23. Teilweise Geordnete Algebra.⁽¹⁾

Von

Hidegorô NAKANO.

(Eingegangen am 14. Oktober, 1940.)

H. Freudenthal hat schon eine Spektraltheorie im teilweise geordneten Modul gebildet.⁽²⁾ Unabhängig von Freudenthal, hat S. W. P. Steen die Spektraltheorie im teilweise geordneten Ring behandelt, welche eine Abstraktion der Spektraltheorie im Hilbertschen Raum ist.⁽³⁾ Diese Abhandlung ist die zwei Theorien von Freudenthal und Steen in einziger zusammenzufassen. Neuerdings hat B. Vulich Relationen zwischen den zwei Theorien von Freudenthal und Steen erörtert, indem er das Produkt zweier Elemente im teilweise geordneten Modul definiert.⁽⁴⁾ Die Resultate von Vulich werden auch in unserer Theorie enthalten.

Diese Abhandlung besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil erörtern wir Projektionen und Spektraltheorie in einem teilweise geordneten Modul. In §1 sind die Definition des teilweise geordneten Moduls und elementare algebraische Relationen unter seinen Elementen angegeben. In §2 definieren wir Limesbegriff konstruktiv, und daraus sind einige, im folgenden benutzte Sätze hergeleitet. In §3 ist Projektion allgemeiner als Freudenthal definiert: Zwei Elemente a, b nennen wir zueinander orthogonal, wenn $|a| \wedge |b| = 0$ ist. Dann kann man jedes Element x für ein Element p in Gestalt $x = h + k$ schreiben, wobei k zu p orthogonal, und h zu jedem, zu p orthogonalen, Element orthogonal ist. h heisst die Projektion von x auf p , und man bezeichnet h mit $[p]x$. Projektionen sind offenbar lineare Operatoren im teilweise geordneten Modul. Daher nennen wir $[p]$ einen Projektor. Projektoren haben die gleichen Eigenschaften wie Projektionsoperatoren im Hilbertschen Raum. In §4 ist Integralbegriff wie im gewöhnlichen Falle gegeben. Eine Schar von beschränkter Variation von Elementen a_λ definiert man wie Funktionen von beschränkter Variation. Für eine Schar von beschränkter Variation a_λ und eine

(1) Der Inhalt dieser Abhandlung ist schon in Proc. Imp. Acad. Tokyo, Vol. XVI, 1940, S. 437-441 skizziert.

(2) H. Freudenthal, "Teilweise geordnete Moduln." Proc. Akad. Amsterdam, 39, 1936, S. 641-651.

(3) S. W. P. Steen, "An Introduction to the Theory of Operators (I)". Proc. London Math. Soc. (2) 41, 1936, S. 361-392.

(4) B. Vulich, "Une Définition du Produit dans les Espaces semiordonnés linéaires." C. R., U.R.S.S., No. 9, XXVI, 1940, S. 850-844.

stetige Funktion $\varphi(\lambda)$ kann man das Integral $\int_a^b \varphi(\lambda) d\lambda$ wie Stieltjessches Integral definieren. Durch dieses Integral wird die Spektraltheorie in §5 behandelt. Ein Element e heisst ein Teil des Elementes p , wenn e zu $p-e$ orthogonal ist. Eine Schar e_λ von Teilen eines Elementes p heisst eine Zerlegung des Elementes p , wenn $|e_\lambda| \geq |e_\mu|$ ($\lambda > \mu$), $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e_\lambda = p$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e_\lambda = 0$, und $\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} e_\lambda = e_\mu$ gilt. Für je zwei a, p erhält man durch

$$e_\lambda = [(\lambda p_+ - [p_+]a)_+ + (\lambda p_- + [p_-]a)_+]p$$

eine Zerlegung des Elementes p , wobei man für beliebiges x die Bezeichnung $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x)_+$ benutzt. Für diese Zerlegung des Elementes p gilt

$$[p]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda.$$

Im zweiten Teil behandeln wir Dilatatoren, welche mit jedem Projektor vertauschbare lineare Operatoren im teilweise geordneten Modul $\mathfrak{M}$ sind. In §6 erörtern wir die Spektraldarstellung eines Dilatators durch Projektoren. Die Dilatatoren, deren Definitionsbereich aus dem ganzen Modul $\mathfrak{M}$ besteht, heissen regulär. Da alle Dilatatoren nicht regulär sein kann, kann man nicht die Summe und das Produkt zweier Dilatatoren durch die Summe und das Produkt von linearen Operatoren definieren. Wir definieren die Summe in §7 und das Produkt in §8. Dann ist die Menge aller Dilatatoren ein teilweise geordneter, Abelscher Ring, und dieser Ring ist eine Erweiterung von $\mathfrak{M}$, d.h. $\mathfrak{M}$ ist isomorph mit einer Teilmenge aller Dilatatoren. In §9 zeigt man zuerst, dass der abstrakt definierte, teilweise geordnete Ring mit der Menge aller regulären Dilatatoren isomorph ist. Daher kann man die Spektraltheorie des teilweise geordneten Rings aus der von Dilatatoren herleiten.

Im dritten Teil definieren wir den komplexen Ring, dessen Element durch $a + ib$ für $a, b \in \mathfrak{M}$ gegeben ist. In §10 definieren wir Limesbegriff und Projektoren im komplexen Ring wie im teilweise geordneten Ring, und erörtern die gleichen Eigenschaften. In §11 definieren wir auch Dilatatoren als lineare Operatoren, welche mit jedem Projektion vertauschbar sind. Dann kann man den Dilatator in Gestalt $R + iS$ ausdrücken, wobei R, S Dilatatoren im teilweise geordneten Ring sind. Hieraus erhält man die Spektraldarstellung eines Dilatators wie die von normalen Operatoren im Hilbertschen Raum. In §12 geben wir verschiedene Limitis an: D-Limes, B-Limes, und gleichmässiger Limes. Im Abelschen, die Identität enthaltenden, Ring beschränkter Operatoren im

Hilbertschen Raum stimmen der B-Limes und der gleichmässige Limes bzw. mit dem starken und gleichmässigen Limes überein. Man kann den Satz beweisen, welcher dem Ergodensatz im Hilbertschen Raum entspricht.

Um diese Abhandlung durchzulesen, braucht man keine andere Literatur zu vergleichen.

Inhaltsverzeichnis.

I Teilweise geordnete Moduln.	
§ 1	Grundlegende Formeln 427
§ 2	Limesbegriff 431
§ 3	Projektoren 436
§ 4	Stieltjessche Integrale 445
§ 5	Spektralдарstellung 447
II Teilweise geordnete Ringe.	
§ 6	Dilatatoren 456
§ 7	Summe der Dilatatoren 462
§ 8	Produkt der Dilatatoren 470
§ 9	Teilweise geordnete Ringe 477
III Komplexe Ringe.	
§ 10	Komplexe Ringe 486
§ 11	Dilatatoren 492
§ 12	Verschiedene Konvergenzen 504

I. Teilweise Geordnete Moduln

§ 1. Grundlegende Formeln Unter teilweise geordneten Moduln verstehen wir wie H. Freudenthal:⁽⁵⁾

Definition 1.1 Ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf den Körper der reellen Zahlen heisst ein *teilweise geordneter Modul*, falls die folgenden Relationen unter Elementen von $\mathfrak{M}$ bestehen:

1) $\mathfrak{M}$ ist teilweise geordnet: Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$, und $a \not> a$. Daher folgt $a = b$ aus $a \leq b$ und $a \geq b$.

2) Für je zwei Elemente a, b gibt es ein Element c , so dass $c \leq a$, und $c \leq b$, und für jedes x , $c \leq a$ und $c \leq b$, stets $c \leq x$ ist. Solches c bezeichnet man mit $a \wedge b$.

3) Aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$.

4) Aus $a > 0$ folgt $aa > 0$ für jede Zahl $a > 0$.

5) Für jede absteigende Folge positiver Elemente, $a_1 \geq a_2 \geq \dots$,

(5) a.a. 0. 2).

gibt es ein Element c , so dass $c \leq a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und für jedes x , $\leq a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$), stets $c \geq x$ ist. Solches c bezeichnen wir mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$.

Da nach 3) $a > b$ mit $-a < -b$ gleichbedeutend ist, kann man leicht einsehen, dass man aus 2) erhält:

2') Für je zwei Elemente a, b gibt es ein Element c , so dass $c \geq a$ und $c \geq b$, und für jedes x , $\geq a$ und $\geq b$, stets $x \geq c$ ist. Solches c bezeichnet man mit $a \cup b$.

Aus Definition 1.1 folgt sofort

$$\begin{aligned} \text{Satz 1.1} \quad & (-a) \cap (-b) = -(a \cup b) \\ & (-a) \cup (-b) = -(a \cap b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 1.2} \quad & \text{Für } a \geq b \text{ ist } a \cup b = a, \quad a \cap b = b, \\ & a \cup c \geq b \cup c, \quad a \cap c \geq b \cap c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 1.3} \quad & \text{Für jede Zahl } a > 0 \text{ ist} \\ & a(a \cap b) = (aa) \cap (ab) = (ab) \cap (aa) \\ & a(a \cup b) = (aa) \cup (ab) = (ab) \cup (aa). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 1.4} \quad & (a \cap b) + x = (a + x) \cap (b + x) \\ & (a \cup b) + x = (a + x) \cup (b + x). \end{aligned}$$

Aus diesem Satz folgt sofort

$$\begin{aligned} \text{Satz 1.5} \quad & (a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_\nu) + (b_1 \cup b_2 \cup \dots \cup b_\mu) = (a_1 + b_1) \cup (a_2 + b_1) \cup \dots \cup (a_\nu + b_\mu) \\ & (a_1 \cap a_2 \cap \dots \cap a_\nu) + (b_1 \cap b_2 \cap \dots \cap b_\mu) = (a_1 + b_1) \cap (a_2 + b_1) \cap \dots \cap (a_\nu + b_\mu). \end{aligned}$$

$$\text{Satz 1.6} \quad (a \cap b) + (a \cup b) = a + b.$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis} \quad a + b - (a \cup b) &= a + b + \{(-a) \cap (-b)\} \quad (\text{Satz 1.1}) \\ &= b \cap a \quad (\text{Satz 1.4}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 1.7} \quad & (a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c) \\ & (a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis} \quad & \{(a \cup b) \cap c\} - \{(a \cap c) \cup (b \cap c)\} \\ &= \{(a + b - (a \cap b)) \cap c\} - \{(a \cap c) + (b \cap c) - (a \cap b \cap c)\} \quad (\text{Satz 1.6}) \\ &= \{(a + b) \cap (c + (a \cap b))\} - (a \cap b) + (a \cap b \cap c) - \{(b \cap c) + (a \cap c)\} \\ &= \{(a + b) \cap (c + a) \cap (c + b)\} + (a \cap b \cap c) - \{(a \cap b) + (a \cap c) + (b \cap c)\} = 0, \end{aligned}$$

denn es ist nach Satz 1.5

$$\begin{aligned} (a \wedge b) + (b \wedge c) + (c \wedge a) \\ &= (2a + b) \wedge (2a + c) \wedge (2b + a) \wedge (2b + a) \wedge (2c + a) \wedge (2c + b) \wedge (a + b + c) \\ &= \{(a + b) \wedge (c + a) \wedge (c + b)\} + (a \wedge b \wedge c). \end{aligned}$$

Satz 1.8 $a \wedge (-a) \leq 0, \quad a \vee (-a) \geq 0.$

Beweis

$$\begin{aligned} a \wedge (-a) &= \{(2a) \wedge 0\} - a = 2(a \wedge 0) - a \leq 2(a \wedge 0) - (a \wedge 0) = a \wedge 0 \leq 0. \\ a \vee (-a) &= -\{(-a) \wedge a\} \geq 0. \end{aligned}$$

Satz 1.9 Für $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} (a + b) \wedge c &\leq (a \wedge c) + (b \wedge c) \\ (a + b) \vee c &\leq (a \vee c) + (b \vee c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis} \quad (a + b) \wedge c &\leq (a + b) \wedge (a + c) \wedge (b + c) \wedge 2c = (a \wedge c) + (b \wedge c) \\ (a + b) \vee c &\leq (a + b) \vee (a + c) \vee (b + c) \vee 2c = (a \vee c) + (b \vee c). \end{aligned}$$

Satz 1.10 Wenn $b \wedge c = 0$ ist, so gilt

$$(a + b) \wedge c = a \wedge c$$

für $a \geq 0$.

$$\text{Beweis} \quad (a + b) \wedge c \leq (a \wedge c) + (b \wedge c) = a \wedge c,$$

und andererseits

$$(a + b) \wedge c \geq a \wedge c,$$

da $b \geq 0$ sein soll.

Satz 1.11 Aus $a \wedge c = 0$ und $b \wedge c = 0$ folgt

$$(a + b) \wedge c = 0.$$

Beweis Da $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ sein soll, folgt dieser Satz aus Satz 1.10.

Satz 1.12 Aus $a \wedge b = 0$ folgt für jede Zahl $\alpha > 0$

$$(\alpha a) \wedge b = a \wedge (\alpha b) = 0.$$

$$\text{Beweis} \quad 0 \leq (\alpha a) \wedge b = (\alpha + 1) \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} a \wedge \frac{1}{\alpha + 1} b \right) \leq (\alpha + 1)(a \wedge b) = 0.$$

Definition 1.2 $a_+ = a \cup 0$ heisst der *positive Teil* von a , und $a_- = (-a)_+$ heisst der *negative Teil* von a .

Satz 1.13 $a = a_+ - a_-$, $a_+ \cap a_- = 0$.

Beweis Da $a_- = (-a)_+ = (-a) \cup 0 = -(a \cap 0)$ sein soll, so folgt die erste Gleichung sofort aus Satz 1.6. Da nach Satz 1.7 und 1.8

$$a_+ \cap a_- = (a \cup 0) \cap ((-a) \cup 0) = (a \cap (-a)) \cup 0 = 0$$

besteht, so gilt die andere.

Satz 1.14 Wenn $a = b - c$ und $b \cap c = 0$ ist, so muss $b = a_+$, $c = a_-$ sein.

Beweis Setzt man $b = a_+ + a_0$, so ist

$$c = b - a = a_- + a_0.$$

Da $b \cap c = (a_+ + a_0) \cap (a_- + a_0) = (a_+ \cap a_-) + a_0 = a_0$

ist, muss $a_0 = 0$ sein, damit der Satz bewiesen ist.

Satz 1.15 Aus $a \leq b$ folgt

$$a_+ \leq b_+, \quad a_- \geq b_-.$$

Beweis $a_+ = a \cup 0 \leq b \cup 0 = b_+$

$$a_- = (-a)_+ \geq (-b)_+ = b_-.$$

Definition 1.3 Unter dem *absoluten Betrag* eines Elementes a verstehen wir das Element $|a| = a_+ + a_-$.

Daher ist $|a| \geq 0$, und $|a| = 0$ ist mit $a = 0$ gleichbedeutend.

Satz 1.16 $|aa| = |a| |a|$

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Wenn $|a| \cap |b| = 0$ ist, so gilt

$$|a+b| = |a| + |b|.$$

Beweis Falls $a \geq 0$, gilt

$$(aa)_+ = (aa) \cup 0 = a(a \cup 0) = aa_+$$

$$(aa)_- = (-aa)_+ = a(-a)_+ = aa_- ,$$

und falls $\alpha < 0$, gilt

$$(\alpha\alpha)_+ = (-|\alpha|a)_+ = |\alpha|(-a)_+ = |\alpha|a_-$$

$$(\alpha\alpha)_- = (|\alpha|a)_- = |\alpha|a_+.$$

Demnach erhält man

$$|\alpha\alpha| = |\alpha||\alpha|.$$

Aus $a+b = (a_++b_+)-(a_-+b_-)$ folgt nach Satz 1.15

$$(a+b)_+ \leq a_++b_+, \quad (a+b)_- \leq a_-+b_-.$$

Demnach gilt

$$|a+b| = (a+b)_+ + (a+b)_- \leq |a| + |b|.$$

Wenn $|a| \wedge |b| = 0$ ist, so gilt

$$a_+ \wedge b_- = 0, \quad a_- \wedge b_+ = 0.$$

Nach Satz 1.11 erhält man daher

$$(a_++b_+) \wedge (a_-+b_-) = 0.$$

Hieraus ergibt sich nach Satz 1.14

$$(a+b)_+ = a_++b_+, \quad (a+b)_- = a_-+b_-,$$

und folglich $|a+b| = |a| + |b|$.

Satz 1.17 Wenn zugleich $a \leq b$ und $-a \leq b$ ist, so gilt $|a| \leq b$.

Beweis Da nach Satz 1.8 und 1.15 $b \geq 0$ und zugleich $a_+ \leq b$, $a_- \leq b$ gilt, erhält man wegen $a_+ \wedge a_- = 0$

$$|a| = a_+ + a_- = a_+ \vee a_- \leq b.$$

§ 2. Limesbegriff Für jede absteigende Folge positiver Elemente, $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, ist der Grenzwert $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v$ nach Definition 1.1 eindeutig gegeben. Jetzt wollen wir den Limesbegriff auf andere Folgen verallgemeinern.

Satz 2.1. Für je zwei absteigende Folge positiver Elemente, $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots$, gilt

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (a_v + b_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} a_v + \lim_{v \rightarrow \infty} b_v.$$

Beweis Aus

$$a_v + b_v \geq \lim_{v \rightarrow \infty} a_v + \lim_{v \rightarrow \infty} b_v$$

folgt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu + b_\nu) \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu + \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu + b_\nu) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu + \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu$$

wegen $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu + b_\nu) \leq a_\nu + b_\mu$ für beliebige ν, μ .

Satz 2.2 Aus $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a \geq 0$ folgt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a a_\nu) = a a$ für jede Zahl $a > 0$.

Beweis. Da der Limes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a a_\nu)$ vorhanden ist, setzt man $a_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a a_\nu) \geq a a$. Dann gilt $a a_\nu \geq a_0$, d.h. $a_\nu \geq \frac{1}{a} a_0$. Daher erhält man $\frac{1}{a} a_0 \leq a$, nämlich $a_0 = a a$.

Definition 2.1 Gegeben sei eine Folge $a_1, a_2, \dots$. Wenn für ein c und für irgendeine, nach 0 zustrebende, absteigende Folge: $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$,

$$|a_\nu - c| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist, so heisst die Folge $a_1, a_2, \dots$ konvergent, und c der Limes von $a_1, a_2, \dots$. Dies drückt man mit $c = \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$ aus.

Hierbei braucht man zu zeigen, dass solches c eindeutig bestimmt ist. Wenn für zwei Elemente c, c' und zwei Folgen

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad l'_1 \geq l'_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} l'_\nu = 0,$$

$$|a_\nu - c| \leq l_\nu, \quad |a_\nu - c'| \leq l'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist, so gilt

$$|c - c'| \leq |a_\nu - c| + |a_\nu - c'| \leq l_\nu + l'_\nu.$$

Folglich $|c - c'| = 0$, d.h. $c = c'$.

Im Falle $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, stimmt dieser neue Limes offenbar mit dem früheren.

Satz 2.3 Aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = b$ folgt für Zahlen α, β

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu) = \alpha a + \beta b.$$

Beweis Wenn für die Folgen,

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad l'_1 \geq l'_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} l'_\nu = 0,$$

$$|a_\nu - a| \leq l_\nu, \quad |b_\nu - b| \leq l'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

besteht, so gilt auch

$$|(a\alpha_\nu + \beta b_\nu) - (a\alpha + \beta b)| \leq |\alpha| l_\nu + |\beta| l'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

und nach Satz 2.1 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (|\alpha| l_\nu + |\beta| l'_\nu) = 0$.

Satz 2.4 Gegeben sei $a_1 \leq a_2 \leq \dots$. Wenn diese Folge nach oben beschränkt: $a_\nu \leq l$ ($\nu=1, 2, \dots$), so gibt es ein c , so dass $a_\nu \leq c$ ($\nu=1, 2, \dots$) und für jedes x , $\geq a_\nu$ ($\nu=1, 2, \dots$), stets $c \leq x$ ist. Solches c stimmt mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$ überein.

Beweis Wegen $l - a_1 \geq l - a_2 \geq \dots$ und $l - a_\nu \geq 0$ ($\nu=1, 2, \dots$), ist der Limes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (l - a_\nu)$ vorhanden. Setzt man $c = l - \lim_{\nu \rightarrow \infty} (l - a_\nu)$, so gilt für $x \geq a_\nu$ stets $x \geq c$, und nach Satz 2.3 $c = \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$.

Satz 2.5 Für jede konvergente Folge reeller Zahlen: $a_1, a_2, \dots$, $a_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$, gilt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu a = a_0 a$.

Beweis Wegen $|a_\nu a - a_0 a| = |a_\nu - a_0| |a|$, braucht man nur zu zeigen, dass $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} |a| = 0$. Da dieser Limes vorhanden ist, setzt man $b = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} |a|$. Dann ist $b \geq 0$ und $|a| \geq \nu b$. Daher ist der Limes $l = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu b$ vorhanden, und nach Satz 2.3

$$l + b = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu b + b = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\nu + 1)b = l.$$

Demnach gilt $b = 0$.

$$\text{Satz 2.6} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu \cup b_\nu) = (\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu) \cup (\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu \cap b_\nu) = (\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu) \cap (\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu).$$

Beweis Wenn für die Folgen,

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad l'_1 \geq l'_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} l'_\nu = 0,$$

$$|a_\nu - a| \leq l_\nu, \quad |b_\nu - b| \leq l'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

besteht, so gilt wegen $-l_\nu \leq a_\nu - a \leq l_\nu$, $-l'_\nu \leq b_\nu - b \leq l'_\nu$

$$\begin{aligned} (a_\nu \cap b_\nu) - (a \cap b) &\leq \{(a + l_\nu) \cap (b + l'_\nu)\} - (a \cap b) \\ &\leq \{(a + l_\nu - l'_\nu) \cap (b + l_\nu + l'_\nu)\} - (a \cap b) \\ &= \{(a \cap b) + l_\nu + l'_\nu\} - (a \cap b) \\ &= l_\nu + l'_\nu, \end{aligned}$$

ähnlich

$$(a \cap b) - (a_\nu \cap b_\nu) \leq l_\nu + l'_\nu.$$

Demnach erhält man nach Satz 1.17

$$|(a_\nu \cap b_\nu) - (a \cap b)| \leq l_\nu + l'_\nu,$$

folglich $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu \cap b_\nu) = a \cap b$, und weiterhin

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu \cup b_\nu) = - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{(-a_\nu) \cap (-b_\nu)\} = -\{(-a) \cap (-b)\} = a \cup b.$$

Satz 2.7 Aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ folgt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu a_\nu = aa$$

für jede konvergenten Zahlen a_ν : $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$.

Beweis Nach Satz 2.1 und 2.5 folgt der Satz aus

$$|a_\nu a_\nu - aa| \leq |a_\nu| |a_\nu - a| + |a_\nu - a| |a|,$$

da $|a_\nu|$ ($\nu = 1, 2, \dots$) beschränkt ist.

Satz 2.8 Aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ folgt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |a_\nu| = |a|$.

Beweis Es ist klar wegen $||a_\nu| - |a|| \leq |a_\nu - a|$.

Satz 2.9 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu)_+ = a_+, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu)_- = a_-.$$

Beweis Es folgt sofort aus $a_+ = \frac{1}{2}(a + |a|)$, $a_- = \frac{1}{2}(|a| - a)$.

Satz 2.10 Für a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) sei $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu, \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu$ vorhanden. Wenn $a_\nu \geq b_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ist, so gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu \geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu.$$

Beweis Es genügt nur zu beweisen: wenn $a_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ vorhanden ist, so gilt $a \geq 0$. Sei für

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0,$$

$$|a_\nu - a| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

so gilt $l_\nu \geq a_\nu - a \geq -a$. Daher ist $0 \geq -a$, d.h. $a \geq 0$.

Definition 2.2 Wenn der Limes $\lim_{v \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_v) = a$ vorhanden ist, so heisst wie üblich die Reihe $a_1 + a_2 + \dots$ *konvergent*, und a ihre Summe. Man schreibt dann

$$a = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \quad \text{oder} \quad a = a_1 + a_2 + \dots$$

Aus Definition folgt sofort

Satz 2.11 Wenn $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$, $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ beide konvergent, so ist $\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha a_v + \beta b_v)$ für Zahlen α, β auch konvergent und

$$\sum_{v=1}^{\infty} (\alpha a_v + \beta b_v) = \alpha \sum_{v=1}^{\infty} a_v + \beta \sum_{v=1}^{\infty} b_v.$$

Satz 2.12 Wenn $a_v \geq 0$ und $a_1 + \dots + a_v$ beschränkt, $a_1 + a_2 + \dots + a_v \leq l$, ist, so ist die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent, und $\sum_{v=1}^{\infty} a_v \leq l$.

Satz 2.13 Wenn $0 \leq a_v \leq b_v$ und $\sum_{v=1}^{\infty} b_v$ konvergent ist, so ist auch $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent, und $\sum_{v=1}^{\infty} a_v \leq \sum_{v=1}^{\infty} b_v$.

Satz 2.14 Wenn $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|$ konvergent ist, so ist auch $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ konvergent. In diesem Falle heisst $\sum_{v=1}^{\infty} a_v$ absolut konvergent.

Beweis Wegen $(a_v)_+ \leq |a_v|$, $(a_v)_- \leq |a_v|$, sind $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v)_+$, $\sum_{v=1}^{\infty} (a_v)_-$ nach Satz 2.13 beide konvergent. Daher ist $\sum_{v=1}^{\infty} a_v = \sum_{v=1}^{\infty} [(a_v)_+ - (a_v)_-]$ nach Satz 2.11 konvergent.

Zuletzt wollen wir den, dem Cauchyschen Konvergenzsatz entsprechenden Satz beweisen.

Satz 2.15 Gegeben sei eine Folge von Elementen $x_1, x_2, \dots$. Wenn für eine Folge positiver Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, mit $\lim_{v \rightarrow \infty} l_v = 0$, stets

$$|x_\mu - x_\lambda| \leq l_\nu \quad (\mu, \lambda \geq \nu, \nu = 1, 2, \dots)$$

gilt, so konvergiert die Folge $x_1, x_2, \dots$.

