{2}{n-1}}}{n-1} G^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} ,$$

(6.4) devient

$$\begin{aligned}
(6.6) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (G_{jk} a^j a^k) + H_{jk}^0 a^j \frac{du^k}{ds} - M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \left(\frac{dN^0}{ds} + H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} \right) \\
- \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right) \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^3 \frac{d}{d\sigma} \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right) \\
- \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right)^2 \frac{d^2\sigma}{ds^2} \frac{d\sigma}{ds} \\
- N^0 N_i \left(\frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} + H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right) = 0 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6.7) \quad \frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk} a^j a^k - H_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} + H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \\
- N^i N_j \left(\frac{da^j}{ds} + H_{kh}^j a^k \frac{du^h}{ds} + H_{\infty h}^j \frac{du^h}{ds} \right) \\
+ M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 B_{\alpha}{}^i M_{\beta\gamma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \\
- \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \frac{du^i}{ds} = 0 .
\end{aligned}$$

Comme on peut, par un calcul direct, vérifier que l'équation (6.6) est une conséquence des équations (6.7), les équations (6.7) sont les équations différentielles de circonférences généralisées sur l'hypersurface.

Si l'on peut mener, dans une direction arbitrairement donnée, une circonférence généralisée de l'espace ambiant sur l'hypersurface, on a de (6.7)

$$N_j \left(\frac{da^j}{ds} + H_{kh}^j a^k \frac{du^h}{ds} + H_{\infty h}^j \frac{du^h}{ds} \right) = 0 ,$$

$$M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 B_{\tau}^i M_{\tau\delta} \frac{du^\delta}{ds} - \left(M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \right) \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \frac{du^i}{ds} = 0 ,$$

d'où

$$M_{\alpha\beta} = 0 .$$

Donc, notre hypersurface doit être totalement ombiliquée.

Les équations (6.7) peuvent être écrites aussi sous la forme

$$(6.8) \quad B_{\cdot i}^{\alpha} \left[\frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk} a^j a^k - H_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} + H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right] + \\ + a^{-\frac{2}{n-1}} M_{\tau\delta} \frac{du^\tau}{d\sigma} \frac{du^\delta}{d\sigma} \left(M_{\cdot\beta}^{\alpha} \frac{du^\beta}{d\sigma} - M_{\tau\delta} \frac{du^\tau}{d\sigma} \frac{du^\delta}{d\sigma} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \right) = 0 .$$

Quand on regarde cette courbe comme étant une courbe sur l'hypersurface à connexion conforme induite, on a les équations différentielles

$$(6.9) \quad \frac{da^\alpha}{d\sigma} + H_{\beta\tau}^{\alpha} a^\beta \frac{du^\tau}{d\sigma} + \left(G_{\beta\tau} a^\beta a^\tau - H_{\beta\tau}^0 \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\tau}{d\sigma} \right) \frac{du^\alpha}{d\sigma} + H_{\infty\tau}^{\alpha} \frac{du^\tau}{d\sigma} = 0 ,$$

où

$$a^\alpha = \frac{d^2 u^\alpha}{d\sigma^2} + H_{\beta\tau}^{\alpha} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\tau}{d\sigma} ,$$

ceci peut être facilement vérifié en employant les relations⁽¹⁾

$$(6.10) \quad \frac{du^\alpha}{d\sigma} = B_{\cdot i}^{\alpha} \frac{du^i}{ds} ,$$

$$(6.11) \quad a^\alpha = a^{\frac{1}{n-1}} B_{\cdot i}^{\alpha} a^i - \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{du^\beta} G^{\alpha\beta} + \frac{d \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{d\sigma} \frac{du^\alpha}{d\sigma} ,$$

(1) Y. Mutô. (2).

$$\begin{aligned}
 (6.12) \quad & \frac{da^\alpha}{d\sigma} + \Pi_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta \frac{du^\gamma}{d\sigma} + \left(G_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta a^\gamma - \Pi_{\beta\gamma}^0 \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right) \frac{du^\alpha}{d\sigma} + \Pi_{\infty\gamma}^\alpha \frac{du^\gamma}{d\sigma} \\
 & = a^{\frac{2}{n-1}} B_{\alpha i}^\alpha \left[\frac{da^i}{ds} + \Pi_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} \right. \\
 & \quad \left. + \left(G_{jk}^\alpha a^j a^k - \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} + \Pi_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right] \\
 & \quad + \left(M_{\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{d\sigma} - M_{\gamma\delta}^\alpha \frac{du^\gamma}{d\sigma} \frac{du^\delta}{d\sigma} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \right) M_{\varepsilon\kappa}^\alpha \frac{du^\varepsilon}{d\sigma} \frac{du^\kappa}{d\sigma}
 \end{aligned}$$

Les équations (6.11) et (6.12) nous donnent encore

$$\begin{aligned}
 (6.13) \quad & a^i = a^{-\frac{1}{n-1}} B_{\alpha i}^\alpha a^\alpha + a^{-\frac{1}{n-1}} G_{\alpha\beta}^\alpha B_{\alpha i}^\alpha \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta} \\
 & \quad + a^{-\frac{2}{n-1}} N_{\alpha\beta}^\alpha \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} N^i - a^{-\frac{1}{n-1}} \frac{d \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{d\sigma} \frac{du^i}{ds}, \\
 (6.14) \quad & \frac{d}{ds} a^i + \Pi_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk}^\alpha a^j a^k - \Pi_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} + \Pi_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \\
 & = a^{-\frac{2}{n-1}} B_{\alpha i}^\alpha \left[\frac{d}{d\sigma} a^\alpha + \Pi_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right. \\
 & \quad \left. + \left(G_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta a^\gamma - \Pi_{\beta\gamma}^0 \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right) \frac{du^\alpha}{d\sigma} + \Pi_{\infty\gamma}^\alpha \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right. \\
 & \quad \left. - \left(M_{\beta}^\alpha \frac{du^\beta}{d\sigma} - M_{\gamma\delta}^\alpha \frac{du^\gamma}{d\sigma} \frac{du^\delta}{d\sigma} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \right) M_{\varepsilon\kappa}^\alpha \frac{du^\varepsilon}{d\sigma} \frac{du^\kappa}{d\sigma} \right] \\
 & \quad + \left[a^{-\frac{3}{n-1}} \frac{d \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{d\sigma} N_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right. \\
 & \quad \left. + a^{-\frac{3}{n-1}} \left(N_{\beta\gamma, \delta}^\alpha - \Pi_{\beta\delta}^\alpha N_{\varepsilon\gamma}^\alpha - \Pi_{\gamma\delta}^\alpha N_{\beta\varepsilon}^\alpha \right) \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \frac{du^\delta}{d\sigma} \right. \\
 & \quad \left. + 3 a^{-\frac{3}{n-1}} N_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\sigma} a^\gamma + a^{-\frac{3}{n-1}} \frac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta} G^{\beta\gamma} N_{\gamma\delta}^\alpha \frac{du^\delta}{d\sigma} \right. \\
 & \quad \left. + \Pi_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} \right] N^i.
 \end{aligned}$$

Chapitre 7. Les courbes autoconcourantes.

En considérant une congruence Γ des sphères A tangentes à une surface donnée dans un espace conforme, M. Haimovici⁽¹⁾ a défini la direction concourante le long de la courbe sur l'hypersurface et la courbe autoconcourante c'est-à-dire une courbe dont la tangente est concourante le long de la courbe elle-même.