Beweis Da nach Voraussetzung

$$-l_\nu + x_\nu \leq x_\mu \leq l_\nu + x_\nu \quad (\mu \geq \nu, \nu = 1, 2, \dots)$$

sein soll, existiert nach Satz 2.4 der Limes

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (x_\lambda \cup x_{\lambda+1} \cup \dots \cup x_{\lambda+\alpha}) \right\},$$

und offenbar gilt

$$|x_\nu - \overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu| \leq 2l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Daher erhält man

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = \overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu.$$

§3. **Projektoren** Nunmehr wollen wir Projektionen in $\mathfrak{M}$ wie im Hilbertschen Raume definieren.⁽⁶⁾

Definition 3.1 Zwei Elemente a, b heissen *zueinander orthogonal*, wenn $|a| \wedge |b| = 0$ ist.

Es sei ein Element p . Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}_p$ die Menge aller k , die zu p orthogonal sind, so gilt für je zwei k_1, k_2 in $\mathfrak{R}_p$ nach Satz 1.11

$$0 \leq |k_1 + k_2| \wedge |p| \leq (|k_1| + |k_2|) \wedge |p| = 0,$$

folglich $k_1 + k_2 \in \mathfrak{R}_p$, und für jede Zahl α und $k \in \mathfrak{R}_p$ gilt nach Satz 1.12

$$|\alpha k| \wedge |p| = (|\alpha| |k|) \wedge |p| = 0,$$

folglich $\alpha k \in \mathfrak{R}_p$. Daher ist $\mathfrak{R}_p$ auch ein Modul.

Wenn man mit $\mathfrak{S}_p$ die Menge aller Elemente h bezeichnet, die zu allen $k \in \mathfrak{R}_p$ orthogonal sind, so kann man wie oben auch beweisen, dass $\mathfrak{S}_p$ auch ein Modul ist.

Weiterhin gilt offenbar

Satz 3.1 Aus $k \in \mathfrak{R}_p$ und $|x| \leq |k|$ folgt $x \in \mathfrak{R}_p$, und aus $h \in \mathfrak{S}_p$ und $|x| \leq |h|$ folgt $x \in \mathfrak{S}_p$.

Satz 3.2 Dafür, dass ein Element x zu $\mathfrak{S}_p$ gehört, ist notwendig und hinreichend, dass $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{|x| \wedge (\nu |p|)\} = |x|$ gilt.

Beweis x sei ein Element in $\mathfrak{S}_p$. Setzt man $x_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{|x| \wedge (\nu |p|)\}$, so gilt nach Satz 2.4 $|x| \geq x_0$. Da nach Satz 2.6

$$\begin{aligned} |x| \wedge (|p| + x_0) &= |x| \wedge (|p| + \lim_{\nu \rightarrow \infty} (|x| \wedge (\nu |p|))) \\ &= |x| \wedge \left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{(|x| + |p|) \wedge ((\nu + 1)|p|)\} \right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (|x| \wedge (|x| + |p|) \wedge (\nu |p|)) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (|x| \wedge (\nu |p|)) = x_0 \end{aligned}$$

(6) Vgl. J. von Neumann, "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren." Math. Ann. 102, 1930, S. 370-427, oder M. H. Stone "Linear Transformations in Hilbert Space." New York, 1932.

gilt, so erhält man

$$(|x| - x_0) \cap |p| = |x| \cap (|p| + x_0) - x_0 = 0.$$

Daher muss $|x| \cap (|x| - x_0) = 0$ sein. Da $|x| \cap (|x| - x_0) = |x| - x_0$ sein soll, so ist $|x| = x_0$.

Umgekehrt, wenn $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{|x| \cap (\nu|p|)\} = |x|$ ist, so gilt für jedes $k \in \mathfrak{R}_p$

$$|x| \cap k = \left\{ \lim_{\nu \rightarrow \infty} (|x| \cap (\nu|p|)) \right\} \cap k = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (|x| \cap (\nu|p|) \cap k) = 0.$$

Daher gehört $|x|$ zu $\mathfrak{S}_p$, und nach Satz 3.1 $x \in \mathfrak{S}_p$.

Satz 3.3 Jedes x lässt in eindeutiger Weise als $x = h + k$, $h \in \mathfrak{S}_p$, $k \in \mathfrak{R}_p$ sich ausdrücken.

Beweis Setzt man $h_+ = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{x_+ \cap (\nu|p|)\}$, so gilt

$$\begin{aligned} h_+ \cap (\mu|p|) &= \left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} (x_+ \cap (\nu|p|)) \right) \cap (\mu|p|) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (x_+ \cap (\nu|p|) \cap (\mu|p|)) = x_+ \cap (\mu|p|). \end{aligned}$$

Daher gilt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (h_+ \cap (\mu|p|)) = h_+$ und nach Satz 3.2 gehört h_+ zu $\mathfrak{S}_p$. Setzt man auch $x_+ - h_+ = k_+$, so ist offenbar $k_+ \geq 0$, und es gilt

$$\begin{aligned} k_+ \cap |p| &= (x_+ - h_+) \cap |p| = \{x_+ \cap (|p| + h_+)\} - h_+ \\ &= \left\{ x_+ \cap \left\{ |p| + \lim_{\nu \rightarrow \infty} (h_+ \cap (\nu|p|)) \right\} \right\} - h_+ \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{x_+ \cap (h_+ + |p|) \cap ((\nu+1)|p|)\} - h_+ = h_+ - h_+ = 0. \end{aligned}$$

Daher gehört k_+ zu $\mathfrak{R}_p$.

Indem man $h_- = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{x_- \cap (\nu|p|)\}$ und $k_- = x_- - h_-$ setzt, kann man ähnlich beweisen: $h_- \in \mathfrak{S}_p$, $k_- \in \mathfrak{R}_p$.

Setzt man $h = h_+ - h_-$, $k = k_+ - k_-$, so ist $x = h + k$ und $h \in \mathfrak{S}_p$, $k \in \mathfrak{R}_p$.

Sei $x = h' + k'$ und $h' \in \mathfrak{S}_p$, $k' \in \mathfrak{R}_p$, so gilt, wegen $h + k = h' + k'$, $h - h' = k' - k$. Da $h - h' \in \mathfrak{S}_p$, $k' - k \in \mathfrak{R}_p$ ist, gilt $|h - h'| \cap |k' - k| = 0$, folglich $|h - h'| = |k' - k| = 0$, d.h. $h = h'$, $k = k'$.

Definition 3.2 Im obigen Satz bezeichnet man solches h mit $[p]x$, und $[p]x$ heisst die *Projektion von x auf p* .

Aus Konstruktion von $\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{R}_p$ folgt sofort

Satz 3.4 $[p]x = [[p]x]$, $[ap]x = [p]x$ für jede Zahl $a \neq 0$.

Satz 3.5 Damit $x \in \mathfrak{S}_p$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass $[p]x = x$ ist.

Satz 3.6 *Dafür, dass x zu p orthogonal sei: $|x| \wedge |p| = 0$, ist notwendig und hinreichend, dass $[p]x = 0$ ist.*

Satz 3.7 $[p][p]x = [p]x$.

Im Beweis des Satzes 3.3 erhält man

Satz 3.8

$$[p]|x| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \{|x| \wedge (\nu|p|)\}.$$

Satz 3.9

$$[p](ax) = \alpha([p]x) \quad \text{für reelle Zahl } \alpha,$$

$$[p](a+b) = [p]a + [p]b.$$

Beweis Sei $x = h + k$, $h \in \mathfrak{H}_p$, $k \in \mathfrak{K}_p$, so ist auch $ax = ah + ak$, $ah \in \mathfrak{H}_p$, $ak \in \mathfrak{K}_p$. Daher gilt $[p](ax) = \alpha([p]x)$.

Sei $a = h_1 + k_1$, $b = h_2 + k_2$; $h_1, h_2 \in \mathfrak{H}_p$; $k_1, k_2 \in \mathfrak{K}_p$, so ist auch

$$a+b = (h_1+h_2) + (k_1+k_2), \quad h_1+h_2 \in \mathfrak{H}_p, \quad k_1+k_2 \in \mathfrak{K}_p.$$

Daher gilt $[p](a+b) = [p]a + [p]b$.

Nach Satz 3.9 erhält man durch $[p]x$ einen linearen Operator auf $\mathfrak{M}$. Diesen Operator nennen wir *Projektor*.

Definition 3.3 Ein linearer Operator T in $\mathfrak{M}$ heisst *beschränkt*, wenn für eine passende Zahl $\alpha \geq 0$, falls Tx sinnvoll ist, $|Tx| \leq \alpha|x|$ ist.

Definition 3.4 Ein linearer Operator T in $\mathfrak{M}$ heisst *positiv* (oder *negativ*), wenn für jedes $x \geq 0$, falls Tx sinnvoll ist, stets $Tx \geq 0$ (oder $Tx \leq 0$) ist.

Satz 3.10 *Projektoren $[p]$ sind positiv, beschränkt und sogar für jedes x*

$$[p]x_+ = ([p]x)_+, \quad [p]x_- = ([p]x)_-,$$

$$[p]|x| = |[p]x| \leq |x|.$$

Beweis Sei $x = h + k$, $h \in \mathfrak{H}_p$, $k \in \mathfrak{K}_p$, so ist wegen $|h| \wedge |k| = 0$,

$$|x| = |h| + |k|, \quad |h| \in \mathfrak{H}_p, \quad |k| \in \mathfrak{K}_p.$$

Daher erhält man $[p]|x| = |[p]x| \leq |x|$. Weiterhin gilt

$$x_+ = \frac{1}{2}(x + |x|) = \frac{1}{2}(h + |h|) + \frac{1}{2}(k + |k|) = h_+ + k_+,$$

$$h_+ \in \mathfrak{H}_p, \quad k_+ \in \mathfrak{K}_p,$$

folglich $[p]x_+ = ([p]x)_+$, und ähnlich $[p]x_- = ([p]x)_-$.

$$\begin{aligned} \text{Satz 3.11} \quad [p](a \cup b) &= ([p]a) \cup ([p]b), \\ [p](a \cap b) &= ([p]a) \cap ([p]b). \end{aligned}$$

Im Falle $a \geq 0$, $b \geq 0$, gilt

$$[p](a \cap b) = ([p]a) \cap b = a \cap ([p]b).$$

Beweis Wenn $a \geq 0$, $b \geq 0$ ist, so gilt nach Satz 3.8

$$\begin{aligned} [p](a \cup b) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a \cup b) \cap (\nu | p |) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a \cap (\nu | p |)) \cup (b \cap (\nu | p |)) = ([p]a) \cup ([p]b). \\ [p](a \cap b) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a \cap b) \cap (\nu | p |) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (a \cap (\nu | p |)) \cap b = ([p]a) \cap b = ([p]a) \cap ([p]b). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Falle erhält man, indem man $c = a_- + b_-$ setzt, wegen $a + c \geq 0$, $b + c \geq 0$,

$$[p]\{a + c\} \cup [p]\{b + c\} = \{[p](a + c)\} \cup \{[p](b + c)\},$$

d.h.

$$[p](a \cup b) + [p]c = \{([p]a) \cup ([p]b)\} + [p]c.$$

Hieraus folgt $[p](a \cup b) = ([p]a) \cup ([p]b)$,

und ähnlich $[p](a \cap b) = ([p]a) \cap ([p]b)$.

Satz 3.12 Projektoren sind stetig: aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a$ folgt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [p]a_\nu = [p]a$.
Dieser Satz folgt aus dem

Satz 3.13 Jeder beschränkte Operator T ist stetig in $\mathfrak{M}$, d.h., wenn $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0$ und Tx_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) sinnvoll ist, so gilt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Tx_\nu = Tx_0$.

Beweis Sei $|Tx| \leq a|x|$, so gilt

$$|Tx_\nu - Tx_0| = |T(x_\nu - x_0)| \leq a|x_\nu - x_0|.$$

Daher ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Tx_\nu = Tx_0$.

Satz 3.14 Für zwei p, q ist $\mathfrak{H}_p > \mathfrak{H}_q$ mit $\mathfrak{R}_p \leq \mathfrak{R}_q$ gleichbedeutend.

Beweis Sei $\mathfrak{H}_p > \mathfrak{H}_q$, $x \in \mathfrak{R}_p$, so ist x zu allen $y \in \mathfrak{H}_q$ orthogonal, insbesondere zu q . Demnach $x \in \mathfrak{R}_q$.

Sei $\mathfrak{R}_p < \mathfrak{R}_q$, $y \in \mathfrak{S}_q$, so ist y zu allen $x \in \mathfrak{R}_p$ orthogonal. Daher ist $y \in \mathfrak{S}_p$.

Satz 3.15 *Damit $\mathfrak{S}_p > \mathfrak{S}_q$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass für jedes x stets $[p]|x| \geq [q]|x|$ ist. In diesem Fall schreibt man $[p] \geq [q]$.*

Beweis Sei $\mathfrak{S}_p > \mathfrak{S}_q$ und $x = h + k$, $h \in \mathfrak{S}_p$, $k \in \mathfrak{R}_p$, so ist wegen $\mathfrak{R}_p < \mathfrak{R}_q$,

$$[q]|x| = [q]|h| \leq |h| = [p]|x|.$$

Wenn stets $[p]|x| \geq [q]|x|$ ist, so gilt für jedes $x \in \mathfrak{S}_q$

$$|x| = [q]|x| \leq [p]|x| \in \mathfrak{S}_p.$$

Nach Satz 3.1 ist daher $x \in \mathfrak{S}_p$.

Satz 3.16 *Damit $[p] \geq [q]$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$[q][p]x = [p][q]x = [q]x$$

ist.

Beweis Sei $[p] \geq [q]$ und $x = h + k$, $h \in \mathfrak{S}_p$, $k \in \mathfrak{R}_p$, so ist wegen $\mathfrak{R}_p < \mathfrak{R}_q$ $[q]x = [q]h = [q][p]x$; und, da $\mathfrak{S}_p > \mathfrak{S}_q$, $[q]x \in \mathfrak{S}_q$ ist, gilt nach Satz 3.5

$$[p][q]x = [q]x.$$

Umgekehrt folgt $[p] \geq [q]$ nach Satz 3.5 und 3.15 aus $[p][q]x = [q]x$ oder aus $[q][p]x = [q]x$, wegen $[q][p]|x| \leq [p]|x|$.

Satz 3.17 *$[p] \geq [q]$ ist mit $q \in \mathfrak{S}_p$ gleichbedeutend. Daher folgt die Ungleichung $[p] \geq [q]$ aus $|p| \geq |q|$.*

Beweis Aus $[p] \geq [q]$ folgt nach Satz 3.16

$$[p]q = [p][q]q = [q]q = q.$$

Daher ist $q \in \mathfrak{S}_p$ nach Satz 3.5. Umgekehrt folgt $\mathfrak{R}_p < \mathfrak{R}_q$ aus $q \in \mathfrak{S}_p$, und nach Satz 3.14 $\mathfrak{S}_q < \mathfrak{S}_p$ d.h. $[p] \geq [q]$.

$$\text{Satz 3.18} \quad [[p]q]x = [[q]p]x$$

$$= [p][q]x = [q][p]x = [|p| \wedge |q|]x.$$

Beweis Aus $|p| \wedge |q| \wedge x = 0$ folgt nach Satz 1.12

$$|p| \wedge (\nu |q|) \wedge x = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Indem man $\nu \rightarrow \infty$ lässt, erhält man nach Satz 3.8

$$(*) \quad |[q]p| \wedge x = 0.$$

Daher ist

$$\mathfrak{R}_{|p| \wedge |q|} < \mathfrak{R}_{[q]p}.$$

Aus (*) folgt $([q]|p|) \wedge |q| \wedge x = 0$.

Da $([q]|p|) \wedge |q| = |p| \wedge ([q]|q|) = |p| \wedge |q|$ gilt, so ergibt sich

$$|p| \wedge |q| \wedge x = 0.$$

Demnach ist $\mathfrak{R}_{|p| \wedge |q|} > \mathfrak{R}_{[q]p}$. Folglich erhält man $\mathfrak{R}_{|p| \wedge |q|} = \mathfrak{R}_{[q]p}$, damit $[|p| \wedge |q|] = [q]p$ bewiesen ist.

Hieraus folgt auch

$$[[p]q] = [|q| \wedge |p|] = [|p| \wedge |q|] = [q]p.$$

Aus $|p| \wedge |q| \wedge y = 0$ folgt für jedes x

$$|x| \wedge |p| \wedge |q| \wedge y = 0,$$

und weiterhin nach Satz 1.12

$$|x| \wedge (\nu |p|) \wedge (\mu |q|) \wedge y = 0 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots).$$

Indem man $\nu \rightarrow \infty$ lässt, erhält man

$$|[p]x| \wedge (\mu |q|) \wedge y = 0,$$

und für $\mu \rightarrow \infty$

$$|[q][p]x| \wedge y = 0.$$

Daher gehört $[q][p]x$ zu $\mathfrak{S}_{|p| \wedge |q|}$, und nach Satz 3.5

$$[|p| \wedge |q|][q][p]x = [q][p]x.$$

Andererseits gilt nach Satz 3.16 und 3.17

$$[|p| \wedge |q|][p][q]x = [|p| \wedge |q|][q]x = [|p| \wedge |q|]x.$$

Daher erhält man

$$[p][q]x = [|p| \wedge |q|]x,$$

und folglich auch

$$[q][p]x = [|p| \wedge |q|]x.$$

Satz 3.19 Wenn $|p| \wedge |q| = 0$ ist, so gilt

$$[p+q]x = [p]x + [q]x.$$

Beweis Zuerst nehmen wir $x \geq 0$ an. Aus $|p| \wedge |q| = 0$ folgt nach Definition 3.2 $[p]x \wedge |q| = 0$, und hieraus auch $[p]x \wedge [q]x = 0$. Da

$$[p]x \leq [|p| + |q|]x, \quad [q]x \leq [|p| + |q|]x$$

sein soll, gilt nach Satz 1.6

$$[p]x + [q]x = ([p]x) \vee ([q]x) \leq [|p| + |q|]x.$$

Setzt man $x = [p]x + k$, $k \in \mathfrak{R}_p$, so ist nach Satz 3.16 und 3.17

$$(**) \quad [|p| + |q|]x = [p]x + [|p| + |q|]k.$$

Setzt man auch

$$k = [q]k + k', \quad k' \in \mathfrak{R}_q,$$

so ist wegen $|p| \wedge k = 0$ und $0 \leq k' \leq k$

$$|p| \wedge k' = 0.$$

Da auch $|q| \wedge k' = 0$ sein soll, gilt nach Satz 1.11

$$(|p| + |q|) \wedge k' = 0.$$

Demnach erhält man nach Satz 3.16 und 3.17 wegen $k \leq x$

$$[|p| + |q|]k = [q]k \leq [q]x,$$

und aus (**) folgt

$$[|p| + |q|]x \leq [p]x + [q]x.$$

Daher ist

$$[|p| + |q|]x = [p]x + [q]x$$

bewiesen. Da diese Gleichung für jedes $x \geq 0$ besteht, so gilt auch für beliebiges x .

Andererseits gilt

$$[|p| + |q|] = [|p+q|] = [p+q]$$

wegen $|p| \wedge |q| = 0$. Daher ist der Satz bewiesen.

$$\text{Satz 3.20} \quad [|p| + |q|] = [|p| \vee |q|].$$

Beweis Da $|p| \vee |q| \geq |p|$, $\geq |q|$ ist, gehören $|p|$, $|q|$ beide zu $\mathfrak{S}_{|p| \vee |q|}$, demnach auch $|p| + |q| \in \mathfrak{S}_{|p| \vee |q|}$. Daher gilt nach Satz 3.5

$$[|p| \vee |q|] (|p| + |q|) = |p| + |q|.$$

Hieraus folgt nach Satz 3.18

$$\begin{aligned} [|p| + |q|] &= [(|p| \vee |q|) (|p| + |q|)] \\ &= [(|p| \vee |q|) \wedge (|p| + |q|)] = [|p| \vee |q|] . \end{aligned}$$

Satz 3.21 $[p]x + [q]x = [|p| \vee |q|]x + [|p| \wedge |q|]x$.

Beweis Da $(|p| - [q]|p|) \wedge [q]|p| = 0$ sein soll, gilt nach Satz 3.19

$$[|p| - [q]|p|] + [[q]p] = [p] .$$

Hieraus folgt nach Satz 3.20, wegen $(|p| - [q]|p|) \wedge |q| = 0$,

$$[p] + [q] = [[q]p] + [|p| - [q]|p| + |q|] .$$

Da $\mathfrak{S}_q \subset \mathfrak{S}_{(|p| - [q]|p|) + |q|}$, $[q]|p| \in \mathfrak{S}_q$ ist, so gilt

$$|p| + |q| = \{ (|p| - [q]|p|) + |q| \} + [q]|p| \in \mathfrak{S}_{(|p| - [q]|p|) + |q|} .$$

Andererseits ist offenbar

$$(|p| - [q]|p|) + |q| \leq |p| + |q| .$$

Daher gilt nach Satz 3.17

$$[|p| + |q|] = [(|p| - [q]|p|) + |q|] .$$

Indem man Satz 3.20 und 3.18 in Betracht zieht, erhält man den Satz.

Satz 3.22 Wenn $[p] \geq [q]$ besteht, so ist $[p] - [q]$ auch ein Projektor, und $[p] - [q] = [p - [q]p]$.

Beweis Aus $|p - [q]p| \wedge [q]p = 0$ folgt nach Satz 3.19

$$[p - [q]p] + [[q]p] = [p] .$$

Wenn $[p] \geq [q]$ ist, so gilt nach Satz 3.18 und 3.16

$$[[q]p] = [q][p] = [q] .$$

Daher ist $[p - [q]p] = [p] - [q]$.

Satz 3.23 Sei $|p_1| \leq |p_2| \leq \dots$ und $\lim_{v \rightarrow \infty} |p_v| = |p_0|$, so gilt für jedes x

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [p_v]x = [p_0]x .$$

Beweis Es genügt den Satz für $x \geq 0$ zu beweisen. Daher nehmen wir $x \geq 0$ an. Dann ist nach Satz 3.17

$$[p_1]x \leq [p_2]x \leq \dots,$$

und $[p_\nu]x \leq [p_0]x \quad (\nu = 1, 2, \dots).$

Folglich ist der Limes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu]x = x_0$ vorhanden, und $x_0 \leq [p_0]x$. Andererseits gilt nach Satz 3.7 und 3.18

$$[p_\nu][p_0]x = [p_\nu][p_0][p_\nu]x \leq [p_\nu][p_0]x_0 = [p_\nu]x_0.$$

Daher ist

$$[p_\nu]([p_0]x - x_0) = 0,$$

nämlich nach Satz 3.6 $|p_\nu| \wedge ([p_0]x - x_0) = 0$. Für $\nu \rightarrow \infty$ erhält man

$$|p_0| \wedge ([p_0]x - x_0) = 0,$$

und nach Satz 3.6

$$[p_0]([p_0]x - x_0) = 0, \text{ d.h. } [p_0]x = [p_0]x_0 = x_0,$$

wegen $[p_0] \lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu]x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_0][p_\nu]x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} [p_\nu]x$.

Satz 3.24 $P_1, P_2, \dots$ sei eine Folge von Projektoren. Wenn $P_1 \leq P_2 \leq \dots$ und für einen Projektor L stets $P_\nu \leq L$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ist, so gibt es einen Projektor P_0 , so dass für jedes x

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu x = P_0 x.$$

Solches P_0 bezeichnet man mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu$.

Beweis Sei $P_\nu = [p_\nu]$, $L = [l]$, so folgt aus $[p_\nu] \geq [p_\mu]$ für $\nu \geq \mu$, nach Satz 3.17,

$$|p_1| + |p_2| + \dots + |p_\nu| \in \mathfrak{S}_{p_\nu}.$$

Wegen $|p_\nu| \leq |p_1| \vee |p_2| \vee \dots \vee |p_\nu| \leq |p_1| + |p_2| + \dots + |p_\nu|$, ist dann

$$[p_\nu] = [|p_1| \vee |p_2| \vee \dots \vee |p_\nu|].$$

Aus $[p_\nu] \leq [l]$ folgt auch nach Satz 3.18 und 3.16

$$[p_\nu] = [|l| \wedge (|p_1| \vee |p_2| \vee \dots \vee |p_\nu|)].$$

Setzt man $p'_\nu = |l| \cap (|p_1| \cup |p_2| \cup \dots \cup |p_\nu|)$, so ist $p'_1 \leq p'_2 \leq \dots$, $p'_\nu \leq |l|$, und der Limes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p'_\nu$ existiert. Daher ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = [\lim_{\nu \rightarrow \infty} p'_\nu].$$

Satz 3.25 Für die Folge von Projektoren $P_1 \geq P_2 \geq \dots$, gibt es einen Projektor P_0 , so dass für jedes x

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu x = P_0 x$$

ist. Solches P_0 bezeichnet man mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu$.

Beweis Setzt man $P' = P_1 - P_\nu$ so ist nach Satz 3.22 P'_ν auch ein Projektor, und

$$P'_1 \leq P'_2 \leq \dots, \quad P'_\nu \leq P_1 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Nach dem obigen Satz gibt es einen Projektor P_0 , so dass für jedes x

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P'_\nu x = P_0 x$$

ist. Demnach gilt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu x = (P_1 - P_0)x$.

Da natürlich $P_0 \leq P_1$ ist, ist $P_1 - P_0$ auch ein Projektor.

§4. Stieltjessche Integrale Hier betrachten wir eine Schar von Elementen a_λ in $\mathfrak{M}$, welche allen reellen Zahlen λ zugeordnet sind.

Definition 4.1 Eine Schar a_λ heisst *wachsend*, wenn für $\lambda > \mu$ stets $a_\lambda \geq a_\mu$ ist.

Definition 4.2 Eine Schar a_λ heisst *von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall* $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, wenn für jede Zerlegung des Intervalles $\alpha \leq \lambda \leq \beta$: $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \beta$, die Summe

$$\sum_{\nu=1}^n |a_{\lambda_\nu} - a_{\lambda_{\nu-1}}|$$

beschränkt ist: für ein bestimmtes l ist stets

$$\sum_{\nu=1}^n |a_{\lambda_\nu} - a_{\lambda_{\nu-1}}| \leq l.$$

Wenn a_λ in jedem abgeschlossenen Intervall $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ von beschränkter Variation ist, so heisst a_λ *nur von beschränkter Variation*.

Jede wachsende Schar ist offenbar von beschränkter Variation. Man kann die folgenden Sätze, wie im Falle reeller Funktionen, leicht beweisen.