La circonférence généralisée sur l'hypersurface que nous avons traitée dans le Chapitre précédent est une sorte de courbe autoconcourante, seulement, nous avons pris les sphères A_n comme celles qui forment une congruence des sphères. Ceci est d'ailleurs évident d'après le fait que nous pouvons aussi définir⁽²⁾ la circonférence généralisée comme une courbe dont le développement est une circonférence ordinaire et la correspondance entre A_n et $A_n + dA_n$ que nous avons établie dans le Chapitre 3 est une rotation conforme. Nous pouvons choisir, de bien des manières, les sphères A autre que A_n formant une telle congruence. Nous prenons, par exemple, les sphères tangentes à l'hypersurface et étant en contact du second ordre avec une courbe sur l'hypersurface, et cherchons les équations différentielles de la courbe autoconcourante. Une telle courbe peut être définie de la manière suivante :

Considérons une courbe sur notre hypersurface S et désignons par A_0 le point courant sur cette courbe. Soit $A(\sigma)$ la sphère qui est tangente à S en un point A_0 de la courbe $u^\alpha(\sigma)$ et qui est en contact du second ordre avec cette courbe, et soit $k(\sigma)$ une circonférence sur A qui est en contact du second ordre avec la courbe. En désignant par u le paramètre sur la circonférence k , si l'on peut choisir les points $P(u)$ sur k de telle manière que les trajectoires des $P(u)$ se coupent toujours orthogonalement avec la sphère A , on appelle cette courbe *courbe autoconcourante spéciale*.

La sphère A étant tangente à l'hypersurface, nous avons

$$(7.1) \quad A = \alpha A_0 + A_n.$$

Le fait que A est en contact du second ordre avec la courbe s'exprime par

$$(7.2) \quad (\alpha A_0 + A_n) \frac{d^2 A_0}{ds^2} = 0.$$

(1) A. Haimovici (1) (2). (2) K. Yano (1) Y. Mutô (1).

d'où

$$(7.3) \quad \alpha = A_n \frac{d^2 A_0}{ds^2} = - \frac{dA_n}{ds} \frac{dA_0}{ds},$$

ce qui nous donne

$$(7.4) \quad \alpha = a^{-\frac{1}{n-1}} M_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma}.$$

La circonférence k peut être exprimée par

$$(7.5) \quad P = A_0 + \frac{dA_0}{ds} u + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A_0}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 A_0}{ds^2} \frac{d^2 A_0}{ds^2} \right) A_0 \right) u^2, \quad P \cdot P = 0,$$

u étant un paramètre sur la circonférence.

En substituant les équations

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{ds} &= \frac{du^i}{ds} A_i, \\ \frac{d^2 A_0}{ds^2} &= H_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} A_0 + a^i A_i + A_\infty, \end{aligned}$$

dans (7.5), on obtient

$$(7.6) \quad P = \left(1 + \frac{1}{4} G_{jk} a^j a^k u^2 \right) A_0 + \left(\frac{du^i}{ds} u + \frac{1}{2} a^i u^2 \right) A_i + \frac{1}{2} u^2 A_\infty.$$

Cela étant, la condition pour que notre courbe soit autoconcourante peut être exprimée par

$$(7.7) \quad \frac{dP}{ds} = \lambda P + \mu A,$$

λ et μ étant convenablement choisis. Donc, en dérivant (7.6) le long de la courbe, on trouve

$$\begin{aligned} (7.8) \quad & \left[\frac{1}{4} \frac{d}{ds} (G_{jk} a^j a^k) u^2 + \frac{1}{2} G_{jk} a^j a^k u \frac{du}{ds} + H_{jk}^0 \left(\frac{du^j}{ds} u + \frac{1}{2} a^j u^2 \right) \frac{du^k}{ds} \right] A_0 \\ & + \left[\left(1 + \frac{1}{4} G_{jk} a^j a^k u^2 \right) \frac{du^i}{ds} + a^i u + \frac{1}{2} \left(\frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} \right) u^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{du^i}{ds} \frac{du}{ds} + a^i u \frac{du}{ds} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} u^2 \right] A_i + \left(1 + \frac{du}{ds} \right) u A_\infty = \lambda P + \mu (A_n + \alpha A_0). \end{aligned}$$