Satz 4.1 Wenn a_λ, b_λ beide von beschränkter Variation sind, so ist $\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda$ für reelle Zahlen α, β auch von beschränkter Variation.

Satz 4.2 Wenn a_λ von beschränkter Variation ist, so ist Pa_λ für jeden Projektor auch von beschränkter Variation.

Satz 4.3 P_λ sei eine wachsende Schar von Projektoren: $P_\lambda \geq P_\mu$ für $\lambda > \mu$. Für jedes x ist dann $P_\lambda x$ stets von beschränkter Variation.

Beweis $P_\lambda x = P_\lambda x_+ - P_\lambda x_-$, und $P_\lambda x_+$, $P_\lambda x_-$ sind beide wachsend.

$\varphi(\lambda)$ sei eine stetige gewöhnliche Funktion, und a_λ von beschränkter Variation. Man kann ganz ähnlich wie im Falle der reellen Funktionen das Stieltjessche Integral durch

$$\int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^n \varphi(\tau_\nu) (a_{\lambda_\nu} - a_{\lambda_{\nu-1}}),$$

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \beta,$$

$$\lambda_{\nu-1} \leq \tau_\nu \leq \lambda_\nu, \quad \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} \leq \delta \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

definieren, wobei der Limes stets vorhanden ist.

Dieses Integral besitzt auch dieselben Rechnungsregeln wie im Falle der reellen Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{Satz 4.4} \quad \int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda &= \int_a^\tau \varphi(\lambda) da_\lambda + \int_\tau^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda \\ \int_a^\beta \{\varphi(\lambda) + \psi(\lambda)\} da_\lambda &= \int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda + \int_a^\beta \psi(\lambda) da_\lambda \\ \int_a^\beta \gamma \varphi(\lambda) da_\lambda &= \gamma \int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda \\ \int_a^\beta da_\lambda &= a_\beta - a_a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 4.5} \quad \int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda + \int_a^\beta \varphi(\lambda) db_\lambda &= \int_a^\beta \varphi(\lambda) d(a_\lambda + b_\lambda) \\ \int_a^\beta \varphi(\lambda) d(\gamma a_\lambda) &= \gamma \int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda. \end{aligned}$$

Satz 4.6 Wenn a_λ wachsend ist, so folgt aus $\varphi(\lambda) \geq \psi(\lambda)$

$$\int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda \geq \int_a^\beta \psi(\lambda) da_\lambda. \quad (\beta \geq a)$$

Satz 4.7 Wenn a_λ wachsend ist, so gilt

$$\left| \int_a^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda \right| \leq \int_a^\beta |\varphi(\lambda)| da_\lambda. \quad (\beta \geq a)$$

Satz 4.8 Durch

$$b_\mu = \int_\alpha^\mu \varphi(\lambda) d\alpha_\lambda$$

erhält man auch eine Schar b_μ von beschränkter Variation, und es gilt

$$\int_\alpha^\beta \psi(\mu) db_\mu = \int_\alpha^\beta \psi(\lambda) \varphi(\lambda) d\alpha_\lambda.$$

Satz 4.9 Für jeden Projektor P gilt

$$P \int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) d\alpha_\lambda = \int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) dP\alpha_\lambda.$$

Wenn für unabhängigen Grenzübergang von α, β der Limes

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty, \\ \beta \rightarrow \infty}} \int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) d\alpha_\lambda$$

vorhanden ist, so bezeichnet man diesen Limes mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d\alpha_\lambda,$$

und wir nennen dieses *Integral konvergent*.

Man kann leicht einsehen, dass die Sätze, von 4.4 bis 4.9, auch für $\alpha = -\infty, \beta = \infty$ alle gültig sind, falls die hervortretenden Integrale alle konvergent sind.

§5. Spektraldarstellung Hier wollen wir Spektraldarstellung eines Elementes durch ein anders untersuchen.

Definition 5.1 Ein Element e heisst ein Teil von p , wenn e zu $p - e$ orthogonal ist, d.h. $|e| \wedge |p - e| = 0$.

Aus Definition folgt sofort

Satz 5.1 Für jeden Teil e von p ist $p - e$ auch ein Teil von p .

Satz 5.2 Dafür, dass e ein Teil von p sei, ist notwendig und hinreichend, dass $[e]p = e$ ist.

Beweis e sei ein Teil von p . Dann folgt nach dem Satz 3.6 aus $|e| \wedge |p - e| = 0$

$$[e](p - e) = 0, \text{ d.h. } [e]p = e.$$

Umgekehrt folgt aus $[e]p = e$

$$|e| \wedge |p - e| = |e| \wedge |p - [e]p| = 0.$$

Satz 5.3 Für je zwei a, p ist $[a]p$ ein Teil von p .

Beweis Nach Satz 3.18 gilt

$$[[a]p]p = [a][p]p = [a]p.$$

Satz 5.4 p_+ und $-p_-$ sind beide Teile von p .

Beweis Da $p_+ - p_- = p$ und $p_+ \wedge |-p_-| = 0$ ist, gilt der Satz nach Definition 5.1.

Satz 5.5 Wenn e ein Teil von p ist, so ist Pe für jeden Projektor P auch ein Teil von Pp .

Beweis Aus $|e| \wedge |p-e| = 0$ folgt nach Satz 3.11

$$|Pe| \wedge |Pp - Pe| = (P|e|) \wedge (P|p-e|) = 0.$$

Satz 5.6 Wenn e ein Teil von p ist, so gilt

$$e_+ = [p_+]e, \quad e_- = -[p_-]e.$$

Beweis Aus $[e]p = e$ folgt

$$\begin{aligned} e_+ &= ([e]p) \vee 0 = [e](p \vee 0) = [e]p_+ \\ &= [e][p_+]p = [p_+][e]p = [p_+]e, \end{aligned}$$

und ähnlich $e_- = -[p_-]e$.

Satz 5.7 Wenn e_1 ein Teil von p und e_2 ein Teil von e_1 ist, so ist e_2 auch ein Teil von p .

Beweis Da nach Satz 5.2 und 3.17 $[e_2] \leq [e_1]$ sein soll, gilt nach Satz 3.16 und 5.2

$$[e_2]p = [e_2][e_1]p = [e_2]e_1 = e_2.$$

Satz 5.8 Für zwei Teile von p : e_1, e_2 folgt aus $|e_1| \geq |e_2|$, dass e_2 ein Teil von e_1 ist.

Beweis Da aus $|e_1| \geq |e_2|$ nach Satz 3.17 $[e_1] \geq [e_2]$ folgt, gilt nach Satz 3.16 und 5.2

$$[e_2]e_1 = [e_2][e_1]p = [e_2]p = e_2.$$

Satz 5.9 Wenn e_1 ein Teil von e_2 ist, so gilt

$$[e_2]x - [e_1]x = [e_2 - e_1]x.$$

Beweis Nach Satz 3.19 folgt aus $|e_1| \wedge |e_2 - e_1| = 0$

$$[e_2] = [e_2 - e_1] + [e_1].$$

Definition 5.2 Eine Schar a_λ von Teilen des Elementes p heisst eine Zerlegung von p , wenn

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} a_\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_\lambda = p,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} a_\lambda = a_\mu$$

und $|a_\lambda| \geq |a_\mu|$ für $\lambda > \mu$ ist.

Satz 5.10 Wenn e_λ eine Zerlegung von p ist, so ist Pe_λ für jeden Projektor P auch eine Zerlegung von Pp .

Beweis Da P stetig ist, besteht

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} Pe_\lambda = Pp, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} Pe_\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} Pe_\lambda = Pe_\mu,$$

und für $\lambda > \mu$ gilt nach Positivität von P

$$|Pe_\lambda| = P|e_\lambda| \geq P|e_\mu| = |Pe_\mu|.$$

Satz 5.11 Aus einer Zerlegung e_λ von p erhält man durch $(e_\lambda)_+$ und $(e_\lambda)_-$ eine Zerlegung bzw. von p_+ und p_- .

Beweis Da nach Satz 5.6 $(e_\lambda)_+ = [p_+]e_\lambda$ ist, so ist $(e_\lambda)_+$ nach Satz 5.10 eine Zerlegung von $[p_+]p = p_+$; ähnlich $(e_\lambda)_-$ eine Zerlegung von p_- .

Satz 5.12 e_λ und f_λ seien Zerlegungen bzw. von p und q . Wenn p zu q orthogonal ist: $|p| \wedge |q| = 0$, so ist $ae_\lambda + \beta f_\lambda$ eine Zerlegung von $ap + \beta q$.

Beweis Es genügt nur zu beweisen, dass

$$|ae_\lambda + \beta f_\lambda| \geq |ae_\mu + \beta f_\mu| \quad \text{für } \lambda > \mu.$$

Dies folgt aber nach Satz 1.16 aus

$$|\alpha||e_\lambda| + |\beta||f_\lambda| \geq |\alpha||e_\mu| + |\beta||f_\mu| \quad \text{für } \lambda > \mu.$$

Satz 5.13 Jede Zerlegung e_λ eines Elementes p ist von beschränkter Variation.

Beweis Da nach Satz 5.11 $(e_\lambda)_+$ und $(e_\lambda)_-$ Zerlegungen bzw. von p_+ und p_- sein sollen, sind $(e_\lambda)_+$, $(e_\lambda)_-$ nach Definition 5.2 beide wachsend. Daher ist $e_\lambda = (e_\lambda)_+ - (e_\lambda)_-$ von beschränkter Variation.

Satz 5.14 Für jede Zerlegung von $p: e_\lambda$, ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [e_\lambda] = [p], \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [e_\lambda] = 0.$$

Beweis Die erste folgt sofort aus Satz 3.23. Da der Limes $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [e_\lambda]$ vorhanden ist, setzt man $P_0 = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [e_\lambda]$. Wegen $P_0 \leq [e_\lambda]$, gilt dann

$P_0(p - e_\lambda) = 0$ für jedes λ . Für $\lambda \rightarrow -\infty$ ist daher $P_0 p = 0$, folglich

$$P_0 = P_0[p] = [P_0 p] = 0$$

nach Satz 3.18 wegen $P_0 \leq [p]$.

Satz 5.15 Für jedes a gibt es eine einzige Zerlegung e_λ von p , für welche

$$[p]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d e_\lambda.$$

ist. Diese Zerlegung ist durch $e_\lambda = [(\lambda p_+ - [p_+]a)_+ + (\lambda p_- + [p_-]a)_+]p$ gegeben.

Beweis Zuerst nehmen wir $a \in \mathfrak{F}_p$ und $p > 0$ an. Setzt man

$$e_\lambda = [(\lambda p - a)_+]p,$$

so gilt nach Satz 3.17 wegen $(\lambda p - a)_+ \geq (\mu p - a)_+$,

$$e_\lambda \geq e_\mu \geq 0 \quad \text{für } \lambda > \mu,$$

und nach Satz 3.23

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} e_\lambda = e_\mu.$$

Da nach Satz 3.18 und 3.16

$$[e_\lambda] = [(\lambda p - a)_+] [p] = [(\lambda p - a)_+]$$

sein soll, gilt wegen $(\lambda p - a)_+ \wedge (\lambda p - a)_- = 0$,

$$[e_\lambda](\lambda p - a) = (\lambda p - a)_+ \geq 0.$$

Hieraus erhält man, da e_λ nach Satz 5.3 ein Teil von p ist,

$$(*) \quad [e_\lambda]a \leq \lambda [e_\lambda]p = \lambda e_\lambda.$$

Da $[(\lambda p - a)_+](p - e_\lambda) = [e_\lambda](p - e_\lambda) = 0$ ist, gilt nach Satz 3.6

$$(p - e_\lambda) \wedge (\lambda p - a)_+ = 0,$$

und folglich

$$[p - e_\lambda](\lambda p - a) = -[p - e_\lambda](\lambda p - a)_- \leq 0.$$

Demnach gilt

$$(**) \quad [p - e_\lambda]a \geq \lambda(p - e_\lambda).$$

Für $\lambda < 0$ erhält man aus (*)

$$(-\lambda)e_\lambda \leq [e_\lambda](-a) \leq |a| \quad \text{d.h.} \quad e_\lambda \leq \frac{1}{-\lambda}|a|.$$

Hieraus folgt

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e_\lambda = 0.$$

Für $\lambda > 0$ folgt aus (**)

$$\lambda(p - e_\lambda) \leq [p - e_\lambda]a \leq |a| \quad \text{d.h.} \quad p - e_\lambda \leq \frac{1}{\lambda}|a|.$$

Demnach gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e_\lambda = p.$$

Daher ist e_λ eine Zerlegung von p .

Da für $\lambda > \mu$ $e_\lambda - e_\mu$ ein Teil von p sein soll, folgt aus (*)

$$[e_\lambda - e_\mu]a = [e_\lambda - e_\mu][e_\lambda]a \leq \lambda[e_\lambda - e_\mu]e_\lambda = \lambda(e_\lambda - e_\mu),$$

und aus (**)

$$[e_\lambda - e_\mu]a = [e_\lambda - e_\mu][p - e_\mu]a \geq \mu[e_\lambda - e_\mu](p - e_\mu) = \mu(e_\lambda - e_\mu).$$

Daher gilt für $\lambda > \mu$

$$\mu(e_\lambda - e_\mu) \leq ([e_\lambda] - [e_\mu])a \leq \lambda(e_\lambda - e_\mu).$$

Für jede Zerlegung des Intervalls $a \leq \lambda \leq \beta$:

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \beta,$$

gilt demzufolge

$$\sum_{v=1}^n \lambda_{v-1}(e_{\lambda_v} - e_{\lambda_{v-1}}) \leq ([e_\beta] - [e_a])a \leq \sum_{v=1}^n \lambda_v(e_{\lambda_v} - e_{\lambda_{v-1}}).$$

Hieraus erhält man

$$([e_\beta] - [e_a])a = \int_a^\beta \lambda de_\lambda,$$

und nach Satz 5.14

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda.$$

Nun wollen wir die Eindeutigkeit solcher Zerlegung e_λ beweisen. Sei für eine Zerlegung f_λ von p

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda df_\lambda,$$

so gilt

$$\begin{aligned} \mu p - a &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda) df_\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - \lambda) df_\lambda + \int_{\mu}^{\infty} (\mu - \lambda) df_\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - \lambda) df_\lambda - \int_{\mu}^{\infty} (\lambda - \mu) d(f_\lambda - f_\mu). \end{aligned}$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\mu} (\mu - \lambda) df_{\lambda} \geq 0, \quad \int_{\mu}^{\infty} (\lambda - \mu) d(f_{\lambda} - f_{\mu}) \geq 0,$$

und diese zwei Integrale zueinander orthogonal sind, so gilt

$$(\mu p - a)_{+} = \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - \lambda) df_{\lambda}.$$

Demnach gilt

$$[f_{\mu}](\mu p - a)_{+} = \int_{-\infty}^{\mu} (\mu - \lambda) d[f_{\mu}]f_{\lambda} = (\mu p - a)_{+},$$

folglich

$$[e_{\mu}] = [(\mu p - a)_{+}] \leq [f_{\mu}].$$

Für $\varepsilon > 0$ gilt auch

$$(\mu p - a)_{+} \geq \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} (\mu - \lambda) df_{\lambda} \geq \int_{-\infty}^{\mu - \varepsilon} \varepsilon df_{\lambda} = \varepsilon f_{\mu - \varepsilon}.$$

Hieraus folgt

$$[e_{\mu}] \geq [\varepsilon f_{\mu - \varepsilon}] = [f_{\mu - \varepsilon}],$$

und für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt

$$[e_{\mu}] \geq [f_{\mu}].$$

Daher erhält man für jedes μ

$$[e_{\mu}] = [f_{\mu}],$$

und folglich

$$e_{\mu} = [e_{\mu}]p = [f_{\mu}]p = f_{\mu}.$$

Zuletzt betrachten wir den allgemeinen Fall. p und a seien beliebig. Nach Obigem gibt es in eindeutiger Weise zwei Zerlegungen e_{λ}^{+} und e_{λ}^{-} bzw. von p_{+} und p_{-} , so dass

$$[p_{+}]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_{\lambda}^{+}, \quad -[p_{-}]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_{\lambda}^{-}$$

ist. Setzt man $e_{\lambda} = e_{\lambda}^{+} - e_{\lambda}^{-}$, so gilt nach Satz 4.5

$$[p]a = [p_{+}]a + [p_{-}]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_{\lambda}.$$

Hier ist $e_{\lambda} = e_{\lambda}^{+} - e_{\lambda}^{-}$ nach Satz 5.12, wegen $p_{+} \cap p_{-} = 0$, eine Zerlegung von p .

Solches e_{λ} wird eindeutig bestimmt. Denn, sei für eine Zerlegung f_{λ} von p

$$[p]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda df_{\lambda},$$

so gilt nach Satz 4.9, 5.6 und 5.11

$$[p_+]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d[p_+]f_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(f_{\lambda})_+.$$

Andererseits ist

$$[p_+]a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d[p_+]e_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(e_{\lambda})_+.$$

Nach der Eindeutigkeit der Zerlegung für $p \geq 0$ muss dann $(e_{\lambda})_+ = (f_{\lambda})_+$ sein. In ähnlicher Weise erhält man auch $(e_{\lambda})_- = (f_{\lambda})_-$. Daher ist $e_{\lambda} = f_{\lambda}$.

II. Teilweise Geordnete Ringe

§6. Dilatoren Alle Projektoren in einem teilweise geordneten Modul $\mathfrak{M}$ bilden ein sogenanntes distributives "Lattice" über Verbindungen

$$[p][q] = [|p| \cap |q|], \quad [p] + [q] = [|p| \cup |q|],$$

aber allgemein keine Boolesche Algebra, da der Identitätsoperator nicht immer ein Projektor ist. Wenn der Identitätsoperator I ein Projektor ist, d.h. für ein Element p $I = [p]$, so bilden alle Projektoren offenbar eine Boolesche Algebra.

Definition 6.1 Ein Element p heisst *vollständig* in $\mathfrak{M}$, wenn $[p]$ der Identitätsoperator in $\mathfrak{M}$ ist.

Jedes p ist daher vollständig in $\mathfrak{S}_p = [p]\mathfrak{M}$. Im folgenden nehmen wir an, dass in $\mathfrak{M}$ ein vollständiges Element vorhanden ist.

Definition 6.2 Unter einem *Dilatator* r verstehen wir den linearen Operator T mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}^{(7)}$ folgender Beschaffenheit:

- 1) Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ ist *überall dicht* in $\mathfrak{M}$.
- 2) T ist mit jedem Projektor P *vertauschbar*: aus $a \in \mathfrak{D}$ folgt $Pa \in \mathfrak{D}$ und $TPa = PTa$.
- 3) T ist *abgeschlossen*: für $p_{\nu} \in \mathfrak{D}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) folgt $p_0 \in \mathfrak{D}$, $Tp_0 = q$ aus gleichzeitigen $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_{\nu} = p_0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Tp_{\nu} = q$.

Im folgenden verstehen wir unter T und $\mathfrak{D}$ einen Dilator und seinen Definitionsbereich.

Satz 6.1 Aus $a \in \mathfrak{D}$ folgt $|a| \in \mathfrak{D}$.

Beweis Da $[a_+]a \in \mathfrak{D}$, $[a_-]a \in \mathfrak{D}$ sein soll, ist auch

$$|a| = [a_+]a - [a_-]a \in \mathfrak{D}.$$

(7) Hier ist der Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ natürlich ein Modul, da der Operator T linear ist.

Satz 6.2 Aus $|a| \wedge |b| = 0$, $a, b \in \mathfrak{D}$ folgt $|Ta| \wedge |Tb| = 0$.

Beweis Da $|Ta| = |T[a]a| = [a]|Ta|$, $|Tb| = [b]|Tb|$ ist, so folgt $|Ta| \wedge |Tb| = 0$ aus $|a| \wedge |b| = 0$.

Satz 6.3 Für jedem Projektor P ist TP ein Dilator mit dem Definitionsbereich $P\mathfrak{D} + (I - P)\mathfrak{M}$.

Beweis Man kann leicht diesen Satz aus Definition 6.1 herleiten.

Nach Satz 3.18 folgt aus Definition 6.1 sofort

Satz 6.4 Projektoren sind alle Dilatoren.

Definition 6.3 Eine wachsende Schar von Projektoren P_λ heisst eine Zerlegung des Projektores P , wenn

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda = P$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} P_\lambda = P_\mu,$$

und $P_\lambda \geq P_\mu$ für $\lambda > \mu$ ist.

Satz 6.5 Sei P_λ eine Zerlegung von P , so erhält man durch $P_\lambda x$ eine Zerlegung von Px .

Beweis Nach Satz 3.24 und 3.25 gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} P_\lambda x = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda x = Px,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} P_\lambda x = P_\mu x,$$

und nach Positivität von Projektoren erhält man für $\lambda > \mu$

$$|P_\lambda x| = P_\lambda |x| \geq P_\mu |x| = |P_\mu x|.$$

Daher ist $P_\lambda x$ eine Zerlegung von Px .

Satz 6.6 Sei x_λ eine Zerlegung von x , so erhält man durch $[x_\lambda]$ eine Zerlegung von $[x]$.

Beweis Nach Satz 3.17 gilt für $\lambda > \mu$

$$[x_\lambda] = [|x_\lambda|] \geq [|x_\mu|] = [x_\mu],$$

nach Satz 5.14

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [x_\lambda] = [x], \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [x_\lambda] = 0,$$

und weiterhin nach Satz 3.23

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} [x_\lambda] = \lim_{\lambda \rightarrow \mu-0} [|x_\lambda|] = [|x_\mu|] = [x_\mu].$$

Satz 6.7 Gegeben sei eine Zerlegung P_λ des Projektors P , und eine Zerlegung p_λ des Elements p . Dafür, dass $P_\lambda p = p_\lambda$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass $P_\lambda[p] = [p_\lambda]$ ist.

Beweis Nach Satz 3.18 folgt $P_\lambda[p] = [p_\lambda]$ sofort aus $P_\lambda p = p_\lambda$. Umgekehrt folgt $P_\lambda p = p_\lambda$ aus $P_\lambda[p] = [p_\lambda]$ wegen

$$p_\lambda = [p_\lambda]p = P_\lambda[p]p = P_\lambda p.$$

Satz 6.8 Für jede Zerlegung P_λ eines Projektors P erhält man durch

$$Sx = \int_\alpha^\beta \lambda dP_\lambda x$$

einen beschränkten Dilatator S mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{M}$. Daher ist dieses S stetig.

Beweis Nach Satz 4.5 ist S offenbar ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{M}$. Setzt man $\gamma = \text{Max}(|\alpha|, |\beta|)$, so gilt für jedes $x \geq 0$ nach Satz 4.7

$$\left| \int_\alpha^\beta \lambda dP_\lambda x \right| \leq \int_\alpha^\beta |\lambda| dP_\lambda x \leq \gamma (P_\beta - P_\alpha)x \leq \gamma x,$$

$$\text{d.h.} \quad |Sx| \leq \gamma x.$$

Für beliebiges x gilt daher

$$|Sx| = |Sx_+ - Sx_-| \leq |Sx_+| + |Sx_-| \leq \gamma x_+ + \gamma x_- = \gamma |x|.$$

Nach Satz 4.9 ist S mit jedem Projektor vertauschbar. Daher ist S ein beschränkter Dilatator.

Satz 6.9 Sei $S = \int_\alpha^\beta \lambda dP_\lambda$, so ist jeder Dilatator T mit S vertauschbar: aus $x \in \mathfrak{D}$ folgt $Sx \in \mathfrak{D}$ und $TSx = STx$.

Beweis Setzt man

$$Sx = \lim_{v \rightarrow 1} \sum_{\nu=1}^x \lambda_\nu (P_{\lambda_\nu} - P_{\lambda_{\nu-1}})x$$

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_x = \beta,$$

so gilt für $x \in \mathfrak{D}$

$$\lim_{v \rightarrow 1} T \sum_{\nu=1}^x \lambda_\nu (P_{\lambda_\nu} - P_{\lambda_{\nu-1}})x = \lim_{v \rightarrow 1} \sum_{\nu=1}^x \lambda_\nu (P_{\lambda_\nu} - P_{\lambda_{\nu-1}})Tx = STx.$$

Nach Abgeschlossenheit von T erhält man daher $Sx \in \mathfrak{D}$, und $TSx = STx$.

Satz 6.10 Für jede Zerlegung P_λ des Projektors P erhält man durch

$$Sx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda x$$

einen Dilatator, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}_S$ aus allen Elementen besteht, für welche dieses Integral konvergent ist.

Beweis Da nach Satz 4.5 S ein linearer Operator mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_S$, und nach Satz 4.9 mit jedem Projektor vertauschbar ist, so genügt es zu beweisen, dass $\mathfrak{D}_S$ überall dicht in $\mathfrak{M}$, und S abgeschlossen ist.

Da für jedes x , $(P_\alpha - P_{-\alpha})x + (I - P)x \in \mathfrak{D}_S$ ($\alpha > 0$) und $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (P_\alpha - P_{-\alpha})x = Px$ gilt, so ist $\mathfrak{D}_S$ überall dicht in $\mathfrak{M}$.

Gegeben sei $x_\nu \in \mathfrak{D}_S$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} Sx_\nu = a.$$

Dann gilt für $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} (P_\alpha - P_{-\alpha})a &= (P_\alpha - P_{-\alpha}) \lim_{\nu \rightarrow \infty} Sx_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S(P_\alpha - P_{-\alpha})x_\nu \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda dP_\lambda x_\nu = \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda dP_\lambda x_0, \end{aligned}$$

denn $\int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda dP_\lambda$ ist ein beschränkter Dilatator und stetig. Daher erhält man für $\alpha \rightarrow \infty$

$$x_0 \in \mathfrak{D}_S \quad \text{und} \quad Sx_0 = a.$$

Satz 6.11 Für jeden Dilatator T kann man in eindeutiger Weise die Zerlegung der Identität E_λ angeben, sodass

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Beweis Zuerst beweisen wir diesen Satz im Falle, dass im Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ von T ein vollständiges Element p_0 vorhanden ist. Dann gibt es nach Satz 5.15 eine Zerlegung p_λ des p_0 , für welche

$$Tp_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dp_\lambda$$

ist. Setzt man $E_\lambda = [p_\lambda]$, so ist E_λ nach Satz 6.6 eine Zerlegung der Identität. Durch

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

erhält man nach dem obigen Satz 6.10 einen Dilatator, dessen Definitionsbereich man mit $\mathfrak{D}_S$ bezeichnet hat.