En comparant d'abord les coefficients de A_∞ , on trouve

$$(7.9) \quad \frac{du}{ds} = -1 + \frac{1}{2} \lambda \cdot u.$$

En multipliant ensuite $(\alpha + N^0)A_n + A_\infty$ à (7.8), on obtient

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{d}{ds} (G_{jk} \alpha^j \alpha^k) u^2 - \frac{1}{2} G_{jk} \alpha^j \alpha^k u \frac{du}{ds} - H_{jk}^0 \left(\frac{du^j}{ds} u + \frac{1}{2} \alpha^j u^2 \right) \frac{du^k}{ds} \\ & + \left\{ N_i \alpha^i u + \frac{1}{2} N_i \left(\frac{d\alpha^i}{ds} + H_{jk}^i \alpha^j \frac{du^k}{ds} \right) u^2 + N_i \alpha^i u \frac{du}{ds} + \frac{1}{2} H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} u^2 \right\} (\alpha + N^0) \\ & - (\alpha + N^0) N^0 \left(\frac{du}{ds} u + u \right) = \lambda \left\{ -1 - \frac{1}{4} G_{jk} \alpha^j \alpha^k u^2 + \frac{1}{2} N_i \alpha^i u^2 (\alpha + N^0) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} u^2 (\alpha + N^0) N^0 \right\}. \end{aligned}$$

En substituant (7.9) dans cette équation, on a

$$\begin{aligned} (7.10) \quad \lambda = & \frac{1}{4} \frac{d}{ds} (G_{jk} \alpha^j \alpha^k) u^2 - \frac{1}{2} G_{jk} \alpha^j \alpha^k u \frac{du}{ds} + H_{jk}^0 \left(\frac{du^j}{ds} u + \frac{1}{2} \alpha^j u^2 \right) \frac{du^k}{ds} \\ & - \frac{1}{2} N_i \left(\frac{d\alpha^i}{ds} + H_{jk}^i \alpha^j \frac{du^k}{ds} \right) u^2 (\alpha + N^0) - \frac{1}{2} H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} u^2 (\alpha + N^0). \end{aligned}$$

Multiplions cette fois (7.8) par $\{A_j - (A_n A_j) A_n\} G^{ij}$, alors, on obtiendra

$$\begin{aligned} (7.11) \quad & \left[\left\{ 1 + \frac{1}{4} (G_{jk} \alpha^j \alpha^k) u^2 \right\} \frac{du^i}{ds} + \alpha^i u + \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha^i}{ds} + H_{jk}^i \alpha^j \frac{du^k}{ds} \right) u^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{du^i}{ds} \frac{du}{ds} + \alpha^i u \frac{du}{ds} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} u^2 \right] - N^i \left[N_j \alpha^j u + \frac{1}{2} N_j \left(\frac{d\alpha^j}{ds} + H_{kh}^j \alpha^k \frac{du^h}{ds} \right) u^2 \right. \\ & \quad \left. + N_j \alpha^j u \frac{du}{ds} + \frac{1}{2} H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} u^2 \right] \\ & + N^i N^0 u \left(1 + \frac{du}{ds} \right) \\ & = \lambda \left[\frac{du^i}{ds} u + \frac{1}{2} \alpha^i u^2 - \frac{1}{2} N^i N_j \alpha^j u^2 + \frac{1}{2} N^0 N^i u^2 \right]. \end{aligned}$$