Sei für eine Zerlegung $\bar{p}_\lambda$ von p_0

$$(\#) \quad q = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\bar{p}_\lambda,$$

so gilt für $\alpha > 0$ nach Satz 6.9

$$\begin{aligned} S([\bar{p}_\alpha] - [\bar{p}_{-\alpha}])q &= S \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda d[\bar{p}_\lambda] p_0 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda d[\bar{p}_\lambda] S p_0 \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda d[\bar{p}_\lambda] T p_0 = T \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda d\bar{p}_\lambda = T([\bar{p}_\alpha] - [\bar{p}_{-\alpha}])q, \end{aligned}$$

d.h.

$$(*) \quad S([\bar{p}_\alpha] - [\bar{p}_{-\alpha}])q = T([\bar{p}_\alpha] - [\bar{p}_{-\alpha}])q.$$

Wenn $q \in \mathfrak{D}$ ist, so folgt aus (*)

$$S([\bar{p}_\alpha] - [\bar{p}_{-\alpha}])q = ([\bar{p}_\alpha] - [\bar{p}_{-\alpha}])Tq,$$

und für $\alpha \rightarrow \infty$ erhält man nach Abgeschlossenheit von S

$$q \in \mathfrak{D}_S \quad \text{und} \quad Sq = Tq.$$

Wenn $q \in \mathfrak{D}_S$ ist, so erhält man ähnlich aus (*) nach Abgeschlossenheit von T , dass

$$q \in \mathfrak{D} \quad \text{und} \quad Tq = Sq.$$

Da jedes q nach Satz 5.15 in Gestalt (#) sich darstellen lässt, so gilt $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_S$ und $Sq = Tq$.

Die Eindeutigkeit von E_λ folgt sofort aus der Eindeutigkeit von p_λ . (Satz 5.15).

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Es genügt nur zu beweisen, dass in $\mathfrak{D}$ ein vollständiges Element vorhanden ist. m sei ein vollständiges Element in $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{D}$ überall dicht in $\mathfrak{M}$ ist, so gibt es $p_\nu \in \mathfrak{D}$ ($\nu = 1, 2, \dots$), so dass $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu = m$ ist. Setzt man

$$P_\nu = [|p_1| + |p_2| + \dots + |p_\nu|] \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

so gilt nach Satz 3.17 $P_1 \leq P_2 \leq \dots$. Demzufolge setzt man nach Satz 3.24 $P_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu$. Dann gilt wegen $P_\nu \leq P_0$

$$P_0 p_\nu = P_0 P_\nu p_\nu = P_\nu p_\nu = p_\nu,$$

und für $\nu \rightarrow \infty$ $P_0 m = m$. Da m vollständig ist, so erhält man

$$P_0 = P_0[m] = [P_0 m] = [m] = I, \quad \text{d.h.} \quad P_0 = I.$$

Da T in $P_\nu \mathfrak{M}$ auch ein Dilatator mit dem Definitionsbereich $P_\nu \mathfrak{D}$, und $P_\nu \mathfrak{D}$ ein in $P_\nu \mathfrak{M}$ vollständiges Element, $|p_1| + |p_2| + \dots + |p_\nu|$ enthält, so kann man nach Obigem schreiben:

$$TP_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(\nu)}$$

für eine Zerlegung $E_\lambda^{(\nu)}$ von P_ν . Da

$$TP_\nu = TP_{\nu+1}P_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(\nu+1)}P_\nu$$

gilt, so muss nach Eindeutigkeit von $E_\lambda^{(\nu)}$

$$E_\lambda^{(\nu+1)}P_\nu = E_\lambda^{(\nu)}$$

sein. Daher, wenn man für $\alpha > 0$

$$F_\alpha^{(\nu)} = E_\alpha^{(\nu)} - E_{-\alpha}^{(\nu)}$$

setzt, so gilt wegen $F_\alpha^{(\nu+1)}P_\nu = F_\alpha^{(\nu)}$,

$$F_\alpha^{(1)} \leq F_\alpha^{(2)} \leq \dots,$$

und demzufolge kann man nach Satz 3.24

$$F_\alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\alpha^{(\nu)}$$

setzen. Dann gilt weiterhin für beliebiges x

$$\begin{aligned} |T(F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})x| &= \left| \int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda dE_\lambda^{(\nu+1)}(F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})x \right| \\ &\leq \alpha |(F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})x| = \alpha (F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})|x|. \end{aligned}$$

Da $\sum_{\nu=1}^{\infty} (F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})|x|$ konvergiert, so ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} T(F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})x$ nach Satz 2.13 absolut konvergent. Daher ist

$$TF_\alpha^{(\nu+1)}x = \sum_{\nu=1}^{\nu} T(F_\alpha^{(\nu+1)} - F_\alpha^{(\nu)})x + TF_\alpha^{(1)}x$$

für $\nu \rightarrow \infty$ konvergent, und nach Abgeschlossenheit von T ist $F_\alpha x \in \mathfrak{D}$, und weiterhin gilt

$$(**) \quad |TF_\alpha x| \leq \alpha |F_\alpha x|.$$

Da für $\lambda > \mu \geq 0$, wegen $F_\lambda^{(\nu)} \geq F_\mu^{(\nu)}$, $I \geq F_\lambda \geq F_\mu$ ist, so kann man nach Satz 3.24 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F_\lambda = F_0$ setzen. Dann gilt für alle λ, ν $F_\lambda^{(\nu)} \leq F_0$,

folglich $P_\lambda = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\lambda^{(\nu)} \leq F_0$, und weiterhin $I = \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu \leq F_0$. Daher ist $F_0 = I$.

Setzt man für ein vollständiges Element m in $\mathfrak{M}$

$$p = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} (F_\nu - F_{\nu-1})m,$$

so ist diese Reihe konvergent, und die Summe p ist vollständig, denn

$$\left| \frac{1}{\nu+1} (F_\nu - F_{\nu-1})m \right| \leq (F_\nu - F_{\nu-1}) |m|,$$

und

$$[p] \geq \sum_{\nu=1}^{\nu} [(F_\nu - F_{\nu-1})m] = [F_\nu m] = F_\nu,$$

folglich $[p] \geq I$ für $\nu \rightarrow \infty$. Daher ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1} T(F_\nu - F_{\nu-1})m$ nach (**)

absolut konvergent, d.h. für $\nu \rightarrow \infty$ ist $T\left(\sum_{\nu=1}^{\nu} \frac{1}{\nu+1} (F_\nu - F_{\nu-1})m\right)$ konvergent.

Hieraus folgt $p \in \mathfrak{D}$ und $|Tp| \leq m$.

In diesem Beweis haben wir bewiesen:

Satz 6.12 Für jedes in $\mathfrak{M}$ vollständige m gibt es ein, in $\mathfrak{M}$ vollständiges, derartiges p in $\mathfrak{D}$, dass gleichzeitig $|Tp| \leq |m|$, $|p| \leq |m|$ gilt.

Satz 6.13 Für jedes $x \in \mathfrak{D}$ gilt $|x| \in \mathfrak{D}$ und $|Tx| = |T|x|$.

Beweis Da nach Satz 6.2 $|Tx_+| \wedge |Tx_-| = 0$ sein soll, gilt nach Satz 1.16

$$\begin{aligned} |Tx| &= |Tx_+ - Tx_-| = |Tx_+| + |Tx_-| \\ &= |Tx_+ + Tx_-| = |T|x|. \end{aligned}$$

Satz 6.14 Aus $|a| \leq |p|$, $p \in \mathfrak{D}$ folgt $a \in \mathfrak{D}$ und $|Ta| \leq |Tp|$.

Beweis Sei

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda,$$

so gilt für $\beta > a \geq 0$ oder $a < \beta \leq 0$

$$\left| \int_a^\beta \lambda dE_\lambda a \right| \leq \int_a^\beta |\lambda| dE_\lambda |a| \leq \int_a^\beta |\lambda| dE_\lambda |p|.$$

Hieraus kann man leicht schliessen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda a$ konvergiert. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} |Ta| &\leq \left| \int_0^\infty \lambda dE_\lambda a \right| + \left| \int_{-\infty}^0 \lambda dE_\lambda a \right| \leq \int_0^\infty \lambda dE_\lambda |p| + \int_{-\infty}^0 \lambda dE_\lambda |p| \\ &= |T|p| = |Tp|. \end{aligned}$$

Satz 6.15 Gegeben seien zwei Dilatatoren T_1 und T_2 . Wenn für ein vollständiges p $T_1 p = T_2 p$ gilt, so ist $T_1 = T_2$.

Beweis Sei

$$T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(1)}, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(2)}$$

für Zerlegungen der Identität $E_{\lambda}^{(1)}, E_{\lambda}^{(2)}$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(1)} p = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(2)} p.$$

Nach Satz 5.15 muss $E_{\lambda}^{(1)} p = E_{\lambda}^{(2)} p$ sein, und wegen Vollständigkeit von p erhält man $E_{\lambda}^{(1)} = E_{\lambda}^{(2)}$.

Für ein vollständiges p und beliebiges a gibt es nach Satz 5.15 die Zerlegung p_{λ} von p , für welche

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dp_{\lambda}$$

ist. Indem man

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}, \quad E_{\lambda} = [p_{\lambda}]$$

setzt, erhält man den Dilatator T , für den $a = Tp$ gilt. Nach Satz 6.15 ist solcher Dilatator eindeutig bestimmt.

Definition 6.5 Für ein vollständiges p und beliebiges a bezeichnet man mit $[a, p]$ den, durch $a = [a, p]p$ eindeutig bestimmten, Dilatator.

Satz 6.16 Wenn für ein vollständiges $p \in \mathfrak{D}$ $|Tp| \leq a|p|$ gilt, so ist T beschränkt: $|Tx| \leq a|x|$, und $E_{\lambda} = I$ für $\lambda > a$, $E_{\lambda} = 0$ für $\lambda < -a$, folglich

$$T = \int_{-a}^a \lambda dE_{\lambda},$$

wobei E_{λ} die, T entsprechende, Zerlegung der Identität ist. Daher ist natürlich $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}$.

Beweis Sei

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda},$$

so gilt für $\lambda > a$

$$T(I - E_{\lambda})|p| = \int_{\lambda}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}|p| \geq \lambda(I - E_{\lambda})|p|.$$

Da nach Voraussetzung $a(I - E_{\lambda})|p| \geq |T(I - E_{\lambda})|p|$ sein soll, erhält man $(a - \lambda)(I - E_{\lambda})|p| \geq 0$, folglich $(I - E_{\lambda})|p| = 0$. Daher erhält man, wegen Vollständigkeit von p , $I = E_{\lambda}$.

Für $\lambda < -\alpha$ gilt ähnlich $TE_\lambda |p| \leq \lambda E_\lambda |p|$, und man kann wie oben aus $TE_\lambda |p| \geq -\alpha E_\lambda |p|$ schliessen, dass $E_\lambda = 0$ ist.

Definition 6.6 Ein Dilatator T heisst *vollständig*, wenn für kein $p (\neq 0)$ $Tp = 0$ gilt.

Satz 6.17 Dafür, dass für eine Zerlegung der Identität E_λ

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

vollständig sei, ist es notwendig und hinreichend, dass $\lim_{\lambda \rightarrow +0} E_\lambda = E_0$ gilt.

Beweis Für jedes $p \in \mathfrak{D}$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |Tp| &= |T|p| = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda |p| + \int_{-\infty}^0 |\lambda| dE_\lambda |p| \\ &\geq \int_\varepsilon^\infty \varepsilon dE_\lambda |p| + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varepsilon dE_\lambda |p| = \varepsilon \{I - (E_\varepsilon - E_{-\varepsilon})\} |p|. \end{aligned}$$

Daher folgt aus $Tp = 0$

$$\{I - (E_\varepsilon - E_{-\varepsilon})\} |p| = 0.$$

Wenn $\lim_{\lambda \rightarrow +0} E_\lambda = E_0$ ist, so gilt $|p| = 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Daher ist T vollständig.

Wenn $\lim_{\lambda \rightarrow +0} E_\lambda = E_{+0} > E_0$ ist, so gilt offenbar

$$0 \neq (E_{+0} - E_0)p \in \mathfrak{D} \quad \text{und} \quad T(E_{+0} - E_0)p = 0$$

für jedes vollständige $p \in \mathfrak{M}$, d.h. T ist nicht vollständig.

Satz 6.18 Der Dilatator $[a, p]$ ist vollständig dann und nur dann, wenn a vollständig ist.

Beweis Sei

$$[a, p] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

für die Zerlegung der Identität E_λ , so gilt

$$(\lim_{\lambda \rightarrow +0} E_\lambda - E_0)a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(\lim_{\lambda \rightarrow +0} E_\lambda - E_0)E_\lambda p = 0.$$

Daher, wenn a vollständig ist, so gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} E_\lambda - E_0 = 0,$$

und dann ist $[a, p]$ nach Satz 6.17 vollständig.

Wenn a nicht vollständig ist, so gilt für $I - [a] = P \neq 0$

$$[a, p]Pp = P[a, p]p = Pa = 0,$$

und $Pp \neq 0$, da p vollständig ist.

Satz 6.19 Der Dilatator $[a, p]$ ist ein Projektor dann und nur dann, wenn a ein Teil von p ist. In diesem Falle ist $[a, p] = [a]$.

Beweis Wenn a ein Teil von p ist, so gilt $[a]p = a$, und folglich $[a, p] = [a]$, denn $[a]$ ist auch ein Dilatator. Umgekehrt, wenn $[a, p]$ ein Projektor ist, so ist $a = [a, p]p$ nach Satz 5.3 ein Teil von p , und

$$[a, p] = [a, p][p] = [[a, p]p] = [a].$$

§7. Summe der Dilatatoren Da die Definitionsbereiche der Dilatatoren allgemein nicht mit $\mathfrak{M}$ übereinstimmen, so kann man die Summe zweier Dilatatoren T_1, T_2 mit der Summe von Operatoren $T_1 + T_2$ nicht definieren. Hier wollen wir die Summe zweier Dilatatoren passend definieren, und zeigen, dass alle Dilatatoren unter dieser Summenrelation einen teilweise geordneten Modul bilden.

Satz 7.1 $T_1, T_2, \dots, T_\kappa$ seien Dilatatoren bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \dots, \mathfrak{D}_\kappa$. Dann gehört mindestens ein vollständiges Element zu $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_\kappa$.

Beweis Nach Satz 6.12 gibt es ein vollständiges p_ν in $\mathfrak{D}_\nu$ ($\nu=1, 2, \dots, \kappa$). Setzt man $p_0 = |p_1| \cap |p_2| \cap \dots \cap |p_\kappa|$, so ist $[p_0] = [p_1][p_2] \dots [p_\kappa] = I$, und p_0 ist nach Satz 6.14 in jedem $\mathfrak{D}_\nu$ enthalten.

Satz 7.2 Für jeden Projektor P und jedes vollständige p gilt

$$[Pa, p] = [a, p]P.$$

Beweis Nach Satz 6.3 ist $[a, p]P$ ein Dilatator, und

$$[Pa, p]p = Pa, \quad [a, p]Pp = P[a, p]p = Pa$$

gilt. Daher erhält man nach Satz 6.15 $[Pa, p] = [a, p]P$.

Satz 7.3 Gegeben seien Dilatatoren T_1, T_2, T_3 bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$. Wenn für ein vollständiges p in $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3$

$$T_1p + T_2p = T_3p$$

gilt, so ist $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3$, und für jedes $x \in \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$

$$T_1x + T_2x = T_3x.$$

Beweis Sei

$$T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(1)}, \quad T_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(2)},$$

und für $\alpha > 0$ $F_\alpha^{(1)} = E_\alpha^{(1)} - E_{-\alpha}^{(1)}$, $F_\alpha^{(2)} = E_\alpha^{(2)} - E_{-\alpha}^{(2)}$, so gilt für jedes x

$$|T_1 F_\alpha^{(1)} x| \leq \alpha |x|, \quad |T_2 F_\alpha^{(2)} x| \leq \alpha |x|.$$

Da für jedes $x \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ nach Satz 6.3

$$F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} (T_1 + T_2)x = (T_1 + T_2) F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} x = [F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} T_3 p, p]x,$$

und nach Satz 7.2

$$[F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} T_3 p, p]x = [T_3 p, p] F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} x = T_3 F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} x$$

ist, gilt

$$F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} (T_1 + T_2)x = T_3 F_\alpha^{(1)} F_\alpha^{(2)} x.$$

Indem man $\alpha \rightarrow \infty$ lässt, erhält man nach Abgeschlossenheit von T_3

$$x \in \mathfrak{D}_3 \quad \text{und} \quad (T_1 + T_2)x = T_3 x.$$

Definition 7.1 Es seien zwei Dilatatoren T_1, T_2 mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$. Da man für jedes vollständige $p \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ nach Satz 7.3 durch $[T_1 p + T_2 p, p]$ denselben Dilatator erhält, nennen wir diesen Dilatator die *Summe von T_1, T_2* und bezeichnen mit $T_1 \oplus T_2$. Unter $T_1 \ominus T_2$ verstehen wir $T_1 \oplus (-T_2)$.

Nach Obigem gilt dann offenbar

Satz 7.4 Für Dilatatoren T_1, T_2 bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ umfasst der Definitionsbereich von $T_1 \oplus T_2$ $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$, und für jedes $x \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ gilt

$$T_1 \oplus T_2 x = (T_1 + T_2)x.$$

Satz 7.5

$$T_1 \oplus T_2 = T_2 \oplus T_1,$$

$$T_1 \ominus T_1 = T_1 \oplus (-T_1) = 0,$$

$$(T_1 \oplus T_2) \oplus T_3 = T_1 \oplus (T_2 \oplus T_3),$$

$$a(T_1 \oplus T_2) = aT_1 \oplus aT_2$$

für beliebige Zahl a .

Daher bilden alle Dilatatoren unter dieser Summenrelation einen Modul.

Satz 7.6 T_1, T_2 seien Dilatatoren mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1$, bzw. $\mathfrak{D}_2$. Wenn für ein positives vollständiges $p \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ $T_1 p \geq T_2 p$ gilt, so ist auch $T_1 x \geq T_2 x$ für jedes positive $x \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$.

Beweis Sei a ein positives Element in $\mathfrak{M}$, und

$$a = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda p = T_0 p,$$

so gilt

$$T_0 E_\alpha T_1 p \geq T_0 E_\alpha T_2 p \quad (\alpha > 0),$$

denn $T_0 E_\alpha$ ist positiv. Da $T_0 E_\alpha$ beschränkt ist, erhält man nach Satz 6.9

$$T_1 T_0 E_\alpha p \geq T_2 T_0 E_\alpha p,$$

folglich

$$T_1 E_\alpha a \geq T_2 E_\alpha a.$$

Wenn $a \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ ist, so gilt daher

$$E_\alpha T_1 a \geq E_\alpha T_2 a,$$

und für $\alpha \rightarrow \infty$ $T_1 a \geq T_2 a$.

Definition 7.2 T_1, T_2 seien zwei Dilatatoren bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$. Wenn für ein positives vollständiges $p \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$ $T_1 p \geq T_2 p$ gilt, so schreibt man $T_1 \geq T_2$.

Aus Definition 7.2 und Satz 7.6 erhält man sofort

Satz 7.7 Wenn $T_1 \geq T_2$ und gleichzeitig $T_2 \geq T_1$ gilt, so ist $T_1 = T_2$.

Wegen Satzes 7.1 erhält man leicht

Satz 7.8 Aus $T_1 \geq T_2$ und $T_2 \geq T_3$ folgt $T_1 \geq T_3$.

Satz 7.9 Aus $T_1 \geq T_2$ folgt $T_1 \oplus T_3 \geq T_2 \oplus T_3$.

Satz 7.10 T_1, T_2, T_3 seien Dilatatoren bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$. Wenn für ein positives vollständiges p in $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3$

$T_1 p \wedge T_2 p = T_3 p$ oder $T_1 p \vee T_2 p = T_3 p$ gilt, so ist $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3$ und bzw. $T_1 x \wedge T_2 x = T_3 x$ oder $T_1 x \vee T_2 x = T_3 x$ für jedes positive $x \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$.

Beweis a sei ein positives Element in $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$, und

$$T_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda, \quad F_\alpha = E_\alpha - E_{-\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

Aus $T_3 p = T_1 p \wedge T_2 p$ folgt nach Satz 7.6

$$T_3 F_\alpha a \leq (T_1 F_\alpha a) \wedge (T_2 F_\alpha a) = F_\alpha (T_1 a \wedge T_2 a).$$

Setzt man $b = T_1 a \wedge T_2 a$, so ist

$$[a]b = ([a]T_1 a) \wedge ([a]T_2 a) = (T_1[a]a) \wedge (T_2[a]a) = b.$$

Daher gibt es einen Dilatator T_0 , für welchen $b = T_0 a$ ist. Da $T_0 F_\alpha a = F_\alpha b \geq T_3 F_\alpha a$ ist, erhält man, indem man nur in $[a]\mathfrak{M}$ betrachtet, nach Satz 7.6

$$T_0 F_\alpha [a]p \geq T_3 F_\alpha [a]p.$$

Andererseits ist auch wegen $T_0 a \leq T_1 a, \leq T_2 a$

$$\begin{aligned} T_3 F_\alpha[a]p &= F_\alpha[a]T_3 p = F_\alpha[a](T_1 p \cap T_2 p) \\ &= F_\alpha\{(T_1[a]p) \cap (T_2[a]p)\} \geq F_\alpha T_0[a]p = T_0 F_\alpha[a]p. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$T_3 F_\alpha[a]p = T_0 F_\alpha[a]p.$$

Demzufolge gilt nach Satz 6.15

$$T_3 F_\alpha[a] = T_0 F_\alpha[a],$$

folglich $T_3 F_\alpha a = T_0 F_\alpha a = F_\alpha b$,

Für $\alpha \rightarrow \infty$ erhält man nach Abgeschlossenheit von T_3

$$a \in \mathfrak{D}_3 \quad \text{und} \quad T_3 a = b.$$

Wenn $T_1 p \cup T_2 p = T_3 p$ ist, so gilt

$$(-T_1)p \cap (-T_2)p = (-T_3)p.$$

Nach Obigem besteht es dann für jedes positive $a \in \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2$

$$(-T_1)a \cap (-T_2)a = (-T_3)a \quad \text{d.h.} \quad T_1 a \cup T_2 a = T_3 a.$$

Satz 7.11 Für je zwei Dilatatoren T_1, T_2 existieren $T_1 \cap T_2, T_1 \cup T_2$ eindeutig, d.h. es gibt einen Dilatator $A = T_1 \cap T_2$, so dass $A \leq T_1, \leq T_2$ und $A \geq X$ für jedes $X \leq T_1, \leq T_2$; und einen Dilatator $B = T_1 \cup T_2$, so dass $B \geq T_1, \geq T_2$ und $B \leq Y$ für jedes $Y \geq T_1, \geq T_2$.

Wenn für $p \geq 0$ $T_1 p, T_2 p$ beide sinnvoll sind, so sind $(T_1 \cap T_2)p, (T_1 \cup T_2)p$ auch sinnvoll, und

$$(T_1 \cap T_2)p = T_1 p \cap T_2 p, \quad (T_1 \cup T_2)p = T_1 p \cup T_2 p.$$

Beweis p sei ein positives vollständiges Element gemeinsam in den beiden Definitionsbereichen von T_1, T_2 . Sei $a = T_1 p \cap T_2 p$, so ist $[a, p] \leq T_1, \leq T_2$ und für beliebiges $X \leq T_1, \leq T_2$ nach Satz 7.10

$$Xq \leq T_1 q \cap T_2 q = [a, p]q,$$

falls q ein positives vollständiges Element in allen Definitionsbereichen von T_1, T_2, X ist. Daher erhält man nach Definition 7.2 $X \leq [a, p]$.

Für $T_1 \cup T_2$ kann man die Behauptung ähnlich beweisen. Die letzte Behauptung folgt sofort aus Satz 7.10.

Satz 7.12 T_1, T_2 seien zwei Dilatatoren bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$. Aus $T_1 \geq T_2 \geq 0$ folgt $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$.

Beweis Sei

$$T_1 = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda^{(1)}, \quad T_2 = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda^{(2)},$$

und p ein beliebiges positives Element in $\mathfrak{D}_1$, so gilt für $\alpha > 0$

$$T_1 p \geq T_1 E_\alpha^{(2)} p \geq T_2 E_\alpha^{(2)} p = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda^{(2)} p.$$

Hieraus kann man leicht einsehen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \lambda dE_\lambda^{(2)} p$$

konvergiert. Daher ist $p \in \mathfrak{D}_2$. Da p ein beliebiges positives Element in $\mathfrak{D}_1$ ist, erhält man nach Satz 6.14 $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$.

Satz 7.13 *Es sei eine absteigende Folge positiver Dilatatoren $T_1 \geq T_2 \geq \dots$, $T_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Wenn für ein positives vollständiges p $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu p = T_0 p$ ist, so gilt*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu x = T_0 x$$

für jedes x im Definitionsbereich eines von $T_1, T_2, \dots$.

Beweis Man kann nach Satz 7.12 ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass x zum Definitionsbereich von T_1 gehört. Sei

$$x_+ = \int_0^\infty \lambda dF_\lambda p = Sp,$$

und $\alpha = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu x_+$, so gilt für $\alpha > 0$ nach Satz 6.8

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} SF_\alpha T_\nu p = SF_\alpha T_0 p,$$

und folglich nach Satz 6.9 wegen $x_+ = Sp$

$$F_\alpha \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu x_+ = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu F_\alpha x_+ = T_0 F_\alpha x_+ = F_\alpha T_0 x_+,$$

denn, da wegen $T_\nu p \geq T_0 p \geq 0$ nach Satz 7.6 $T_\nu \geq T_0 \geq 0$ sein soll, gehört x_+ zum Definitionsbereich von T_0 . Für $\alpha \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu x_+ = T_0 x_+.$$

Indem man x durch $-x$ ersetzt, erhält man

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu x_- = T_0 x_-.$$

Daher gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu x = T_0 x .$$

Satz 7.14 Für jede absteigende Folge positiver Dilatatoren $T_1 \geq T_2 \geq \dots$, $T_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$) gibt es $T_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu$, d. h. $T_\nu \geq T_0$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und $T_0 \geq X$ für jedes $X \leq T_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$).

Beweis p sei ein positives vollständiges Element im Definitionsbereich von T_1 . Wegen

$$T_1 p \geq T_2 p \geq \dots, \quad T_\nu p \geq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

existiert der Limes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu p$. Setzt man

$$T_0 = [\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu p, p],$$

so gilt nach Satz 7.6 $T_\nu \geq T_0 \geq 0$, da $T_0 p = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu p \leq T_\nu p$ gilt. Für jedes $X \leq T_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) gehört p nach Satz 7.12 zum Definitionsbereich von $X \cup 0$, und wegen $(X \cup 0) \leq T_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$), $(X \cup 0)p \leq T_\nu p$. Demnach gilt

$$(X \cup 0)p \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu p = T_0 p .$$

Daher erhält man nach Satz 7.6

$$X \leq (X \cup 0) \leq T_0 .$$

Nach Obigem kann man leicht einsehen, dass die Menge aller Dilatatoren auch ein teilweise geordneter Modul ist. Diesen Modul bezeichnen wir im folgenden mit $\overline{\mathfrak{M}}$.

Für Dilatatoren kann man daher auch

$$X_+ = X \cup 0, \quad X_- = (-X)_+, \\ |X| = X_+ \oplus X_-$$

in derselben Weise wie in $\mathfrak{M}$ definieren, und dieselben Relationen in §1, 2 bestehen ohne weiters.

Wenn $|T| \wedge |R| = 0$ ist, so heissen zwei Dilatatoren T, R wie in $\mathfrak{M}$ zueinander orthogonal.

Satz 7.15 Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ eines Dilators T stimmt mit dem von $|T|$, und für jedes $x \in \mathfrak{D}$ gilt $|Tx| = |T| |x|$.

Beweis Nach Satz 7.11 umfassen die Definitionsbereiche von T_+ , T_- beide $\mathfrak{D}$. Daher enthält der Definitionsbereich von $|T|$ $\mathfrak{D}$ nach Satz 7.3. Andererseits, wenn $|T|x$ sinnvoll ist, so sind T_+x, T_-x nach Satz 7.12 beide sinnvoll, und folglich gehört x nach Satz 7.3 zu $\mathfrak{D}$.

Für jedes $x \in \mathfrak{D}$ gilt wegen $T_+|x| \wedge T_-|x| = 0$

$$\begin{aligned} |T|x| &= |T_+|x| - T_-|x|| \\ &= T_+|x| + T_-|x| = |T||x|. \end{aligned}$$

Daher erhält man nach Satz 6.13 $|Tx| = |T||x|$.

Satz 7.16 Sei p, q im Definitionsbereich eines Dilators T , und p vollständig, so gilt

$$[Tp] \geq [Tq].$$

Daher, wenn q auch vollständig ist, gilt

$$[Tp] = [Tq].$$

Beweis Da nach Satz 3.18; 7.2 für ein vollständiges $p \in \mathfrak{D}$

$$[Tp][Tq] = [[Tp]Tq] = [[Tp][Tp, p]q] = [[Tp, p]q] = [Tq]$$

gilt, erhält man nach Satz 3.16

$$[Tq] \leq [Tp].$$

Satz 7.17 Wenn für irgendzwei vollständige p, q

$$|Tp| \wedge |Sq| = 0$$

gilt, so sind zwei Dilatoren T, S zueinander orthogonal, und für beliebige x, y

$$|Tx| \wedge |Sy| = 0,$$

falls Tx, Sy beide sinnvoll sind.

Beweis Da $|Tp| \wedge |Sq| = 0$ mit $[Tp][Sq] = 0$ gleichbedeutend ist, so gilt nach Satz 7.16

$$|Tx| \wedge |Sy| = 0$$

für jedes x, y , falls Tx, Sy beide sinnvoll sind.

Da nach Satz 7.1 für ein passend gewähltes, vollständiges p Tp, Sp beide sinnvoll sind, gilt daher

$$|Tp| \wedge |Sp| = 0,$$

folglich nach Satz 7.15

$$|T||p| \wedge |S||p| = 0.$$

Daher sind T, S nach Satz 7.11 zueinander orthogonal.

Definition 7.3 $\mathfrak{M}$ sei ein teilweise geordneter Modul. Wenn für jede Folge derartiger Elemente $a_1, a_2, \dots$, dass $|a_\nu| \wedge |a_\mu| = 0$ ($\nu \neq \mu$) ist, stets $a_1 + a_2 + \dots$ konvergiert, so heisst der Modul $\mathfrak{M}$ *vollkommen*.

Satz 7.18 Der Modul aller Dilatatoren $\overline{\mathfrak{M}}$ ist vollkommen: Für jede Folge von Dilatatoren $T_1, T_2, \dots$, wenn $|T_\nu| \wedge |T_\mu| = 0$ für $\nu \neq \mu$ ist, so ist die Reihe

$$T_1 \oplus T_2 \oplus \dots$$

konvergent.

Beweis Sei m ein positives vollständiges Element, so gibt es nach Satz 6.12 ein positives vollständiges p_ν , für das

$$|T_\nu p_\nu| \leq m, \quad p_\nu \leq m \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist. Dann gilt auch

$$|T_\nu p_\nu| \leq [T_\nu p_\nu]m, \quad [T_\nu p_\nu]p_\nu \leq [T_\nu p_\nu]m.$$

Da nach Satz 7.17

$$|T_\nu p_\nu| \wedge |T_\mu p_\mu| = 0 \quad (\nu \neq \mu)$$

sein soll, sind zwei Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [T_\nu p_\nu]p_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} T_\nu p_\nu$$

beide absolut konvergent, denn es gilt nach Satz 1.6

$$\begin{aligned} & [T_1 p_1]m + [T_2 p_2]m + \dots + [T_\nu p_\nu]m \\ &= [T_1 p_1]m \vee [T_2 p_2]m \vee \dots \vee [T_\nu p_\nu]m \leq m. \end{aligned}$$

Setzt man $P_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [T_\nu p_\nu]$, so ist

$$p_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} [T_\nu p_\nu]p_\nu + (I - P_0)m$$

ein vollständiges Element, weil

$$[p_0] = \sum_{\nu=1}^{\infty} [T_\nu p_\nu][p_\nu] + (I - P_0)[m] = P_0 + (I - P_0) = I.$$

Daher erhält man durch

$$T_0 = \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} |T_\nu p_\nu|, p_0 \right]$$

einen Dilatator, und für diesen Dilatator gilt nach Satz 7.2

$$T_0[T_\nu p_\nu]p_0 = [|T_\nu p_\nu|, p_0]p_0 = |T_\nu p_\nu| = |T_\nu[T_\nu p_\nu]p_\nu|.$$

Da $[T_\nu p_\nu]p_0 = [T_\nu p_\nu]p_\nu$ sein soll, erhält man nach Satz 6.14; 7.16; 6.13

$$\begin{aligned} T_0(p_0 \cap p_\nu) &\geq [T_\nu p_\nu]T_0(p_0 \cap p_\nu) = T_0[T_\nu p_\nu]p_0 \\ &= |T_\nu[T_\nu p_\nu]p_\nu| = |T_\nu[T_\nu p_\nu](p_0 \cap p_\nu)| \\ &= |[T_\nu p_\nu]T_\nu(p_0 \cap p_\nu)| = |T_\nu(p_0 \cap p_\nu)| \\ &= |T_\nu|(p_0 \cap p_\nu). \end{aligned}$$

Daher gilt nach Definition 7.2 wegen $[p_0 \cap p_\nu] = [p_0][p_\nu] = I$

$$T_0 \geq |T_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Hieraus kann man leicht einsehen, dass die Reihe $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots$ absolut konvergiert.

§8. Produkt der Dilatatoren Nun wollen wir das Produkt zweier Dilatatoren definieren.

Satz 8.1 Wenn zwei Dilatatoren T_1, T_2 beide beschränkt sind, so ist $T_1 T_2$ auch ein beschränkter Dilatator, und es gilt $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Beweis $T_1 T_2$ ist nach Definition 6.1 offenbar ein Dilatator, und nach Satz 6.16; 6.9 gilt $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Sei

$$|T_1 x| \leq \alpha |x|, \quad |T_2 x| \leq \beta |x|,$$

so gilt

$$|T_1 T_2 x| \leq \alpha |T_2 x| \leq \alpha \beta |x|.$$

Daher ist $T_1 T_2$ beschränkt.

Satz 8.2 Für endlich viele Dilatatoren $T_1, T_2, \dots, T_x$ gibt es stets ein vollständiges Element p , für das $T_1 T_2 \dots T_x p$ sinnvoll ist. Wenn $T_1 T_2 \dots T_x p$ sinnvoll ist, so ist für jedes x , $|x| \leq |p|$, auch $T_1 T_2 \dots T_x x$ sinnvoll.

Beweis T_1, T_2 seien zwei Dilatatoren bzw. mit den Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ und p_1 sei ein vollständiges Element in $\mathfrak{D}_1$. Da nach Satz 6.14 aus $|x| \leq |p_1|$ $x \in \mathfrak{D}_1$ folgt, und nach Satz 6.12 ein derartiges positives vollständiges Element p_2 existiert, dass $p_2 \in \mathfrak{D}_2$ und $|T_2 p_2| \leq |p_1|$ gilt, ist für solches p_2 $T_1 T_2 p_2$ sinnvoll, d.h. es gibt stets ein positives vollständiges p , für das $T_1 T_2 p$ sinnvoll ist.

Wenn $T_1 T_2 p$ sinnvoll ist, so ist nach dem Satz 6.14 für jedes x , $|x| \leq |p|$, auch $T_1 T_2 x$ sinnvoll. Daher kann man durch Induktion diesen Satz leicht beweisen.

Satz 8.3 Gegeben seien Dilatatoren T_1, T_2, T_3 . Wenn für ein vollständiges p $T_1 T_2 p = T_3 p$ ist, so gilt

$$T_1 T_2 x = T_3 x$$

für jedes x , falls $T_1 T_2 x$ sinnvoll ist.

Beweis Sei für Zerlegungen der Identität $E_\lambda^{(1)}, E_\lambda^{(2)}, E_\lambda^{(3)}$

$$T_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

und
$$P_\alpha^{(\nu)} = E_\alpha^{(\nu)} - E_{-\alpha}^{(\nu)} \quad (\alpha > 0),$$

so ist $T_\nu P_\alpha^{(\nu)}$ ein beschränkter Dilatator, und

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P_\alpha^{(\nu)} = I.$$

Da aus $T_1 T_2 p = T_3 p$

$$P_\beta^{(3)}(T_1 P_\alpha^{(1)})(T_2 P_\alpha^{(2)})p = P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} T_3 P_\beta^{(3)} p \quad (\alpha, \beta > 0)$$

folgt, und nach Satz 8.1

$$P_\beta^{(3)}(T_1 P_\alpha^{(1)})(T_2 P_\alpha^{(2)}), \quad P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} T_3 P_\beta^{(3)}$$

beide auch beschränkte Dilatatoren sind, so gilt für jedes x

$$P_\beta^{(3)}(T_1 P_\alpha^{(1)})(T_2 P_\alpha^{(2)})x = P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} T_3 P_\beta^{(3)} x.$$

Wenn $T_1 T_2 x$ sinnvoll ist, so ist

$$P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} P_\beta^{(3)} T_1 T_2 x = P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} T_3 P_\beta^{(3)} x.$$

Für $\alpha \rightarrow \infty$ erhält man

$$P_\beta^{(3)} T_1 T_2 x = T_3 P_\beta^{(3)} x.$$

Indem man $\beta \rightarrow \infty$ lässt, kann man hieraus nach Abgeschlossenheit von T_3 schliessen, dass $T_3 x$ auch sinnvoll ist, und $T_1 T_2 x = T_3 x$.

Definition 8.1 T_1, T_2 seien zwei Dilatatoren, und p ein vollständiges Element, für das $T_1 T_2 p$ sinnvoll ist. Dann erhält man nach Satz 8.3 durch $[T_1 T_2 p, p]$ für jedes solche p denselben Dilatator. Diesen Dilatator bezeichnet man mit $T_1 \circ T_2$. Der Definitionsbereich von $T_1 \circ T_2$ enthält dann nach Satz 8.3 alle x , für die $T_1 T_2 x$ sinnvoll ist.

Satz 8.4

$$T \circ I = I \circ T = T.$$

Satz 8.5

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$$

$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$$

$$T_1 \circ (T_2 \oplus T_3) = (T_1 \circ T_2) \oplus (T_1 \circ T_3).$$

Beweis Sei für Zerlegungen der Identität $E_\lambda^{(1)}, E_\lambda^{(2)}, E_\lambda^{(3)}$

$$T_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

und

$$P_\alpha^{(\nu)} = E_\alpha^{(\nu)} - E_\alpha^{(\nu)} \quad (\alpha > 0),$$

so ist $T_\nu P_\alpha^{(\nu)}$ beschränkt. Für jedes x gilt dann nach Satz 8.1

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2) P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} x &= (T_1 P_\alpha^{(1)}) (T_2 P_\alpha^{(2)}) x \\ &= (T_2 P_\alpha^{(2)}) (T_1 P_\alpha^{(1)}) x = (T_2 \circ T_1) P_\alpha^{(2)} P_\alpha^{(1)} x. \end{aligned}$$

Wenn p ein vollständiges Element gemeinsam in den beiden Definitionsbereichen von $T_1 \circ T_2$ und $T_2 \circ T_1$ ist, (solches p existiert stets nach Satz 7.1) so gilt

$$P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} (T_1 \circ T_2) p = P_\alpha^{(1)} P_\alpha^{(2)} (T_2 \circ T_1) p.$$

Indem man $\alpha \rightarrow \infty$ lässt, erhält man

$$T_1 \circ T_2 p = T_2 \circ T_1 p.$$

Daher ist nach Satz 6.15

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1.$$

Ganz ähnlich kann man auch die anderen beweisen.

Satz 8.6 Aus $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ folgt $T_1 \circ T_2 \geq 0$.

Beweis p sei ein positives vollständiges Element, für das $T_1 T_2 p$ sinnvoll ist. Dann ist wegen $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$

$$T_1 T_2 p \geq 0,$$

und folglich

$$(T_1 \circ T_2) p \geq 0.$$

Nach Definition 7.2 gilt daher

$$T_1 \circ T_2 \geq 0.$$

Definition 8.2 T sei ein Dilatator mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}$. Für jedes vollständige $p \in \mathfrak{D}$ erhält man nach Satz 7.16 durch $[Tp]$ denselben Projektor. Diesen Projektor bezeichnet man mit $[T]$

Satz 8.7 $[Tx] = [T][x]$.

Beweis p sei ein vollständiges Element im Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ von T . Da nach Satz 3.19

$$[x + (I - [x])p] = [x] + (I - [x])[p] = I$$

sein soll, ist für $x \in \mathfrak{D}$ das Element

$$x + (I - [x])p$$

vollständig, und zwar gehört es zum $\mathfrak{D}$. Daher gilt nach Satz 7.16

$$[T(x + (I - [x])p)] = [T].$$

Hieraus erhält man nach Satz 3.18

$$[T][x] = [x]T(x + (I - [x])p) = [Tx].$$

Satz 8.8
$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2].$$

Beweis $T_1 T_2 p$ sei sinnvoll, und p vollständig. Dann gilt nach Satz 8.7

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1 \circ T_2 p] = [T_1 T_2 p] = [T_1][T_2 p] = [T_1][T_2].$$

Satz 8.9 $|T_1| \wedge |T_2| = 0$
ist gleichbedeutend mit

$$T_1 \circ T_2 = 0.$$

Beweis Da nach Satz 3.18 $|T_1| \wedge |T_2| = 0$ mit $[T_1][T_2] = 0$ gleichbedeutend ist, so folgt dieser Satz aus Satz 8.8 sofort.

Satz 8.10 Aus $T \neq 0$ folgt $T \circ T > 0$.

Beweis Da $T_+ \wedge T_- = 0$ ist, erhält man nach Satz 8.9

$$T \circ T = (T_+ \ominus T_-) \circ (T_+ \ominus T_-) = (T_+ \circ T_+) \oplus (T_- \circ T_-) \geq 0.$$

Wenn $T \circ T = 0$ ist, so gilt

$$T_+ \circ T_+ = 0, \quad T_- \circ T_- = 0.$$

Hieraus folgt nach Satz 8.9

$$T_+ = T_+ \wedge T_+ = 0, \quad T_- = T_- \wedge T_- = 0.$$

Daher muss $T = 0$ sein.

Satz 8.11 Aus $I \wedge T = 0$ folgt $T = 0$.

Beweis Nach Satz 8.9 folgt aus $I \wedge T = 0$

$$T = I \circ T = 0.$$

Satz 8.12 Aus $T_1 \wedge T_2 = 0$ und $T_3 \geq 0$ folgt

$$(T_3 \circ T_1) \wedge (T_3 \circ T_2) = 0.$$

Beweis Da nach Satz 8.8

$$[T_3 \circ T_1][T_3 \circ T_2] = [T_3][T_1][T_2]$$

sein soll, folgt dieser Satz sofort aus Satz 3.18.

Satz 8.13 Wenn ein Dilatator T vollständig ist, so gibt es einen einzigen vollständigen Dilatator S , für welchen

$$S \circ T = I.$$

Diesen S bezeichnen wir mit T^{-1} . Wenn weiterhin $T \geq 0$ ist, so ist $T^{-1} \geq 0$.

Beweis Sei $T = [a, p]$ vollständig, so ist a nach Satz 6.18 vollständig. Daher erhält man durch

$$S = [p, a]$$

einen Dilatator, für den

$$S \circ T = [p, p] = I$$

gilt. Solches S ist eindeutig bestimmt. Denn, wenn für ein anders S' $S' \circ T = I$ ist, so gilt

$$S \circ (T \circ S') = S \circ I = S.$$

Da andererseits

$$S \circ (T \circ S') = (S \circ T) \circ S' = I \circ S' = S'$$

sein soll, muss $S = S'$ sein.

Wenn weiterhin $T > 0$ ist, so kann man $T = [a, p]$ mit $a > 0$, $p > 0$ schreiben. Daher gilt auch $S = [p, a] > 0$.

Satz 8.14 $|T \circ S| = |T| \circ |S|.$

Beweis Aus

$$\begin{aligned} S \circ T &= (S_+ \oplus S_-) \circ (T_+ \oplus T_-) \\ &= \{(S_+ \circ T_+) \oplus (S_- \circ T_-)\} \oplus \{(S_- \circ T_+) \oplus (S_+ \circ T_-)\} \end{aligned}$$

folgt nach Satz 8.12; 1.16

$$\begin{aligned} |S \circ T| &= \{(S_+ \circ T_+) \oplus (S_- \circ T_-)\} \oplus \{(S_- \circ T_+) \oplus (S_+ \circ T_-)\} \\ &= (S_+ \oplus S_-) \circ (T_+ \oplus T_-) = |S| \circ |T|. \end{aligned}$$

Satz 8.15 Wenn für eine Folge von Dilatatoren $L_1 \geq L_2 \geq \dots$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} L_v = 0$$

ist, so gilt auch für jeden Dilator $T \geq 0$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T \circ L_\nu = 0.$$

Beweis Da $T \circ L_\nu$ absteigend ist, so existiert der Limes

$$T_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T \circ L_\nu.$$

Setzt man $S = T \oplus I$, so gilt

$$S > T,$$

und S ist vollständig wegen $S \geq I$. Da $S \circ L_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) auch absteigend ist, so ist der Limes

$$S_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S \circ L_\nu$$

vorhanden. Dann gilt offenbar

$$0 \leq T_0 \leq S_0 \leq S \circ L_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Wegen Vollständigkeit von $S > 0$ existiert $S^{-1} > 0$, und es gilt

$$0 \leq S^{-1} \circ S_0 \leq S^{-1} \circ S \circ L_\nu = L_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Demzufolge muss $S^{-1} \circ S_0 = 0$ sein, und hieraus erhält man

$$S_0 = (S \circ S^{-1}) \circ S_0 = S \circ (S^{-1} \circ S_0) = 0.$$

Daher gilt $T_0 = 0$.

Satz 8.16 Wenn im Modul $\overline{\mathfrak{M}}$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = T_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu = S_0$$

ist, so gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu \circ S_\nu = T_0 \circ S_0.$$

Beweis Sei

$$|T_\nu \ominus T_0| \leq L_\nu, \quad |S_\nu \ominus S_0| \leq K_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

$$L_1 \geq L_2 \geq \dots, \quad K_1 \geq K_2 \geq \dots$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu = 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} K_\nu = 0,$$

so gilt

$$\begin{aligned} |(T_\nu \circ S_\nu) \ominus (T_0 \circ S_0)| &\leq (|T_\nu| \circ |S_\nu \ominus S_0|) \oplus (|S_0| \circ |T_\nu \ominus T_0|) \\ &\leq \{(L_1 \oplus |T_0|) \circ |S_\nu \ominus S_0|\} \oplus (|S_0| \circ |T_\nu \ominus T_0|) \\ &\leq \{(L_1 \oplus |T_0|) \circ K_\nu\} \oplus (|S_0| \circ L_\nu). \end{aligned}$$

Daher erhält man nach Satz 8.15

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu \circ S_\nu = T_0 \circ S_0.$$

Satz 8.17 Die Menge aller beschränkten Dilatatoren ist überall dicht im Modul aller Dilatatoren $\overline{\mathfrak{M}}$.

Beweis Sei

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

ein beliebiger Dilatator, so ist $T(E_\alpha - E_{-\alpha})$ für $\alpha > 0$ ein beschränkter Dilatator, und es gilt nach Satz 8.16

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T(E_\alpha - E_{-\alpha}) = T.$$

Definition 8.3 Ein Dilatator heisst *regulär*, wenn sein Definitionsbereich aus allen Elementen im Modul $\mathfrak{M}$ besteht.

Satz 8.18 Für reguläre Dilatatoren gilt es:

1) Für reguläre Dilatatoren T, S sind $T \oplus S$, $T \circ S$, aS auch regulär, und

$$T \oplus S = T + S, \quad T \circ S = TS.$$

2) Für reguläre Dilatatoren T, S sind $T \wedge S$, $T \vee S$ auch regulär.

3) Wenn T regulär und $|S| \leq |T|$ ist, so ist S auch regulär.

4) Alle beschränkten Dilatatoren sind regulär.

5) Für reguläre Dilatatoren $T_1 \geq T_2 \geq \dots$, $T_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$), ist der Limes $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu$ auch regulär.

Beweis 1) folgt aus Satz 7.4, Definition 8.1; und 2) aus Satz 7.11. Nach Satz 7.12 und 7.15 gilt 3). 4) folgt aus Satz 6.16; 6.8, und man erhält 5) aus Satz 7.12.

Satz 8.19 Wenn $\mathfrak{M}$ vollkommen ist, so sind alle Dilatatoren regulär, und $\mathfrak{M}$ ist mit dem Modul aller Dilatatoren $\overline{\mathfrak{M}}$ isomorph.

Beweis Sei für die Zerlegung der Identität E_λ

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda,$$

so konvergieren die Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu}^{\nu+1} \lambda dE_\lambda x, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{-\nu-1}^{-\nu} \lambda dE_\lambda x$$

für jedes $x \in \mathfrak{M}$, wenn $\mathfrak{M}$ vollkommen ist. Daher ist T regulär.

Für ein positives vollständiges p kann man durch die Zuordnung

$$[x, p] \longleftrightarrow x$$

leicht schliessen, dass $\mathfrak{M}$ mit $\overline{\mathfrak{M}}$ isomorph ist.

Allgemeiner gilt für jedes positive vollständige p

$$[x, p] \oplus [y, p] = [x + y, p]$$

$$[x, p] \cap [y, p] = [x \cap y, p]$$

$$[x, p] \cup [y, p] = [x \cup y, p]$$

$$[a, p]_+ = [a_+, p], \quad [a, p]_- = [a_-, p]$$

$$|[a, p]| = [|a|, p].$$

$[x, p] > [y, p]$ ist mit $x > y$ gleichbedeutend.

$$[x_1, p] \geq [x_2, p] \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} [x_\nu, p] = [x_0, p]$$

ist gleichbedeutend mit

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0.$$

Daher, wenn man mit $\mathfrak{M}_p$ die Menge aller solchen Dilatatoren $[x, p]$ bezeichnet, ist $\mathfrak{M}_p$ auch ein teilweise geordneter Modul, und als Modul mit $\mathfrak{M}$ isomorph. $\mathfrak{M}_p$ ist aber als Teilmenge von $\overline{\mathfrak{M}}$ nicht immer mit $\mathfrak{M}$ isomorph, denn $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [x_\nu, p] = [x_0, p]$ folgt aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0$, aber nicht umgekehrt. In diesem Sinne nennen wir $\mathfrak{M}_p$ mit $\mathfrak{M}$ *algebraisch isomorph*.

Satz 8.20 Wenn in $\mathfrak{M}$ ein derartiges Element p vorhanden ist, dass $|x| \leq \nu |p|$ für jedes x mit passend grosser Zahl ν besteht, so ist jeder reguläre Dilatator beschränkt. $\mathfrak{M}_p$ ist dann mit $\mathfrak{M}$ algebraisch isomorph.

Beweis Wenn ein Dilatator T regulär ist, so kann man $T = [a, p]$ schreiben, da p vollständig sein soll. Dann ist $[a, p]$ nach Satz 6.16 beschränkt, denn für passend grosse Zahl ν ist $|a| \leq \nu |p|$.

§9. Teilweise geordnete Ringe Indem man die Summe und das Produkt von Dilatatoren definiert, hat man im früheren gefunden, dass alle Dilatatoren einen Abelschen Ring bilden. Hier wollen wir teilweise geordnete Ringe abstrakt definieren, und Relationen zwischen dem abstrakten Ring und dem Ring von Dilatatoren untersuchen.

Definition 9.1 Ein teilweise geordneter Modul $\mathfrak{R}$ heisst ein *teilweise geordneter Ring* oder ein *reeller Ring*, wenn das Produkt zweier Elemente wie folgt definiert ist:

- 1) $(ab)c = a(bc)$.
- 2) $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c)a = ba+ca$.
- 3) $(aa)b = a(ab) = a(ab)$ für jede reelle Zahl a .

4) Es gibt die Einheit $1 (> 0)$: $a1 = 1a = a$ für jedes a . Daher gibt es nur einzige Einheit.

5) Aus $a \geq 0$, $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$.

6) Aus $a \wedge 1 = 0$ folgt $a = 0$.⁽⁸⁾

6) ist offenbar gleichbedeutend mit dem

Satz 9.1 Die Einheit 1 ist vollständig.