Les valeurs de $\frac{du}{ds}$ et de λ étant substituées, (7.11) deviennent

$$\begin{aligned}
 (7.12) \quad & \frac{1}{4} G_{jk} a^j a^k \frac{du^i}{ds} u^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} \right) u^2 + \frac{1}{2} H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} u^2 \\
 & - N^i \left\{ \frac{1}{2} N_j \left(\frac{da^j}{ds} + H_{kh}^j a^k \frac{du^h}{ds} \right) u^2 + \frac{1}{2} H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} u^2 \right\} \\
 & = \frac{1}{2} \frac{du^i}{ds} u \left\{ \frac{1}{4} \frac{d}{ds} (G_{jk} a^j a^k) u^2 - \frac{1}{2} G_{jk} a^j a^k u + H_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} u \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} H_{jk}^0 a^j \frac{du^k}{ds} u^2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} N_j \left(\frac{da^j}{ds} + H_{kh}^j a^k \frac{du^h}{ds} \right) u^2 (a + N^0) - \frac{1}{2} H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} u^2 (a + N^0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Ces équations doivent être satisfaites par n'importe quelle valeur de u , donc on tire de (7.12)

$$\begin{aligned}
 (7.13) \quad & \frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk} a^j a^k - H_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} + H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \\
 & - N^i \left\{ N_j \left(\frac{da^j}{ds} + H_{kh}^j a^k \frac{du^h}{ds} \right) + H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (7.14) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (G_{jk} a^j a^k) + H_{jk}^0 a^j \frac{du^k}{ds} - N_j \left(\frac{da^j}{ds} + H_{kh}^j a^k \frac{du^h}{ds} \right) (a + N^0) \\
 & - H_{jk}^0 N^j \frac{du^k}{ds} (a + N^0) = 0
 \end{aligned}$$

Mais l'équation (7.14) peut être déduite de (7.13) grâce à la relation $a + N^0 = N_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}$, donc les équations (7.13) sont les équations différentielles de la courbe autoconcourante.

Les équations (7.13) peuvent être écrites aussi sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
 (7.15) \quad & B^{\alpha}_i \left[\frac{da^i}{ds} + H_{jk}^i a^j \frac{du^k}{ds} + \left(G_{jk} a^j a^k - H_{jk}^0 \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} \right. \\
 & \left. + H_{\infty k}^i \frac{du^k}{ds} \right] = 0,
 \end{aligned}$$

et on voit bien ici que la circonférence généralisée de l'espace ambiant est une courbe autoconcourante si elle se trouve sur l'hypersurface. Si l'on écrit (7.13) avec les grandeurs de l'hypersurface, on obtient

$$(7.16) \quad \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{d^2 u^\alpha}{d\sigma^2} + H_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right) + H_{\delta\epsilon}^\alpha \left(\frac{d^2 u^\beta}{d\sigma^2} + H_{\zeta\eta}^\beta \frac{du^\zeta}{d\sigma} \frac{du^\eta}{d\sigma} \right) \frac{du^\epsilon}{d\sigma} \\ + \left\{ G_{\beta\gamma}^\alpha \left(\frac{d^2 u^\beta}{d\sigma^2} + H_{\delta\epsilon}^\beta \frac{du^\delta}{d\sigma} \frac{du^\epsilon}{d\sigma} \right) \left(\frac{d^2 u^\gamma}{d\sigma^2} + H_{\zeta\eta}^\gamma \frac{du^\zeta}{d\sigma} \frac{du^\eta}{d\sigma} \right) \right. \\ \left. - H_{\beta\gamma}^{\delta\epsilon} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\gamma}{d\sigma} \right\} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \\ + H_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\beta}{d\sigma} - M_{\gamma\delta}^\alpha \frac{du^\gamma}{d\sigma} \frac{du^\delta}{d\sigma} \left(M_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{d\sigma} - M_{\gamma\kappa}^\alpha \frac{du^\kappa}{d\sigma} \frac{du^\beta}{d\sigma} \frac{du^\alpha}{d\sigma} \right) = 0.$$

Chapitre 8. Les propriétés des ombilics et les hypersurfaces totalement ombiliquées.