Aus 5) folgt sofort

Satz 9.2 Wenn $a \geq b$, $c \geq 0$ ist, so gilt

$$ac \geq bc, \quad ca \geq cb.$$

Satz 9.3 Für je zwei Teile e_1, e_2 von 1 gilt

$$[e_2]e_1 = [e_1]e_2 = e_1e_2 = e_2e_1.$$

Beweis Da wegen $0 \leq e_1 = [e_1]1 \leq 1$, $0 \leq e_2 \leq 1$, nach Satz 9.2

$$0 \leq e_1(1-e_2) \leq 1-e_2$$

sein soll, gilt

$$0 \leq e_2 \cap \{e_1(1-e_2)\} \leq e_2 \cap (1-e_2) = 0,$$

und folglich

$$e_2 \cap \{e_1(1-e_2)\} = 0.$$

Wenn $e_2 \cap a = 0$ für ein a ist, so folgt aus $0 \leq e_1e_2 \leq e_2$

$$(e_1e_2) \cap a = 0.$$

Daher erhält man aus $e_1 = e_1e_2 + e_1(1-e_2)$ nach Satz 3.3

$$[e_2]e_1 = e_1e_2.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus $e_1 = e_2e_1 + (1-e_2)e_1$

$$[e_2]e_1 = e_2e_1.$$

Satz 9.4 Wenn $0 \leq a$ ist, so gilt für jedes x

$$|ax| \leq a|x|, \quad |xa| \leq |x|a.$$

Beweis

$$\begin{aligned} |ax| &= |ax_+ - ax_-| \leq |ax_+| + |ax_-| \\ &= ax_+ + ax_- \leq a|x|, \end{aligned}$$

und ähnlich

$$|xa| \leq |x|a.$$

Satz 9.5 ax und xa sind für $0 \leq a \leq x1$ beide stetig über x .

(8) 6) folgt aus der Bedingung: für $c \geq 0$ gilt $(a \cup b)c = ac \cup bc$ und auch $c(a \cup b) = ca \cup cb$. Denn, aus $a \wedge 1 = 0$ folgt $a \geq 0$ und $a+1 = a \cup 1$. Dann gilt

$$a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 = (a \cup 1)^2 = a^2 \cup a \cup 1 \leq a^2 + a + 1,$$

d.h. $a \leq 0$. Daher muss $a = 0$ sein.

Beweis Sei

$$|x_\nu - x_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0,$$

so gilt nach Satz 9.4; 9.2

$$|ax_\nu - ax_0| = |a(x_\nu - x_0)| \leq x |x_\nu - x_0| \leq x l_\nu$$

$$|x_\nu a - x_0 a| = |(x_\nu - x_0)a| \leq x |x_\nu - x_0| \leq x l_\nu.$$

Daher ergibt sich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} ax_\nu = ax_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu a = x_0 a.$$

Satz 9.6 Für jeden Teil der Einheit e gilt

$$[e]x = ex = xe.$$

Beweis Sei

$$[x, 1] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda, \quad E_\lambda 1 = e_\lambda,$$

so kann man schreiben:

$$x = \lim_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (e_{\lambda_\nu} - e_{\lambda_{\nu-1}}).$$

Dann gilt nach Satz 9.3

$$\begin{aligned} [e]x &= \lim_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu ([e]e_{\lambda_\nu} - [e]e_{\lambda_{\nu-1}}) \\ &= \lim_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (e_{\lambda_\nu} - e_{\lambda_{\nu-1}}) e \\ &= \lim_{\nu=1}^{\infty} e \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (e_{\lambda_\nu} - e_{\lambda_{\nu-1}}) \right\} = \lim_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (e_{\lambda_\nu} - e_{\lambda_{\nu-1}}) \right\} e. \end{aligned}$$

Daher erhält man nach Satz 9.5 $[e]x = ex = xe$.

Satz 9.7 $[a, 1]x = ax$.

Daher sind Dilatatoren $[a, 1]$ für alle a stets regulär.

Beweis Da nach Satz 9.6

$$[e](ax) = e(ax) = (ea)x = (ae)x = a(ex) = a[e]x$$

gilt, so ist a als der lineare Operator mit jedem Projektor P vertauschbar. Daher, wenn man die Abgeschlossenheit dieses Operators a beweisen kann, so ist a ein Dilator, und dann muss natürlich

$$ax = [a, 1]x$$

sein.

Nun wollen wir beweisen, dass der lineare Operator ax abgeschlossen ist. Dafür genügt es zu beweisen, dass ax über x stetig ist. Zuerst nehmen wir an, dass $a > 0$ ist. Setzt man für eine Zahl $x > 0$

$$P_x = [(x1-a)_+] ,$$

so gilt $P_\lambda \geq P_\mu$ für $\lambda > \mu$, und nach Satz 3.23

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_x \geq \lim_{x \rightarrow \infty} [(x1-a)_+] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}a_+\right)_+ \right] = [1] = I .$$

Da

$$P_x(x1-a) = (x1-a)_+ \geq 0$$

ist, erhält man

$$P_x a \leq x P_x 1 \leq x 1 .$$

Daher ist $(P_x a)x$ nach Satz 9.5 über x stetig. Sei für $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$,

$$|x_\nu - x_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) ,$$

so gilt nach Satz 9.4

$$|ax_\nu - ax_0| \leq a |x_\nu - x_0| \leq al_\nu ,$$

und $al_1 \geq al_2 \geq \dots$, $al_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Setzt man $\lim_{\nu \rightarrow \infty} al_\nu = a_0$, so gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_x(al_\nu) = P_x a_0 .$$

Da andererseits für den Teil der Einheit $e_x (= P_x 1)$ $P_x = [e_x]$ sein kann, gilt nach Satz 9.6

$$P_x(al_\nu) = e_x(al_\nu) = (e_x a)l_\nu = (P_x a)l_\nu .$$

Dann erhält man nach Stetigkeit von $(P_x a)x$ über x

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_x(al_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (P_x a)l_\nu = 0 .$$

Daher muss $P_x a_0 = 0$ sein. Da $x > 0$ beliebig ist, erhält man für $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_x a_0 = a_0 = 0 .$$

Damit ist die Stetigkeit von ax über x bewiesen. Im allgemeinen Falle folgt die Stetigkeit von ax aus der Stetigkeit von $a x$ und a_-x über x .

Satz 9.8 $ab = ba$

Beweis Da für jedes x nach Satz 9.7 und 8.5

$$abx = [a, 1][b, 1]x = [b, 1][a, 1]x = bax$$

gilt, so ist für $x = 1$

$$ab = ba .$$

Satz 9.9 Für $c \geq 0$ gilt

$$(a \wedge b)c = (ac) \wedge (bc)$$

$$(a \vee b)c = (ac) \vee (bc) .$$

Beweis Nach Satz 7.11 gilt

$$\begin{aligned} ac \wedge bc &= \{[a, 1]c\} \cap \{[b, 1]c\} \\ &= \{[a, 1] \cap [b, 1]\}c \\ &= [a \wedge b, 1]c = (a \wedge b)c . \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$ac \vee bc = (a \vee b)c .$$

Satz 9.10

$$|ab| = |a| |b| .$$

Beweis Da

$$ab = (a_+ - a_-)(b_+ - b_-) = (a_+b_+ + a_-b_-) - (a_+b_- + a_-b_+)$$

und nach Satz 9.9, wegen $a_+ \wedge a_- = 0$, $b_+ \wedge b_- = 0$,

$$(a_+b_+ + a_-b_-) \wedge (a_+b_- + a_-b_+) = 0$$

ist, so erhält man

$$|ab| = (a_+b_+ + a_-b_-) + (a_+b_- + a_-b_+) = |a| |b| .$$

Satz 9.11 $|a| \wedge |b| = 0$ ist mit $ab = 0$ gleichbedeutend, und allgemeiner gilt $[ab] = [a][b]$.

Beweis Wegen

$$ab = [a, 1][b, 1]1$$

gilt nach Satz 8.8 und Definition 8.2

$$[ab] = [[a, 1]][[b, 1]] = [a][b] .$$

Da $[a][b] = [|a| \wedge |b|]$ ist, kann man leicht einsehen, dass $|a| \wedge |b| = 0$ mit $ab = 0$ gleichbedeutend ist.

Satz 9.12 $a^2 = |a|^2 > 0$ für $a \neq 0$.

Beweis Nach Satz 9.11 gilt wegen $a_+ \wedge a_- = 0$

$$a^2 = (a_+ - a_-)^2 = a_+^2 + a_-^2 = (a_+ + a_-)^2 = |a|^2.$$

Aus $|a|^2 = 0$ folgt nach Satz 9.11 $|a| = |a| \wedge |a| = 0$.

Satz 9.13 *Dafür, dass e ein Teil der Einheit sei, ist notwendig und hinreichend, dass $e^2 = e$ ist.*

Beweis Wenn e ein Teil von 1 ist, so ist $[e, 1]$ nach Satz 6.19 ein Projektor. Daher gilt

$$e^2 = [e, 1][e, 1]1 = [e, 1]1 = e.$$

Umgekehrt, wenn $e^2 = e$ ist, so gilt nach Satz 9.12

$$1 - e = 1 - 2e + e^2 = (1 - e)^2 \geq 0.$$

Daher ist $0 \leq e \leq 1$. Setzt man $a = e \wedge (1 - e)$, so gilt nach Satz 9.9

$$ae = e^2 \wedge (e - e^2) = 0$$

$$a(1 - e) = (e - e^2) \wedge (1 - e)^2 = 0,$$

und folglich $a = 0$, d.h. e ist ein Teil von 1.

Im Beweis des Satzes 9.7 erhält man den

Satz 9.14 *ax ist stetig über x .*

Satz 9.15 *Aus*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = b_0$$

folgt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu b_\nu = a_0 b_0.$$

Beweis Man kann diesen Satz ganz ähnlich leicht wie Satz 2.7 beweisen.

Satz 9.16 *Für $a \geq 0$ und eine ganze Zahl $\nu > 0$ gibt es ein einziges $x \geq 0$, für das $x^\nu = a$ gilt. Dieses x bezeichnet man mit $a^{1/\nu}$.*

Beweis Sei

$$x = \int_0^\infty \lambda df_\lambda, \quad a = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$$

für die Zerlegungen e_λ, f_λ von 1, so gilt nach Satz 4.8

$$x^\nu = \int_0^\infty \lambda^\nu df_\lambda = \int_0^\infty \lambda df_{\lambda^{1/\nu}},$$

da $f_\lambda x = \int_0^\lambda \mu df_\mu$ ist. Wenn $x^\nu = a$ ist, so muss nach Eindeutigkeit von e_λ

$$f_{\lambda^{1/\nu}} = e_\lambda$$

sein. Umgekehrt, gilt für solches f_λ offenbar

$$x^\nu = a.$$

Satz 9.16 Aus $a > b \geq 0$ folgt

$$a^\nu > b^\nu, \quad a^{\frac{1}{\nu}} > b^{\frac{1}{\nu}}.$$

Beweis Da nach Eindeutigkeit von $x^{\frac{1}{\nu}}$ für $a > b \geq 0$ $a^\nu = b^\nu$ nicht sein kann, so gilt $a^\nu > b^\nu$.

Wenn $(a^{\frac{1}{\nu}} - b^{\frac{1}{\nu}})_- \neq 0$ ist, so gilt für $P = [(a^{\frac{1}{\nu}} - b^{\frac{1}{\nu}})_-]$

$$P(a^{\frac{1}{\nu}} - b^{\frac{1}{\nu}}) = -(a^{\frac{1}{\nu}} - b^{\frac{1}{\nu}})_- < 0 \quad \text{d.h.} \quad Pa^{\frac{1}{\nu}} < Pb^{\frac{1}{\nu}}.$$

Demzufolge gilt

$$Pa = (Pa^{\frac{1}{\nu}})^\nu < (Pb^{\frac{1}{\nu}})^\nu = Pb.$$

Daher, wenn $a > b \geq 0$ ist, so muss

$$(a^{\frac{1}{\nu}} - b^{\frac{1}{\nu}})_- = 0$$

sein, d.h.

$$a^{\frac{1}{\nu}} \geq b^{\frac{1}{\nu}}.$$

Da $a^{\frac{1}{\nu}} = b^{\frac{1}{\nu}}$ nicht sein kann, erhält man $a^{\frac{1}{\nu}} > b^{\frac{1}{\nu}}$.

Aus Satz 9.15 folgt sofort:

Satz 9.17 x^ν ist stetig über x

Satz 9.18 $x^{\frac{1}{\nu}}$ ist stetig über $x \geq 0$,

Beweis Wenn

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \dots \dots$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x_0 \geq 0$$

ist, so gilt nach Satz 9.16

$$x_1^{\frac{1}{\nu}} \geq x_2^{\frac{1}{\nu}} \geq \dots \dots \dots$$

Setzt man $\bar{x} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu^{\frac{1}{\nu}}$, so gilt

$$x_\mu^{\frac{1}{\nu}} \geq \bar{x} \quad (\mu = 1, 2, \dots),$$

und folglich

$$x_\mu \geq \bar{x}^\nu.$$

Daher muss $x_0 \geq \bar{x}^\nu$ sein, d.h. $x_0^{\frac{1}{\nu}} \geq \bar{x}$.

Andererseits folgt

$$x_0^{\frac{1}{\nu}} \leq \bar{x}$$

aus $x_0^{\frac{1}{\nu}} \leq x_\mu^{\frac{1}{\nu}}$ ($\mu = 1, 2, \dots$). Daher erhält man $\bar{x} = x_0^{\frac{1}{\nu}}$.

In ähnlicher Weise kann man für

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu = x_0$$

beweisen, dass $\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu^{\frac{1}{\nu}} = x_0^{\frac{1}{\nu}}$ ist.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Sei

$$|x_\mu - x_0| \leq l_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} l_\mu = 0,$$

so gilt

$$-l_\mu + x_0 \leq x_\mu \leq l_\mu + x_0 \quad (\mu = 1, 2, \dots).$$

Setzt man

$$k_\mu = \{(-l_\mu + x_0)_+\}^{\frac{1}{\nu}}, \quad h_\mu = (l_\mu + x_0)^{\frac{1}{\nu}},$$

so ist nach Obigem

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} k_\mu = x_0^{\frac{1}{\nu}}, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} h_\mu = x_0^{\frac{1}{\nu}}$$

und

$$k_\mu \leq x_\mu^{\frac{1}{\nu}} \leq h_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots).$$

Daher erhält man

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} x_\mu^{\frac{1}{\nu}} = x_0^{\frac{1}{\nu}}.$$

Aus Satz 9.7 folgt sofort

Satz 9.19 Die Menge aller regulären Dilatatoren ist mit $\mathfrak{R}$ algebraisch isomorph.

Satz 9.20 Dafür, dass ein teilweise geordneter Ring $\mathfrak{R}$ vollkommen sei, ist notwendig und hinreichend, dass jedes vollständige Element a das inverse a^{-1} besitzt.

Beweis Wenn der Ring $\mathfrak{R}$ vollkommen ist, so ist nach Satz 8.19 jeder Dilatator regulär. Folglich ist die Menge aller Dilatatoren mit $\mathfrak{R}$ isomorph. Daher besitzt jedes vollständige a nach Satz 8.13 das inverse a^{-1} .

Umgekehrt nehmen wir an, dass jedes vollständige Element $a \in \mathfrak{R}$ das inverse a^{-1} besitzt. T sei ein beliebiger Dilatator. Wenn man T in Gestalt

$$T = (T \cup I) \oplus (T \cap (-I)) \oplus \{(T \cap I) \cup (-I)\}$$

schreibt, so sind

$$(T \cup I)^{-1}, \quad \{T \cap (-I)\}^{-1}, \quad \{(T \cap I) \cup (-I)\}$$

alle beschränkt. Setzt man

$$a_1 = (T \cup I)^{-1}1, \quad a_2 = \{T \cap (-I)\}^{-1}1, \quad a_3 = \{(T \cap I) \cup (-I)\}1,$$

so ist a_1 und a_2 vollständig, da $(T \cup I)^{-1}$, $\{T \cap (-I)\}^{-1}$ beide vollständig sein sollen. Daher existieren die inversen a_1^{-1} , a_2^{-1} . Dann gilt

$$T = [a_1^{-1}, 1] \oplus [a_2^{-1}, 1] \oplus [a_3, 1] = [a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3, 1]$$

Folglich ist jeder Dilator regulär, und die Menge aller Dilatoren mit $\Re$ isomorph. Daher ist $\Re$ vollkommen.

Zuletzt wollen wir den, im folgenden anwendbaren, Satz angeben.

Satz 9.21 $[a, 1][b, 1] = [ab, 1]$

$$[a, p] \circ [b, q] = [ab, pq]$$

$$|[a, p]| = [|a|, |p|]$$

$$[a, p] \oplus [b, q] = [aq + bp, pq].$$

Beweis Die erste Gleichung folgt aus Satz 9.7 sofort. Da nach Satz 8.5

$$\begin{aligned} \{[a, p] \circ [b, q]\} \circ [pq, 1] &= \{[a, p] \circ [b, q]\} \circ \{[p, 1][q, 1]\} \\ &= \{[a, p][p, 1]\} \circ \{[b, q][q, 1]\} \\ &= [a, 1][b, 1] = [ab, 1] \end{aligned}$$

gilt, besteht es wegen $[pq] = [p][q] = 1$

$$[a, p] \circ [b, q] = [ab, 1][1, pq] = [ab, pq].$$

Da nach Satz 7.15

$$|[a, p]| |p| = |[a, p]p| = |a|$$

sein soll, gilt

$$|[a, p]| = [|a|, |p|].$$

Nach Obigem gilt

$$[a, p] = [a, p] \circ [q, q] = [aq, pq]$$

$$[b, q] = [b, q] \circ [p, p] = [bp, pq].$$

Daher erhält man

$$[a, p] \oplus [b, q] = [aq + bp, pq] .$$

III. Komplexe Ringe

§10. Komplexe Ringe Nun wollen wir komplexe Ringe aus teilweise geordneten Ringen herleiten, wie man im Falle komplexer Zahlen getan hat.

Definition 10.1 $\Re$ sei ein teilweise geordneter Ring. Durch $\Re + i\Re$ erhält man einen *komplexen Ring* $\mathfrak{R}$, d.h. $\mathfrak{R}$ besteht aus allen Elementen $z = a + ib$ für $a, b \in \Re$. Hierbei heisst a der *reelle Teil* von z , b der *imaginäre Teil* des komplexen Elementes z , und man bezeichnet bzw. mit $\Re z$ und $\Im z$.

Definition 10.2 Für jedes komplexe Element $z = a + ib$ heisst $a - ib$ das *konjugierte* von z , und man bezeichnet das konjugierte von z mit $\bar{z}$.

Definition 10.3 Die Summe und das Produkt zweier komplexen Elemente z_1, z_2 werden wie folgt definiert:

$$z_1 + z_2 = (\Re z_1 + \Re z_2) + i(\Im z_1 + \Im z_2)$$

$$z_1 z_2 = (\Re z_1 \Re z_2 - \Im z_1 \Im z_2) + i(\Re z_1 \Im z_2 + \Im z_1 \Re z_2) .$$

Aus Definition folgt sofort

Satz 10.1
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$z + \bar{z} = 2\Re z, \quad z - \bar{z} = 2i\Im z .$$

Satz 10.2
$$z1 = z \quad (1 = 1 + i0)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

$$a(\beta z) = (a\beta)z \quad \text{für komplexe Zahlen } a, \beta .$$

Definition 10.4 Den *absoluten Betrag* eines komplexen Elementes definiert man durch

$$|z| = \{(\Re z)^2 + (\Im z)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Aus Definition 10.4 folgt sofort

$$\begin{aligned} \text{Satz 10.3} \quad & |\Re z| \leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z|, \\ & |z| \leq |\Re z| + |\Im z|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Satz 10.4} \quad & z\bar{z} = |z|^2, \quad |z| = |\bar{z}|. \\ & |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad |az| = |a| |z|. \end{aligned}$$

$$\text{Satz 10.5} \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Wenn $z_1 z_2 = 0$ ist, so gilt

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Beweis Die obere Ungleichung kann man ähnlich wie im Falle komplexer Zahlen beweisen. Da $z_1 z_2 = 0$ mit $|z_1| |z_2| = 0$ gleichbedeutend ist, gilt nach Satz 10.3

$$|\Re z_1| |\Re z_2| = |\Im z_1| |\Im z_2| = 0.$$

Dann besteht

$$|z_1 + z_2|^2 = (\Re z_1 + \Re z_2)^2 + (\Im z_1 + \Im z_2)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

$$\text{d.h.} \quad |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Definition 10.5 Es sei eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$. Wenn für eine passende Folge reeller Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$,

$$|z_\nu - z_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

gilt, so heisst die Folge $z_1, z_2, \dots$ *konvergent*, und z_0 ihr Limes, den man mit

$$z_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu$$

bezeichnet.

Aus dieser Definition erhält man sofort

$$\text{Satz 10.6} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$$

gilt dann und nur dann, wenn gleichzeitig

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Re z_\nu = \Re z_0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Im z_\nu = \Im z_0$$

bestehen.

Satz 10.7 Aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = u_0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} v_\nu = v_0$ folgt für beliebige komplexe Zahlen α, β

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha u_\nu + \beta v_\nu) = \alpha u_0 + \beta v_0$$

und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (u_\nu v_\nu) = u_0 v_0.$$

Satz 10.8 Aus $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$ folgt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |z_\nu| = |z_0|$.

Wenn man Satz 10.6 und Satz 2.15 in Betracht zieht, so erhält man den

Satz 10.9 Gegeben sei eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$. Wenn für eine Folge reeller Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$, stets

$$|z_\mu - z_\lambda| \leq l_\nu \quad (\mu, \lambda \geq \nu, \nu = 1, 2, \dots)$$

gilt, so konvergiert die Folge $z_1, z_2, \dots$.

Definition 10.6 Wenn für eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$ der Limes

$$z_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (z_1 + z_2 + \dots + z_\nu)$$

existiert, so heisst die Reihe $z_1 + z_2 + \dots$ konvergent, und z_0 ihre Summe. Man schreibt dann

$$z_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu \quad \text{oder} \quad z_0 = z_1 + z_2 + \dots$$

Nach Satz 10.6 folgt aus Definition 10.6 sofort

Satz 10.10 Dafür, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, dass die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \Re z_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \Im z_\nu$ beide konvergent sind.

Definition 10.7 Eine Reihe $z_1 + z_2 + \dots$ heisst absolut konvergent, wenn die Reihe $|z_1| + |z_2| + \dots$ konvergiert.

Wenn man Satz 10.10; 2.14 in Betracht zieht, so erhält man den

Satz 10.11 Wenn die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ absolut konvergiert, so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ auch konvergent.

Nun wollen wir Projektoren in $\mathfrak{R}$ wie im Falle reeller Elemente definieren.

Definition 10.8 Zwei komplexe Elemente z_1, z_2 heissen zueinander orthogonal, wenn $|z_1| \wedge |z_2| = 0$ ist.

Satz 10.12 Aus $|u| \wedge |z_1| = 0$, $|u| \wedge |z_2| = 0$ folgt für komplexe Zahlen α, β

$$|u| \wedge |\alpha z_1 + \beta z_2| = 0.$$

Beweis Aus $|u| \wedge |z_1| = 0$, $|u| \wedge |z_2| = 0$ folgt nach Satz 1.12

$$|u| \wedge |\alpha z_1| = 0, \quad |u| \wedge |\beta z_2| = 0.$$

Nach Satz 10.5 gilt weiterhin

$$0 \leq |u| \wedge |\alpha z_1 + \beta z_2| \leq |u| \wedge (|\alpha z_1| + |\beta z_2|) = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 10.13 *Dafür, dass $|z_1| \wedge |z_2| = 0$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass $z_1 z_2 = 0$ gilt.*

Beweis Aus $|z_1| \wedge |z_2| = 0$ folgt nach Satz 10.3

$$|\Re z_1| \wedge |\Re z_2| = |\Re z_1| \wedge |\Im z_2| = |\Im z_1| \wedge |\Re z_2| = |\Im z_1| \wedge |\Im z_2| = 0.$$

Daher gilt nach Satz 9.11

$$\Re z_1 \Re z_2 = \Re z_1 \Im z_2 = \Im z_1 \Re z_2 = \Im z_1 \Im z_2 = 0,$$

folglich $z_1 z_2 = 0$. Dieses Verfahren kann man nach Satz 10.3 umkehren.

u sei ein komplexes Element. Wenn man die Menge aller, zu u orthogonalen, komplexen Elemente mit $\mathfrak{R}_u$ bezeichnet, so kann man nach Satz 10.12 leicht einsehen, dass $\mathfrak{R}_u$ ein Modul ist. Wenn man die Menge aller, zu jedem Element in $\mathfrak{R}_u$ orthogonalen, komplexen Elemente mit $\mathfrak{S}_u$ bezeichnet, so ist $\mathfrak{S}_u$ auch ein Modul. $\mathfrak{R}_u$ und $\mathfrak{S}_u$ haben nur einziges Element 0 gemeinsam.

Satz 20.14 *Jedes komplexe Element z lässt sich in eindeutiger Weise in Gestalt*

$$z = h + k, \quad h \in \mathfrak{S}_u, \quad k \in \mathfrak{R}_u$$

ausdrücken. Dieses h heisst die Projektion von z auf u , und man bezeichnet die Projektion mit $h = [u]z$.

Beweis Für den Projektor $[u]$ in $\mathfrak{R}$ gilt

$$[|u|] \Re z \in \mathfrak{S}_u, \quad \Re z - [|u|] \Re z \in \mathfrak{R}_u$$

$$[|u|] \Im z \in \mathfrak{S}_u, \quad \Im z - [|u|] \Im z \in \mathfrak{R}_u.$$

Setzt man

$$h = [|u|] \Re z + i [|u|] \Im z,$$

$$k = (\Re z - [|u|] \Re z) + i (\Im z - [|u|] \Im z),$$

so gilt

$$z = h + k, \quad h \in \mathfrak{S}_u, \quad k \in \mathfrak{R}_u.$$

Die Eindeutigkeit kann man ganz ähnlich wie im Beweis des Satzes 3.3 beweisen.

Definition 10.9 Aus

$$[u]z = [|u|] \Re z + i [|u|] \Im z$$

kann man leicht einsehen, dass $[u]$ ein linearer Operator in $\mathfrak{R}$. Diesen linearen Operator $[u]$ nennen wir den *Projektor*.