Un point sur l'hypersurface où l'équation

$$M_{\alpha\beta} = 0$$

est satisfaite s'appelle ombilic de l'hypersurface. Ceci est une propriété invariante par rapport à la transformation conforme. Or, nous avons, en un ombilic,

$$dA_0 \cdot dA_n = 0,$$

par suite

$$(d^2 A_0) A_n = 0,$$

donc, la sphère A_n est en contact du second ordre avec l'hypersurface.

Pour les ombilics de l'hypersurface, nous avons une suite de théorèmes.

On peut, pour la démonstration, consulter un Mémoire de Y. Mutô (2) qui traite la théorie des sous-espaces dans un espace à connexion conforme.

Théorème : Si toutes les courbes sur l'hypersurface passant par un point fixe et étant en contact du troisième ordre avec les circonférences généralisées de l'espace ambiant peuvent être en contact du troisième ordre avec une circonférence généralisée sur l'hypersurface, ce point est un ombilic.

Ceci s'ensuit immédiatement de (6.14).

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les courbes autoconcourantes spéciales passant par un point fixe soient en contact du troisième ordre avec les circonférences généralisées de l'hypersurface est que ce point soit un ombilic.

Ceci se prouve facilement en raison de (7.16).

Une hypersurface dont tous les points sont ombilics s'appelle une hypersurface totalement ombiliquée. Pour les hypersurfaces totalement ombiliquées, nous avons les théorèmes suivants :

Théorème : Sur une hypersurface totalement ombiliquée, deux paramètres projectifs d'une courbe sur l'hypersurface l'un et l'autre étant définis en regardant la courbe comme étant celle de l'espace ambiant et comme étant celle sur l'hypersurface respectivement coïncident.

Théorème : Sur une hypersurface totalement ombiliquée, la circonférence généralisée et la courbe autoconcourante spéciale coïncident, inversement si ces deux courbes coïncident toujours, cette hypersurface doit être totalement ombiliquée.

Théorème : S'il existe toujours une hypersurface totalement ombiliquée passant par un point fixe et étant orthogonale à n'importe quelle direction, le tenseur conforme de courbure de M. Weyl s'annule en ce point.⁽¹⁾

Bibliographie

E. Cartan	(1) Les espaces à connexion conforme. Annales de la Soc. Polonaise de Math. Tome 2 (1923) 171—221.
P. C. Delens	(1) Méthodes et problèmes en géométries différentielles euclidienne et conforme. Thèse, Paris, (1927).
A. Haimovici	(1) Directions concourantes le long d'une courbe sur une surface d'un espace conforme. C. R. Roumanie. Tome 1 (1937) 296—301.
(2) Directions concourantes et directions parallèles sur une variété d'un espace conforme. Thèse, Jassy, (1938).
Y. Mutô.	(1) On the generalized circles in the conformally connected manifold. Proc. Imp. Acad. Tokyo. Vol. 15 (1939) 23—26.
(2) On some properties of hypersurfaces in a conformally connected manifold. Proc. Physico-Math. Soc. Japan. Vol. 21 (1939) 615—625.
S. Sasaki	(1) On the theory of surfaces in a curved conformal space. Science Report of the Tôhoku Imp. Univ. Series I. Vol. 28 (1940) 261—285.
J. A. Schouten	(1) Über die konforme Abbildung n -dimensionaler Mannigfaltigkeit mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung. Math. Zeitschr. Band. 2 (1921) 58—88.
K. Yano	(1) Sur les circonférences généralisées dans les espaces à connexion conforme. Proc. Imp. Acad. Tokyo. Vol. 14 (1938) 329—332.
(2) Sur la théorie des espaces à connexion conforme. Journal of the Faculty of Science Imperial Univ. of Tokyo. Section 1. Vol. 4. Part. 1. (1939) 1—59.
(3) Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Proc. Imp. Acad. Tokyo. Vol. 15 (1939) 247—252.
(4) Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. ibidem. Vol. 15 (1939) 340—344.

(1) J. A. Schouten (1), K. Yano (4).