Dann gilt offenbar

$$\text{Satz 10.15} \quad [u] = [|u|] .$$

$$\text{Satz 10.16} \quad |[u]z| = [u]|z| ,$$

$$[u]wz = w[u]z = z[u]w .$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis} \quad |[u]z|^2 &= [|u|]\Re z + i[|u|]\Im z|^2 \\ &= ([|u|]\Re z)^2 + ([|u|]\Im z)^2 \\ &= [|u|](\Re z)^2 + [|u|](\Im z)^2 \\ &= [|u|]|z|^2 = ([|u|]|z|)^2 . \end{aligned}$$

Die untere Gleichung folgt aus Satz 9.6 sofort.

Nach Satz 10.15 folgt aus Sätzen 3.7; 3.18; 9.11; 3.21; 3.19

$$\text{Satz 10.17} \quad [u][u] = [u] ,$$

$$\begin{aligned} [[u]v] &= [[v]u] = [u][v] = [v][u] \\ &= [uv] = [|u| \wedge |v|] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= [|u| \vee |v|] + [|u| \wedge |v|] \\ &= [|u| + |v|] + [uv] . \end{aligned}$$

Wenn u und v zueinander orthogonal sind, so gilt

$$[u+v] = [u] + [v] .$$

Nach Satz 10.6 folgt aus Satz 3.24; 3.25

$$\text{Satz 10.18} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} [u_v]z = [u_0]z$$

gilt für jedes komplexe Element z , wenn

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [|u_v|] = [|u_0|]$$

in $\mathfrak{R}$ gilt.

Definition 10.10 Wenn $\mathfrak{S}_u < \mathfrak{S}_v$ ist, so schreibt man

$$[u] \leq [v] .$$

Da

$$\mathfrak{S}_u = \mathfrak{S}_{|u|} + i\mathfrak{S}_{|u|}$$

$$\mathfrak{R}_u = \mathfrak{R}_{|u|} + i\mathfrak{R}_{|u|}$$

sein sollte, so erhält man den

Satz 10.19 *Dafür, dass $[u] \leq [v]$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass $[|u|] \leq [v]$ in $\mathfrak{R}$ gilt.*

Satz 10.20 *Wenn $[u] \leq [v]$ ist, so gilt*

$$[u][v] = [v][u] = [u],$$

und umgekehrt.

Definition 10.11 Wenn $[u] = I$ ist, so heisst das komplexe Element u *vollständig* in $\mathfrak{R}$. Hier bedeutet I den identischen Operator.

Nach Satz 10.15 gilt dann der

Satz 10.21 *u ist vollständig dann und nur dann, wenn $|u|$ vollständig in $\mathfrak{R}$ ist.*

Definition 10.12 Ein komplexer Ring $\mathfrak{R}$ heisst *vollkommen*, wenn für jede Folge $z_1, z_2, \dots$, deren je zwei zueinander orthogonal sind, die Reihe $z_1 + z_2 + \dots$ stets konvergiert.

Nach Satz 10.6 gilt dann der

Satz 10.22 *Der komplexe Ring $\mathfrak{R}$ ist vollkommen dann und nur dann, wenn der entsprechende reelle Ring $\mathfrak{R}$ vollkommen ist.*

Satz 10.23 *Dafür, dass der komplexe Ring $\mathfrak{R}$ vollkommen sei, ist notwendig und hinreichend, dass jedes vollständige Element u sein inverses u^{-1} besitzt.*

Beweis Wenn $\mathfrak{R}$ vollkommen, und $z = x + iy$ vollständig in $\mathfrak{R}$ ist, so ist $|z|^2 = x^2 + y^2$ auch vollständig im entsprechenden reellen Ring $\mathfrak{R}$, und für das inverse u von $|z|^2$ gilt

$$z \cdot (\bar{z}u) = |z|^2 \cdot u = 1.$$

Daher ist $\bar{z}u$ das inverse von z .

Wenn jedes vollständige Element sein inverses besitzt, so ist der reelle Ring $\mathfrak{R}$ nach Satz 9.20 vollkommen. Daher ist $\mathfrak{R}$ nach Satz 10.22 auch vollkommen.

Satz 10.24 *Der komplexe Ring $\mathfrak{R}$ sei vollkommen. Wenn eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$ für Projektoren P_μ :*

$$0 = P_1 \leq P_2 \leq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu = P_0,$$

der Relation

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\mu z_\nu = P_\mu z_0 \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

genügt, so gilt auch

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_0 z_\nu = P_0 z_0 .$$

Beweis Sei

$$|P_\mu z_\nu - P_\mu z_0| \leq l_{\mu, \nu}$$

$$l_{\mu 1} \geq l_{\mu 2} \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_{\mu, \nu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots),$$

so gilt auch

$$|(P_\mu - P_{\mu-1})z_\nu - (P_\mu - P_{\mu-1})z_0| \leq (P_\mu - P_{\mu-1})l_{\mu, \nu} .$$

Da $\mathfrak{R}$ vollkommen ist, konvergiert die Reihe

$$l_\nu = \sum_{\mu=2}^{\infty} (P_\mu - P_{\mu-1})l_{\mu, \nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots) .$$

Dann gilt offenbar

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad l_\nu \geq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots) .$$

Sei $l_0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu$, so besteht

$$0 \leq (P_\mu - P_{\mu-1})l_0 \leq (P_\mu - P_{\mu-1})l_\nu = (P_\mu - P_{\mu-1})l_{\mu, \nu} \leq l_{\mu, \nu} ,$$

und folglich

$$(P_\mu - P_{\mu-1})l_0 = 0 .$$

Daher ist

$$l_0 = \sum_{\mu=2}^{\infty} (P_\mu - P_{\mu-1})l_0 = 0 .$$

Da andererseits $(P_\mu - P_{\mu-1})l_{\mu, \nu} = (P_\mu - P_{\mu-1})l_\nu$ sein soll, erhält man

$$\begin{aligned} |P_0 z_\nu - P_0 z_0| &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} |P_\mu z_\nu - P_\mu z_0| \\ &\leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{\mu=2}^{\mu} |(P_\mu - P_{\mu-1})z_\nu - (P_\mu - P_{\mu-1})z_0| \\ &\leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_\mu l_\nu \leq l_\nu . \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_0 z_\nu = P_0 z_0 .$$

§11. Dilatoren Wie im Falle reeller Elemente definieren wir Dilatoren in $\mathfrak{R}$ wie folgt:

Definition 11.1 Ein linearer Operator T mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ heisst ein *Dilatator*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1) aus $z \in \mathfrak{D}$ folgt $\bar{z} \in \mathfrak{D}$, und $\mathfrak{D}$ ist überall dicht in $\mathfrak{R}$.

2) T ist mit jedem Projektor P vertauschbar: aus $z \in \mathfrak{D}$ folgt $Pz \in \mathfrak{D}$ und $TPz = PTz$.

3) T ist abgeschlossen: aus gleichzeitigen $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$, $z_\nu \in \mathfrak{D}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Tz_\nu = w_0$ folgt $z_0 \in \mathfrak{D}$ und $Tz_0 = w_0$.

Wenn man die Menge aller reellen Elemente in $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{D}_{\Re}$ bezeichnet, so kann man aus 1) leicht schliessen, dass $\mathfrak{D}_{\Re}$ überall dicht in $\Re$, und $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\Re} + i\mathfrak{D}_{\Re}$ ist, d.h. jedes $z \in \mathfrak{D}$ lässt sich in Gestalt $z = x + iy$, $x, y \in \mathfrak{D}_{\Re}$ darstellen.

Für beliebigen Projektor P und beliebiges $x \in \mathfrak{D}_{\Re}$ gilt

$$TPx = PTx.$$

Daher ist T ein komplexwertiger Dilatator in $\Re$. Man kann den folgenden Satz gang ähnlich wie Satz 6.9 beweisen.

Satz 11.1 Für jeden beschränkten Dilatator B in $\Re$ folgt aus $x \in \mathfrak{D}_{\Re}$

$$Bx \in \mathfrak{D}_{\Re} \quad \text{und} \quad TBx = BTx.$$

Nun nehmen wir an, dass $\mathfrak{D}_{\Re}$ ein vollständiges Element p enthält. Setzt man $\Re Tp = a$, $\Im Tp = b$, so gilt

$$Tp = [a, p]p + i[b, p]p.$$

Für $P_\alpha = \left[(\alpha|p| - |x|)_+ \right]$, $x \in \Re$, $\alpha > 0$, erhält man durch $[P_\alpha x, p]$ einen beschränkten reellen Dilatator, denn

$$\alpha P_\alpha |p| - P_\alpha |x| = (\alpha|p| - |x|)_+ \geq 0,$$

nämlich

$$|P_\alpha x| \leq \alpha P_\alpha |p| \leq \alpha |p|$$

gilt. Daher besteht nach Satz 11.1

$$[P_\alpha x, p]Tp = T[P_\alpha x, p]p = TP_\alpha x.$$

Da andererseits

$$[P_\alpha x, p]Tp = [a, p]P_\alpha x + i[b, p]P_\alpha x$$

sein soll, erhält man

$$TP_\alpha x = [a, p]P_\alpha x + i[b, p]P_\alpha x,$$

wobei $[a, p]P_\alpha x$ und $[b, p]P_\alpha x$ beide nach Satz 6.14 wegen $|P_\alpha x| \leq \alpha |p|$ sinnvoll sind. Weiterhin gilt nach Satz 3.23

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\left(|p| - \frac{1}{\alpha} |x| \right)_+ \right] = [|p|] = I.$$

Demzufolge gilt, wenn x in beiden Definitionsbereichen von $[a, p]$ und $[b, p]$ gleichzeitig liegt, nach Abgeschlossenheit von T

$$x \in \mathfrak{D}_R \quad \text{und} \quad Tx = [a, p]x + i[b, p]x$$

Umgekehrt folgt aus $x \in \mathfrak{D}_R$ nach Abgeschlossenheit von $[a, p]$ und $[b, p]$, dass $[a, p]x$ und $[b, p]x$ gleichzeitig sinnvoll sind, und

$$Tx = [a, p]x + i[b, p]x$$

gilt. Daher ist $\mathfrak{D}_R$ der Durchschnitt der beiden Definitionsbereiche von $[a, p]$ und $[b, p]$, und für jedes $x \in \mathfrak{D}_R$ gilt

$$Tx = [a, p]x + i[b, p]x.$$

Im allgemeinen Falle kann man wie im Beweis des Satzes 6.11 beweisen, dass $\mathfrak{D}$ ein vollständiges Element enthält. Daher erhält man den

Satz 11.2 Jeder Dilatator T in $\mathfrak{K}$ lässt sich in Gestalt

$$T = [a, p] \oplus i[b, p]$$

ausdrücken, d.h. der Definitionsbereich von T besteht aus allen $z = x + iy$ für je zwei, in den beiden Definitionsbereichen von $[a, p]$ und $[b, p]$ gleichzeitig liegende, x und y , und für solches $z = x + iy$ gilt

$$Tz = ([a, p]x - [b, p]y) + i([a, p]y + [b, p]x).$$

Satz 11.3 Für jedes komplexe w und jedes vollständige komplexe z gibt es einen einzigen Dilatator T , für welchen

$$Tz = w$$

ist. Diesen Dilatator T bezeichnet man mit $[w, z]$.

Beweis Sei

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

$$T = [a, p] \oplus i[b, p],$$

so ist $Tz = w$ gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$[a, p]x - [b, p]y = u$$

$$[a, p]y + [b, p]x = v.$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man nach Satz 9.21

$$[a, p] \circ [x^2 + y^2, 1] = [a, p] \circ \{[x, 1]^2 + [y, 1]^2\} = [ux + vy, 1]$$

$$[b, p] \circ [x^2 + y^2, 1] = [b, p] \circ \{[y, 1]^2 + [x, 1]^2\} = [vx - uy, 1].$$

Da $|z|^2 = x^2 + y^2$ vollständig sein soll, folgt aus diesem Gleichungssystem

$$[a, p] = [ux + vy, x^2 + y^2]$$

$$[b, p] = [vx - uy, x^2 + y^2].$$

Umgekehrt folgt aus diesem letzten Gleichungssystem nach Satz 9.21

$$\begin{aligned} [a, p]x - [b, p]y &= [ux + vy, x^2 + y^2]x - [vx - uy, x^2 + y^2]y \\ &= [ux^2 + vxy, x^2 + y^2]1 - [vxy - uy^2, x^2 + y^2]1 \\ &= [u(x^2 + y^2), x^2 + y^2]1 \\ &= [u, 1][x^2 + y^2, x^2 + y^2]1 = [u, 1]1 = u, \end{aligned}$$

wenn $[ux + vy, x^2 + y^2]x$ und $[vx - uy, x^2 + y^2]y$ beide sinnvoll sind. In ähnlicher Weise erhält man

$$[a, p]y + [b, p]x = v.$$

Daher gilt $Tz = w$.

Nun wollen wir beweisen, dass x und y zum Definitionsbereich von $[ux + vy, x^2 + y^2]$ und gleichzeitig von $[vx - uy, x^2 + y^2]$ gehören. Dafür genügt es nach Satz 6.14 und Satz 7.15 zu beweisen, dass $|z|$ zum Definitionsbereich von $[[ux + vy, |z|^2]]$ und $[[vx - uy, |z|^2]]$ gehört. Da nach Satz 9.21 und Satz 7.6

$$\begin{aligned} |[ux + vy, |z|^2]| &= [|ux + vy|, |z|^2] \leq [|u||z| + |v||z|, |z|^2] \\ &= [|z|, |z|][|u| + |v|, |z|] = [|u| + |v|, |z|] \\ |[vx - uy, |z|^2]| &= [|vx - uy|, |z|^2] \leq [|v||z| + |u||z|, |z|^2] \\ &= [|z|, |z|][|u| + |v|, |z|] = [|u| + |v|, |z|] \end{aligned}$$

gilt, gehört $|z|$ nach Satz 7.12 zum Definitionsbereich von $[[ux + vy, |z|^2]]$ und von $[[vx - uy, |z|^2]]$.

Nach Satz 11.2 kann man jeden Dilatator T in $\mathfrak{R}$ in Gestalt

$$T = [a, p] \oplus i[b, p]$$

ausdrücken, wobei $[a, p]$ und $[b, p]$ als Dilatatoren in $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt sind. Man definiert den *reellen und imaginären Teil von T* bzw. durch

$$\Re T = [a, p], \quad \Im T = [b, p].$$

Wenn man die Menge aller Dilatatoren im reellen Ring $\mathfrak{R}$ mit $\overline{\mathfrak{R}}$ und die Menge aller Dilatatoren im komplexen Ring $\mathfrak{K}$ mit $\overline{\mathfrak{K}}$ bezeichnet,

so kann man $\bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{R}} \oplus i\bar{\mathfrak{R}}$ schreiben, d.h. $\bar{\mathfrak{R}}$ besteht aus allen Dilatatoren $R \oplus iS$ für $R, S \in \bar{\mathfrak{R}}$. Da nach Satz 7.18 $\bar{\mathfrak{R}}$ ein vollkommener, teilweise geordneter Ring ist, so ist $\bar{\mathfrak{R}}$ nach Satz 10.22 auch ein vollkommener komplexer Ring. Hier soll man die Summe und das Produkt zweier Dilatatoren wie Definition 10.3 verstehen:

$$T \oplus S = (\Re T \oplus \Re S) \oplus i(\Im T \oplus \Im S).$$

$$T \circ S = \{(\Re T \circ \Re S) \ominus (\Im T \circ \Im S)\} \oplus i\{(\Re T \circ \Im S) \oplus (\Im T \circ \Re S)\}.$$

Der absolute Betrag eines komplexen Dilatators T soll ja

$$|T| = \{(\Re T)^2 \oplus (\Im T)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

sein, und der konjugierte von T wird durch

$$\bar{T} = \Re T \oplus i(-\Im T) = \Re T \ominus i\Im T$$

gegeben.

Alle, in §10 geschriebenen, Sätze und Definitionen über $\mathfrak{R}$ gelten daher über $\bar{\mathfrak{R}}$ in entsprechenden Gestalten.

Indem man sich im Falle reeller Dilatatoren befindet, erhält man leicht den

Satz 11.4 Wenn TSz oder $(T+S)z$ sinnvoll ist, so gilt bzw.

$$(T \circ S)z = TSz \quad \text{oder} \quad (T \oplus S)z = (T+S)z.$$

Satz 11.5 T und $\bar{T}$ besitzen denselben Definitionsbereich $\mathfrak{D}$, und für jedes $z \in \mathfrak{D}$ gilt

$$\overline{Tz} = \bar{T}\bar{z}.$$

Beweis Wenn man den Durchschnitt der beiden Definitionsbereiche von $\Re T$ und $\Im T$ mit $\mathfrak{D}_{\Re}$ bezeichnet, so besitzen T und $\bar{T}$ denselben Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{\Re} + i\mathfrak{D}_{\Re}$. Für $x \in \mathfrak{D}_{\Re}$ gilt

$$\overline{Tx} = \overline{\Re Tx + i\Im Tx} = \Re Tx - i\Im Tx = \bar{T}x.$$

Demzufolge gilt allgemeiner für $x, y \in \mathfrak{D}_{\Re}$

$$\begin{aligned} \overline{T(x+iy)} &= \overline{Tx + iTy} = \overline{Tx} - i\overline{T_y} \\ &= \bar{T}x - i\bar{T}y = \bar{T}(x-iy). \end{aligned}$$

Definition 11.2 Ein Dilator T heisst *regulär*, wenn der Definitionsbereich von T aus allen Elementen in $\mathfrak{R}$ besteht.

Entsprechend dem Satz 9.7 erhält man ganz ähnlich den

Satz 11.6 *Der Dilatator $[u, 1]$ ist regulär, und für jedes $z \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$[u, 1]z = uz.$$

Nach diesem Satz ist die Menge aller regulären Dilatatoren in $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}$ algebraisch isomorph, d.h.

$$[u, 1] \longleftrightarrow u, \quad [v, 1] \longleftrightarrow v$$

$$[u, 1] + [v, 1] \longleftrightarrow u + v$$

$$[u, 1][v, 1] \longleftrightarrow uv$$

$$\Re[u, 1] \longleftrightarrow \Re u, \quad \Im[u, 1] \longleftrightarrow \Im u$$

$$|[u, 1]| \longleftrightarrow |u|$$

Daher erhält man

Satz 11.7 $[u, 1][v, 1] = [uv, 1]$

$$\Re[u, 1] = [\Re u, 1], \quad \Im[u, 1] = [\Im u, 1]$$

$$|[u, 1]| = [|u|, 1].$$

Satz 11.8 *T und $|T|$ besitzen denselben Definitionsbereich $\mathfrak{D}$, und für jedes $z \in \mathfrak{D}$ gilt $|Tz| = |T||z|$.*

Beweis Zuerst wollen wir beweisen, dass T und $|T|$ denselben Definitionsbereich besitzen. Dafür genügt es zu beweisen, dass der Definitionsbereich von

$$|T| = \{(\Re T)^2 \oplus (\Im T)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

in $\mathfrak{R}$ der Durchschnitt der beiden Definitionsbereiche von $\Re T$ und $\Im T$ ist. Dies folgt aber nach Satz 7.12 aus

$$|\Re T| \leq |T|, \quad |\Im T| \leq |T|,$$

und

$$|T| \leq |\Re T| \oplus |\Im T|.$$

Da $|z| \leq |\Re z| + |\Im z|$ ist, gehört $|z|$ zum Definitionsbereich eines Dilatators T , wenn Tz sinnvoll ist. Dann gilt nach Satz 11.7 und Satz 11.4

$$\begin{aligned} |[Tz], 1| &= |[Tz, 1]| = |T \circ [z, 1]| = |T| \circ [z, 1]| \\ &= |T| \circ [|z|, 1] = [|T||z|, 1]. \end{aligned}$$

Daher erhält man $|Tz| = |T||z|$.

Entsprechend dem Satz 9.21, erhält man ganz ähnlich den

$$\begin{aligned}\text{Satz 11.9} \quad & [u, z] \circ [v, w] = [uv, zw] \\ & |[u, z]| = [|u|, |z|] \\ & [u, z] \oplus [v, w] = [uw + zv, zw].\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Spektraldarstellung eines Dilatatores. Im folgenden bezeichnen wir mit Λ ein halbabgeschlossenes Intervall in der komplexen Ebene G , das aus Punkten

$$\lambda + i\mu: \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2, \quad \mu_1 \leq \mu < \mu_2$$

besteht.

Definition 11.3 Die Schar von, jedem Λ zugeordneten, Elementen $a(\Lambda)$ heisst *additiv*, wenn für $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \Lambda_2 = 0$ stets

$$a(\Lambda) = a(\Lambda_1) + a(\Lambda_2)$$

gilt. $a(\Lambda)$ heisst von *beschränkter Variation*, wenn für endlich viele $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_x$, $\Lambda_\mu \Lambda_\nu = 0$ ($\mu \neq \nu$),

$$|a(\Lambda_1)| + |a(\Lambda_2)| + \dots + |a(\Lambda_x)|$$

beschränkt ist, d.h. für ein passend bestimmtes l gilt stets

$$|a(\Lambda_1)| + |a(\Lambda_2)| + \dots + |a(\Lambda_x)| \leq l.$$

$\varphi(\xi)$ sei eine gewöhnliche stetige Funktion in der komplexen Ebene G , und $a(\Lambda)$ sei eine additive Schar von beschränkter Variation. Indem man das Intervall Λ_0 in gleichmässig kleinere Intervalle $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_x$ zerlegt, kann man ganz ähnlich wie im Fall gewöhnlicher Funktionen leicht beweisen, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^x \varphi(\xi_\nu) a(\Lambda_\nu)$$

für $\Lambda_0 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_x, \quad \Lambda_\mu \Lambda_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu)$

$$\xi_\nu \in \Lambda_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, x)$$

stets existiert. Diesen Limes bezeichnet man mit

$$\int_{\Lambda_0} \varphi(\xi) da(\Lambda).$$

Definition 11.4 Die Schar von, jedem Λ zugeordneten, Projektoren $E(\Lambda)$ heisst eine *Zerlegung des Projektors* P , wenn

$$1) \quad \text{für } \Lambda_1 \Lambda_2 = 0$$

$$E(\Lambda_1)E(\Lambda_2) = 0,$$

2) für $A_0 < A_1 + A_2 + \dots + A_n$

$$E(A_0) \leq E(A_1) \cup E(A_2) \cup \dots \cup E(A_n),$$

3) für $A_\varepsilon: \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2 - \varepsilon, \mu_1 \leq \mu < \mu_2 - \varepsilon, A: \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2, \mu_1 \leq \mu < \mu_2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(A_\varepsilon) = E(A) \quad \text{und} \quad \lim_{A \rightarrow G} E(A) = P$$

besteht.

Aus 2) folgt für $A_0 = A_1 + A_2 + \dots + A_n$

$$E(A_0) = E(A_1) \cup E(A_2) \cup \dots \cup E(A_n),$$

da $E(A_0) \geq E(A)$ sein soll.

Wenn $E(A)$ eine Zerlegung des Projektors P ist, so erhält man durch $E(A)a$ für jedes $a \in \mathfrak{R}$ eine additive Schar von beschränkter Variation.

Nun wollen wir die Spektraldarstellung eines Dilators T in $\mathfrak{R}$ betrachten. Es sei ein Dilator

$$T = [a, p] \oplus i[b, p],$$

und für Zerlegungen der Identität F_λ, L_λ , in $\mathfrak{R}$ sei

$$[a, p] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF_\lambda, \quad [b, p] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dL_\lambda.$$

Indem man jedem $A: \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2, \mu_1 \leq \mu < \mu_2$, den Projektor

$$E(A) = (F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1})(L_{\mu_2} - L_{\mu_1})$$

zuordnet, erhält man eine Zerlegung der Identität $E(A)$ in $\mathfrak{R}$. Für diese $E(A)$ gilt

$$[a, p]x = \int_G \Re \zeta dE(A)x, \quad [b, p]y = \int_G \Im \zeta dE(A)y,$$

wenn x und y im Definitionsbereich von $[a, p]$ bzw. $[b, p]$ liegt. Daher erhält man durch

$$T = \int_G \zeta dE(A)$$

die Spektraldarstellung von T . Die Eindeutigkeit von $E(A)$ kann man leicht aus der Eindeutigkeit von F_λ, L_λ schliessen.

Man kann auch, wie Verfasser in einer früheren Abhandlung⁽⁹⁾ getan hat, $E(A)$ auf messbare Mengen erweitern. F sei eine offene

(9) H. Nakano, "Zur Eigenwerttheorie normaler Operatoren." Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. Vol. 21, 1939, S. 315-339.

Punktmenge in der komplexen Ebene G . Man kann stets Γ in Gestalt

$$\Gamma = A_1 + A_2 + \dots$$

derart schreiben, dass jeder Punkt in Γ im Inneren von irgendeinem A_ν enthalten ist. Wenn man dieser offenen Punktmenge Γ den Projektor

$$E(\Gamma) = E(A_1) \cup E(A_2) \cup \dots$$

zuordnet, so wird $E(\Gamma)$ eindeutig bestimmt. Dafür genügt es zu beweisen, dass für jedes $A_0 \subset \Gamma$ $E(A_0) \subseteq E(\Gamma)$ ist. Sei

$$\begin{aligned} A_0 : \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2, \quad \mu_1 \leq \mu < \mu_2, \\ A_\varepsilon : \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2 - \varepsilon, \quad \mu_1 \leq \mu < \mu_2 - \varepsilon, \end{aligned}$$

so ist A_ε nach Heine-Borelschem Überdeckungssatz mit endlich vielen $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ überdeckt. Dann kann man nach 2) leicht einsehen, dass

$$E(A_\varepsilon) \subseteq E(A_1) \cup E(A_2) \cup \dots \cup E(A_\nu) \subseteq E(\Gamma)$$

ist. Indem man $\varepsilon \rightarrow 0$ lässt, erhält man nach 3)

$$E(A_0) \subseteq E(\Gamma).$$

Über $E(\Gamma)$ gilt

- 1') $E(\Gamma_0) = E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2) \cup \dots$, wenn $\Gamma_0 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$ ist,
- 2') $E(\Gamma_1)E(\Gamma_2) = 0$, wenn $\Gamma_1\Gamma_2 = 0$ ist,
- 3') $E(\Gamma_1)E(\Gamma_2) = E(\Gamma_1\Gamma_2)$.

1') und 2') folgt sofort aus Konstruktion von $E(\Gamma)$. Man braucht nur 3') zu beweisen.

Wenn man mit $\Gamma_1^{(\varepsilon)}$ und $\Gamma_2^{(\varepsilon)}$ die Menge aller Punkte ζ in G bezeichnet, welche ferner als $\varepsilon > 0$ von jedem Punkt von $G - \Gamma_1$ bzw. von $G - \Gamma_2$ liegen, so sind $\Gamma_1^{(\varepsilon)}$ und $\Gamma_2^{(\varepsilon)}$ beide offen, und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_1^{(\varepsilon)} = \Gamma_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_2^{(\varepsilon)} = \Gamma_2.$$

Wenn man Γ_1 und Γ_2 in Gestalt

$$\Gamma_1 = A'_1 + A'_2 + \dots \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_2 = A''_1 + A''_2 + \dots$$

schreibt, wobei die Seite von Intervallen A'_ν, A''_ν alle kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind, so gilt

$$E(\Gamma_1^{(\varepsilon)})E(\Gamma_2^{(\varepsilon)}) \subseteq E(A'''_1) \cup E(A'''_2) \cup \dots$$

für alles A''' , welches ein, mit $\Gamma_1^{(\varepsilon)} \Gamma_2^{(\varepsilon)}$ gemeinsame Punkte besitzendes, Intervall unter A'_v, A''_v ist. Da $A''' < \Gamma_1 \Gamma_2$ sein soll, besteht

$$E(\Gamma_1^{(\varepsilon)})E(\Gamma_2^{(\varepsilon)}) \leq E(\Gamma_1 \Gamma_2).$$

Indem man $\varepsilon \rightarrow 0$ lässt, erhält man nach 1')

$$E(\Gamma_1)E(\Gamma_2) \leq E(\Gamma_1 \Gamma_2).$$

Andererseits gilt offenbar

$$E(\Gamma_1)E(\Gamma_2) \geq E(\Gamma_1 \Gamma_2).$$

Daher ist 3') bewiesen.

Jeder abgeschlossenen Punktmenge Ξ in G ordnet man den Projektor

$$E(\Xi) = I - E(G - \Xi) = E(G) - E(G - \Xi)$$

zu. Dann besteht

$$E(\Gamma) \geq E(\Xi),$$

wenn die offene Punktmenge Γ die abgeschlossene Punktmenge Ξ umfasst, weil

$$E(\Gamma) + E(G - \Xi) \geq E(\Gamma) \cup E(G - \Xi) = I$$

ist. Dagegen gilt, wenn $\Xi \supset \Gamma$ ist,

$$E(\Xi) \geq E(\Gamma),$$

denn $E(G - \Xi) + E(\Gamma) \leq I$ besteht.

Man kann nach 1'), 2'), 3') auch leicht einsehen, dass für je zwei abgeschlossene Punktmengen Ξ_1, Ξ_2

$$E(\Xi_1 + \Xi_2) = E(\Xi_1) \cup E(\Xi_2), \quad E(\Xi_1 \Xi_2) = E(\Xi_1)E(\Xi_2)$$

gilt.

Definition 11.5 Eine Punktmenge Ψ in der komplexen Ebene G heisst *messbar*, wenn für eine Folge offener Punktmengen

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \dots, \quad \Gamma_\nu \supset \Psi \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

und für eine Folge abgeschlossener Punktmengen

$$\Xi_1 \subset \Xi_2 \subset \dots, \quad \Xi_\nu \subset \Psi \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

die Relation

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} E(\Gamma_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} E(\Xi_\nu) \quad (= E(\Psi))$$

besteht. Man ordnet der messbaren Punktmenge $\mathcal{P}$ den Projektor $E(\mathcal{P})$ zu.

Aus dieser Definition folgt sofort

Satz 11.10 Wenn $\mathcal{P}$ messbar ist, so ist $G-\mathcal{P}$ auch messbar, und $E(G-\mathcal{P}) = I - E(\mathcal{P})$.

Satz 11.12 Wenn $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ beide messbar sind, so sind $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$ auch beide messbar, und

$$E(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) = E(\mathcal{P}_1) E(\mathcal{P}_2)$$

$$E(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = E(\mathcal{P}_1) \cup E(\mathcal{P}_2).$$

Satz 11.13 Wenn zwei Punktmengen $\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2$ messbar sind, so ist $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2$ auch messbar, und

$$E(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2) = E(\mathcal{P}_1) - E(\mathcal{P}_2).$$

Satz 11.14 Offene und abgeschlossene Punktmengen sind alle messbar, und die vorigen $E(\Gamma)$ bzw. $E(\Xi)$ sind zugeordnet.

Beweis Ξ sei eine abgeschlossene Punktmenge, und $\Gamma^{(\varepsilon)}$ sei die Menge aller Punkte ζ , welche ferner als $\varepsilon > 0$ von jedem Punkt von Ξ liegen. Wenn man mit $\bar{\Gamma}^{(\varepsilon)}$ die abgeschlossene Hülle von $\Gamma^{(\varepsilon)}$ bezeichnet, so ist für $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

$$G - \bar{\Gamma}^{(1)} \supset G - \bar{\Gamma}^{(\frac{1}{2})} \supset \dots, \quad G - \bar{\Gamma}^{(\frac{1}{\nu})} \supset \Xi \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Demnach gilt

$$\begin{aligned} E(\Xi) &\leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} E(G - \bar{\Gamma}^{(\frac{1}{\nu})}) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} E(G - \Gamma^{(\frac{1}{\nu})}) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} (E(G) - E(\Gamma^{(\frac{1}{\nu})})) \\ &= E(G) - E(G - \Xi) = E(\Xi). \end{aligned}$$

Daher ist die abgeschlossene Punktmenge Ξ messbar, und der Projektor $E(\Xi)$ soll der Punktmenge Ξ zugeordnet werden.

Nach Satz 11.10 gilt das gleiche über offene Punktmengen.

Satz 11.15 Das halbabgeschlossene Intervall A ist messbar, und der vorige $E(A)$ ist zugeordnet.

Beweis Wenn man für

$$A: \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2, \quad \mu_1 \leq \mu < \mu_2$$

das offene Intervall $\lambda_1 - \varepsilon < \lambda < \lambda_2$, $\mu_1 - \varepsilon < \mu < \mu_2$ und das abgeschlossene Intervall $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 - \varepsilon$, $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 - \varepsilon$ in Betracht zieht, so kann man leicht einsehen, dass der Satz besteht.

Definition 11.6 Eine gewöhnliche Funktion $\varphi(\zeta)$ in einer messbaren Punktmenge Z_0 heisst über $E(Z)$ oder über den Dilatator T *messbar*, wenn man für jedes $\varepsilon > 0$ die Punktmenge Z_0 in höchstens abzählbar unendlich viele messbare Punktmenen $Z_1, Z_2, \dots$ derart zerlegen kann, dass

$$E(Z_0) = E(Z_1) \cup E(Z_2) \cup \dots,$$

$$E(Z_\nu) E(Z_\mu) = 0 \quad (\nu \neq \mu),$$

und für je zwei Punkte ζ_1, ζ_2 in Z_ν ($\nu = 1, 2, \dots$)

$$|\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_2)| < \varepsilon$$

gilt.

Wenn eine Funktion $\varphi(\zeta)$ in einer messbaren Punktmenge Z_0 messbar ist, so kann man, wie man in der Abhandlung⁽¹⁰⁾ getan hat, für in der obigen Definition geschriebene Zerlegung $Z_1, Z_2, \dots$ von Z_0 durch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\zeta_\nu) E(Z_\nu) z = \int_{Z_0} \varphi(\zeta) dE(Z) z \quad (\zeta_\nu \in Z_\nu)$$

das *Integral* definieren, falls $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\zeta_\nu) E(Z_\nu) z$ für eine solche Zerlegung absolut konvergent ist. In diesem Falle heisst dieses Integral *konvergent*.

Satz 11.16 Wenn das Integral

$$w = \int_{Z_0} \varphi(\zeta) dE(Z) z$$

konvergent ist, so gilt

$$|w| = \int_{Z_0} |\varphi(\zeta)| dE(Z) |z|,$$

$$\bar{w} = \int_{Z_0} \overline{\varphi(\zeta)} dE(Z) \bar{z},$$

wobei diese zwei Integrale auch konvergieren.

Beweis Da für $\nu \neq \mu$

$$|\varphi(\zeta_\nu) E(Z_\nu) z| \wedge |\varphi(\zeta_\mu) E(Z_\mu) z| = 0$$

sein soll, gilt nach Satz 1.16 und Satz 2.8

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\zeta_\nu) E(Z_\nu) z \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi(\zeta_\nu) E(Z_\nu) z|.$$

Daher gilt die obere Gleichung. Die untere gilt offenbar nach Satz 10.6.

⁽¹⁰⁾ H. Nakano "Funktionen mehrerer hypermaximaler normaler Operatoren." Phys.-Math. Soc. Japan. Vol. 21, 1939, S. 713-728.

Es sei eine stetige einfache Kurve $\zeta(\lambda)$, $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, in der komplexen Ebene G . Diese Kurve ist dann eine abgeschlossene Punktmenge Z_0 . Wenn

$$E(Z_0) = I$$

ist, so kann man

$$T = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \zeta(\lambda) dE_\lambda$$

schreiben, wobei E_λ der der Punktmenge aller Punkt $\zeta(\mu)$, $\lambda_0 \leq \mu < \lambda$, zugeordnete Projektor $E(Z)$ ist.

Zum Beispiele betrachten wir ein *unitäres* Element u , d.h. $|u| = 1$. Sei

$$u = \int_G \zeta dE(Z) 1,$$

so kann man wie in der Abhandlung⁽¹¹⁾ leicht einsehen, dass für den Einheitskreis $C: \exp(2\pi i\lambda)$, $0 < \lambda \leq 1$, ja $E(C) = I$ gilt. Daher erhält man die Zerlegung der Einheit e_λ , für die

$$u = \int_{+0}^1 \exp(2\pi i\lambda) de_\lambda$$

ist.

§ 12. Verschiedene Konvergenzen Wir haben schon die Konvergenz einer Folge komplexer Elemente definiert. Hier wollen wir andere Limesbegriffe einführen.

Definition 12.1 Eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$ heisst nach z_0 *D-konvergent*, wenn als Dilatatoren

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} [z_\nu, 1] = [z_0, 1]$$

ist. In diesem Falle bezeichnet man den D-Limes z_0 mit

$$z_0 = D\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu.$$

Wenn der komplexe Ring $\mathfrak{R}$ vollkommen ist, so kann man leicht einsehen, dass die D-Konvergenz mit der bisherigen übereinstimmt.

Satz 12.1 Wenn im bisherigen Sinne

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$$

ist, so gilt

$$D\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0.$$

(11) a.a. 0. 9)

Beweis Sei für eine Folge positiver Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$,

$$|z_\nu - z_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

so gilt nach Satz 11.7

$$|[z_\nu, 1] - [z_0, 1]| = |[z_\nu - z_0, 1]| = [|z_\nu - z_0|, 1] \leq [l_\nu, 1] \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Daher erhält man $D\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$.

Definition 12.2 Ein Element z heisst *beschränkt*, wenn für eine passend grosse Zahl $x (> 0)$ $|z| \leq x1$ ist.

Definition 12.3 Eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$ heisst nach z_0 *B-konvergent*, wenn für eine Folge beschränkter Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$.

$$|z_\nu - z_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

gilt. Den B-Limes bezeichnet man mit

$$z_0 = B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu.$$

Wenn der komplexe Ring $\mathfrak{A}$ nur aus beschränkten Elementen besteht, so stimmt die B-Konvergenz mit der bisherigen überein.

Aus Definition folgt sofort

Satz 12.2 Aus $B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$ folgt im bisherigen Sinne

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0.$$

Satz 12.3 Gegeben sei eine D-konvergente Folge $z_1, z_2, \dots$

$$D\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0.$$

Wenn $z_1, z_2, \dots$ gleichmässig beschränkt ist, d.h. für eine passende Zahl $x (> 0)$

$$|z_\nu| \leq x1 \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

so gilt

$$B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0.$$

Beweis Wenn $D\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$ ist, so gibt es eine Folge positiver Dilatoren $T_1 \geq T_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu = 0$, für welche

$$|[z_\nu, 1] - [z_0, 1]| \leq T_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist. Aus $|z_\nu| \leq x1$ folgt

$$|[z_\nu, 1]| = [|z_\nu|, 1] \leq xI,$$

und folglich für $\nu \rightarrow \infty$ auch

$$|[z_0, 1]| \leq xI.$$

Daher gilt

$$[|z_\nu - z_0|, 1] = |[z_\nu, 1] - [z_0, 1]| \leq T_\nu \wedge (2xI) \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Da der Dilatator $T_\nu \wedge (2xI)$ beschränkt ist, gibt es nach Satz 6.16 das beschränkte Element l_ν , für das

$$T_\nu \wedge (2xI) = [l_\nu, 1]$$

ist. Man kann sogar leicht einsehen, dass

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0,$$

$$|z_\nu - z_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann leicht die folgenden Sätze beweisen.

Satz 12.4 Aus $B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a_0$, $B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = b_0$ folgt für komplexe Zahlen α, β

$$B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\alpha a_\nu + \beta b_\nu) = \alpha a_0 + \beta b_0.$$

Satz 12.5 Wenn $B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a_0$, und der $B\text{-}\text{Limes } a_0$ beschränkt ist, so sind $a_1, a_2, \dots$ gleichmässig beschränkt, d.h. für eine passende Zahl $x > 0$

$$|a_\nu| \leq x1. \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

Satz 12.6 Wenn $B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = a_0$, $B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = b_0$ und a_0, b_0 beide beschränkt sind, so gilt

$$B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} (a_\nu b_\nu) = a_0 b_0.$$

Definition 12.4 Eine Folge komplexer Elemente $z_1, z_2, \dots$ heisst gleichmässig konvergent, wenn für eine passende Folge positiver Zahlen $x_1 \geq x_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = 0$,

$$|z_\nu - z_0| \leq x_\nu 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist.

Aus Definition kann man sofort schliessen, dass die gleichmässige Konvergenz starker als die B-Konvergenz ist, d.h. wenn $z_1, z_2, \dots$ nach z_0 gleichmässig konvergiert, so ist auch

$$B\text{-}\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0.$$

Zuletzt wollen wir den, dem Ergodensatz⁽¹²⁾ entsprechenden Satz beweisen.

Satz 12.7 Wenn $|z| \leq 1$ ist, so ist die Folge

$$\frac{z^{\nu+1} + z^{\nu+2} + \dots + z^\mu}{\mu - \nu} \quad (\mu > \nu)$$

für $\mu - \nu \rightarrow \infty$ nach $1 - [1 - z]1$ B-konvergent.

Beweis Setzt man

$$P = [1 - z], \quad Q = 1 - P,$$

so gilt

$$P(1 - z) = 1 - z \quad \text{d.h.} \quad Qz = Q1.$$

Daher ist Qz nach Satz 5.3 ein Teil von 1. Da

$$\begin{aligned} \frac{z^{\nu+1} + z^{\nu+2} + \dots + z^\mu}{\mu - \nu} &= P \frac{z^{\nu+1} + z^{\nu+2} + \dots + z^\mu}{\mu - \nu} + Q \frac{z^{\nu+1} + z^{\nu+2} + \dots + z^\mu}{\mu - \nu} \\ &= \frac{(Pz)^{\nu+1} + (Pz)^{\nu+2} + \dots + (Pz)^\mu}{\mu - \nu} + Qz \end{aligned}$$

ist, genügt es zu beweisen, dass die Folge

$$\frac{(Pz)^{\nu+1} + (Pz)^{\nu+2} + \dots + (Pz)^\mu}{\mu - \nu}$$

im komplexen Ring $P\mathfrak{R}$ B-konvergent ist.

Da $P(1 - z)$ vollständig in $P\mathfrak{R}$ ist, d.h.

$$[P(1 - z)] = P[1 - z] = P,$$

besitzt der Dilatator $[P(1 - z), P1]$ den inversen T in $P\mathfrak{R}$, für den

$$[P(1 - z), P1] \circ T = P$$

gilt. Im Ring $P\mathfrak{R}$ ist P die Identität, und $P1$ ist die Einheit. Dann besteht nach Satz 11.7

(12) E. Hoph. "Ergodentheorie" Ergebnisse der Math. Berlin, 1937.

$$\begin{aligned}
& \left| \left[\frac{(Pz)^{\nu+1} + \dots + (Pz)^\mu}{\mu - \nu}, P1 \right] \right| \\
&= \frac{1}{\mu - \nu} |[(Pz)^{\nu+1} + \dots + (Pz)^\mu, P1][P1 - Pz, P1]| \circ |T| \\
&= \frac{1}{\mu - \nu} |[(Pz)^{\nu+1} - (Pz)^{\mu+1}, P1]| \circ |T| \\
&\leq \frac{1}{\mu - \nu} [|Pz|^{\nu+1} + |Pz|^{\mu+1}, P1] \circ |T| \leq \frac{2}{\mu - \nu} |T|.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$D\text{-}\lim_{\mu - \nu \rightarrow \infty} \frac{(Pz)^{\nu+1} + (Pz)^{\nu+2} + \dots + (Pz)^\mu}{\mu - \nu} = 0.$$

Da andererseits

$$\left| \frac{(Pz)^{\nu+1} + (Pz)^{\nu+2} + \dots + (Pz)^\mu}{\mu - \nu} \right| \leq P1$$

gilt, so erhält man nach Satz 12.3

$$B\text{-}\lim_{\mu - \nu \rightarrow \infty} \frac{(Pz)^{\nu+1} + (Pz)^{\nu+2} + \dots + (Pz)^\mu}{\mu - \nu} = 0.$$

Definition 12.5 Eine Schar von Elementen a_λ heisst *stetig am Punkt* λ_0 , wenn für eine Folge positiver Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$, aus $|\lambda_0 - \lambda| \leq \frac{1}{\nu}$

$$|a_{\lambda_0} - a_\lambda| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

folgt. Wenn $l_1, l_2, \dots$ nur aus beschränkten Elementen bestehen, so heisst a_λ *B-stetig am Punkt* λ_0 . Wenn $l_\nu = x_\nu 1$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = 0$ ist, so heisst a_λ *gleichmässig stetig* am Punkt λ_0 . Wenn die Dilatoren $[a_\lambda, 1]$ im Ring aller Dilatoren am Punkt λ_0 stetig ist, so heisst a_λ *D-stetig* am Punkt λ_0 .

Wenn a_λ an jedem Punkt eines Intervalles stetig, B-stetig, D-stetig oder gleichmässig stetig ist, so heisst a_λ in diesem Intervall bzw. *stetig*, *B-stetig*, *D-stetig* oder *gleichmässig stetig*.

Definition 12.6 Eine Schar von Elementen a_λ heisst *gleichgradig stetig* im Intervall $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, wenn für eine Folge positiver Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$ aus $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq \frac{1}{\nu}$

$$|a_{\lambda_1} - a_{\lambda_2}| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

folgt. Wenn ein von $l_1, l_2, \dots$ beschränkt ist, so heisst a_ν *gleichgradig B-stetig* im Intervall $a \leq \lambda \leq \beta$, und wenn für eine Folge positiver Zahlen $x_1 \geq x_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = 0$, $l_\nu = x_\nu 1$ ist, so heisst a_λ *gleichgradig gleichmässig stetig* im Intervall $a \leq \lambda \leq \beta$.

Wenn a_λ im abgeschlossenen Intervall $a \leq \lambda \leq \beta$ gleichmässig stetig ist, so kann man ähnlich wie im Falle gewöhnlicher Funktionen leicht beweisen, dass a_λ gleichgradig gleichmässig stetig in diesem Intervall ist. Aber a_λ ist nicht immer gleichgradig stetig, wenn a_λ auch B-stetig in einem abgeschlossenen Intervall ist.

a_λ sei gleichgradig stetig im abgeschlossenen Intervall $a \leq \lambda \leq \beta$. Dann kann man wie im Falle gewöhnlicher Funktionen die Existenz des Integrals beweisen:

$$\int_a^\beta a_\lambda d\lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^x a_{\tau_\nu} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})$$

für

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_x = \beta$$

$$\lambda_{\nu-1} \leq \tau_\nu \leq \lambda_\nu, \quad \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} \leq \delta \quad (\nu = 1, 2, \dots, x).$$

Satz 12.8 u_λ sei eine Schar von Elementen, für die

$$u_{\lambda+\mu} = u_\lambda u_\mu \quad (\lambda, \mu \geq 0)$$

gilt. Wenn u_λ für $\lambda \geq 0$ gleichmässig beschränkt, d.h. $|u_\lambda| \leq \gamma 1$ ($\gamma \geq 0$) für eine Zahl γ , und u_λ am Punkt 0 stetig ist, so ist a_λ in jedem Intervall $(0 \leq a \leq \lambda \leq \beta)$ gleichgradig B-stetig, und für $\beta - a \rightarrow \infty$, $a \geq 0$, ist

$$\frac{1}{\beta - a} \int_a^\beta u_\lambda d\lambda$$

B-konvergent.

Beweis Wenn u_λ am Punkt 0 stetig ist, so gilt für eine Folge positiver Elemente $l_1 \geq l_2 \geq \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_\nu = 0$,

$$|u_\lambda - u_0| \leq l_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

falls $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\nu}$. Dann folgt aus $0 \leq \lambda_2 - \lambda_1 \leq \frac{1}{\nu}$, $\lambda_1 \geq 0$,

$$|u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}| = |u_{\lambda_1}(u_{\lambda_2 - \lambda_1} - u_0)| \leq \gamma l_\nu.$$

Andererseits gilt

$$|u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}| \leq |\mu_{\lambda_2}| + |u_{\lambda_1}| \leq 2\gamma 1.$$

Daher erhält man

$$|u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}| \leq (\gamma l_\nu) \wedge (2\gamma 1).$$

Damit ist es bewiesen, dass u_λ gleichgradig B-stetig ist.

Aus $|u_\lambda| \leq \gamma 1$ folgt $|u_\lambda| \leq 1$, weil $|u_\lambda|^\nu = |u_{\nu\lambda}| \leq \gamma 1$, folglich $|u_\lambda| \leq \gamma^{\frac{1}{\nu}} 1$ sein muss. Dann kann man ganz ähnlich wie im Falle unitärer Operatoren im Hilbertschen Raum⁽¹³⁾ diesen Satz aus dem Satz 12.7 leicht herleiten.

Zum Beispiel komplexer Ringe betrachten wir Abelsche, die Identität enthaltende Ringe beschränkter Operatoren im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$, welche von Neumann zuerst behandelt hat.⁽¹⁴⁾

$\mathfrak{R}$ sei ein Abelscher, die Identität enthaltender Ring beschränkter Operatoren in $\mathfrak{H}$: mit $A, B \in \mathfrak{R}$ gehören $\alpha A + \beta B$, AB , A^* und der Limes jeder stark konvergenten Folge $A_\nu \in \mathfrak{R}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) zu $\mathfrak{R}$, und stets gilt $AB = BA$. Demzufolge sind alle Operatoren in $\mathfrak{R}$ normale Operatoren. Dann gibt es einen Operator N in $\mathfrak{R}$, für den $\mathfrak{R}$ aus allen beschränkten Funktionen von N besteht, d.h. $\mathfrak{R}$ besteht aus allen $A = \varphi(N)$:

$$(*) \quad (Af, g) = \int_G \varphi(z) d(E(Z)f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{H})$$

für den Massoperator $E(Z)$ des normalen Operatores N und für beliebige, über $E(Z)$ messbare, beschränkte Funktionen $\varphi(z)$ in G .⁽¹⁵⁾

Wenn $\varphi(z)$ eine reellwertige Funktion in G ist, so erhält man durch $\varphi(N)$ einen Hermiteschen Operator. Man kann leicht einsehen, dass alle Hermiteschen Operatoren in $\mathfrak{R}$ für die Ordnung $\varphi_1(N) \geq \varphi_2(N)$, falls $\varphi_1(z) \geq \varphi_2(z)$ bis auf Nullmenge über $E(Z)$ gilt, einen teilweise geordneten Ring bilden. Demzufolge ist $\mathfrak{R}$ ein komplexer Ring. Weiterhin besteht $\mathfrak{R}$ nur aus beschränkten Elementen.

Gegeben sei eine absteigende Folge Hermitescher Elemente in $\mathfrak{H}$

$$A_1 \geq A_2 \geq \dots \dots \dots$$

Sei $A_\nu = \varphi_\nu(N)$ ($\nu = 1, 2, \dots$), so ist $A_1 \geq A_2 \geq \dots$ gleichbedeutend mit

$$\varphi_1(z) \geq \varphi_2(z) \geq \dots \dots \dots$$

bis auf Nullmenge über $E(Z)$.

(13) a.a. O. 12)

(14) J. von Neumann, "Zur Algebra der Funktionaloperatoren" Math. Ann. 102, 1930.

(15) H. Nakano "Über Abelsche Ringe von Projektionsoperatoren." Phys.-Math. Soc. Japan, Vol. 21, 1939, S. 357-375.

Wenn für eine absteigende Folge $A_1 \geq A_2 \geq \dots$ $\lim_{\nu \rightarrow \infty} A_\nu = 0$ ist, d.h. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(z) = 0$ bis auf Nullmenge über $E(Z)$, so gilt für jedes $f \in \mathfrak{S}$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (A_\nu^2 f, f) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_G \{\psi_\nu(z)\}^2 d\|E(Z)f\|^2 = 0,$$

und folglich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|A_\nu f\| = 0.$$

Umgekehrt, wenn $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|A_\nu f\| = 0$ für jedes $f \in \mathfrak{S}$ ist, so gilt für jedes $f \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} \int_G \left\{ \lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(z) \right\}^2 d\|E(Z)f\|^2 &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_G \{\psi_\nu(z)\}^2 d\|E(Z)f\|^2 \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|A_\nu f\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(z) = 0$$

bis auf höchstens eine Nullmenge über $E(Z)$.

Nach Obigem kann man leicht einsehen, dass für Abelsche, die Identität enthaltende Ringe beschränkter Operatoren in Hilbertschen Raum die B-Konvergenz mit dem starken Konvergenz übereinstimmt. Daher kann man den Satz 12.7 und 12.8 auf den Fall normaler Operatoren im Hilbertschen Raum anwenden.

Tokyo, den 8. Oktober 1940.