10. Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes (III).

Von Ken'iti KOSEKI.

(Received Oct. 10, 1948)

Die Struktur der gemeinsamen Begrenzung zweier Gebiete in der Ebene habe ich in der letzten Arbeit¹⁾ „Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes (II)“ behandelt. C. Kuratowski untersuchte auch früher die Struktur dieser Menge. In vorliegenden Arbeit behandeln ich die Beziehung der Kuratowskischen²⁾ Untersuchungen mit der meinen letzten Mitteilung.

Satz I. Es sei r die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$. Alle in einem und demselben Primende³⁾ von $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Punkte von r bilden dann ein Häufungskontinuum⁴⁾ in r oder bestehen aus höchstens zwei unzerlegbaren⁵⁾ Kontinuen oder aus einem unzerlegbaren Kontinuum und einem Häufungskontinuum in r .

Beweis. Es sei $\{\mathfrak{S}_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ die Gebietskette, die ein Primende E definiert und durch die Querschnittskette $\{q_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ bestimmt wird. Die Menge aller in E enthaltenen Punkte von r soll mit r_1 bezeichnet werden. Die beiden Endpunkte von q_n bezeichnen wir mit A_n und B_n . Hierbei unterscheiden wir die folgenden drei Fälle.

1. Fall. Für unendlich viele n sei weder A_n noch B_n in r_1 enthalten. Da eine beliebige Teilfolge von $\{q_n\}$ wiederum das Primende E bestimmt, so können wir annehmen, dass für alle n weder A_n noch B_n in r_1 enthalten ist. In diesem Falle muss r_1 ein Häufungskontinuum in r sein.

Angenommen in der Tat, r_1 sei kein Häufungskontinuum in r . Dann muss $\overline{r - r_1} \not\equiv r$ sein, und da $r - r_1$ eine zusammenhängende Menge ist, so ist $\overline{r - r_1}$ ein

1) K. Koseki: Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes (II). Jap. Journ. Math. **19** (1948). Im folgenden zitiere ich diese Arbeit mit (II).

2) C. Kuratowski: Sur la structure des frontières communes à deux régions. Fund. Math. **12** (1928).

3) C. Carathéodory: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73** (1913).

4) Ein Teilkontinuum r_1 von r heisst Häufungskontinuum in r , wenn $r - r_1$ in r dicht ist.

5) Ein Kontinuum heisst unzerlegbar, wenn es nicht Vereinigung zweier echter Teilkontinua ist.

Kontinuum. Unter der Voraussetzung, dass weder A_n noch B_n in r_1 enthalten ist, muss sowohl A_n als auch B_n in $\overline{r-r_1}$ enthalten sein. Daher gibt es in $\overline{r-r_1}$ ein zwischen den beiden Punkten A_n und B_n irreduzibles Teilkontinuum, das bezeichne ich mit s . Nach dem A. Rosenthalschen Satz¹⁾ bestimmt $q_n + s$ in der Ebene genau zwei Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die von $q_n + s$ begrenzt werden. Man kann leicht einsehen, dass $\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{S}_n + q_n)$ eines von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ identisch ist, und daher ist die Begrenzung von $\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{S}_n + q_n)$ das Kontinuum $q_n + s$, da die Begrenzung von $\mathfrak{S}_n$ die Punkte von $r_1 - (\overline{r-r_1})$ enthalten muss.

Da $r_1 - (\overline{r-r_1})$ eine offene Menge in r_1 ist, und da die Menge von allen von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbaren Punkten überall dicht in r ist, so existieren in $r_1 - (\overline{r-r_1})$ unendlich viele Punkte, die von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbar sind. Wir wählen die beiden Punkte C und D von dieser Menge aller von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbaren Punkte in $r_1 - (\overline{r-r_1})$ aus, so gibt es in $\mathfrak{G}_1$ die beiden Einschnitte²⁾ e_1 und e_2 von der Art, dass e_1 bzw. e_2 den Punkt C bzw. D als Endpunkt hat. Da weder C noch D in der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{S}_n + q_n)$ enthalten ist, muss sowohl e_1 als auch e_2 gegen E konvergieren.³⁾ Dies widerspricht aber dem C. Carathéodoryschen Satz. Folglich muss im 1. Falle r_1 ein Häufungskontinuum in r sein.

2. Fall. Für unendlich viele n sei sowohl A_n als auch B_n in r_1 enthalten. Da eine beliebige Teilfolge von $\{q_n\}$ wiederum das Primende E bestimmt, so können wir annehmen, dass für alle n sowohl A_n als B_n in r_1 enthalten ist. In diesem Falle muss r_1 entweder ein Häufungskontinuum in r oder die Summe von höchstens zwei unzerlegbaren Kontinuen sein.

Angenommen, r_1 sei kein Häufungskontinuum in r . Wenn r_1 nicht ein unzerlegbares Kontinuum ist, so wird r_1 in zwei echte Teilkontinua s und t zerlegt. Jedes Primende von $\mathfrak{G}_1$ kann durch eine Kette von Querschnitten bestimmt werden, die auf konzentrischen Kreisen liegen, und gegen den gemeinsamen Mittelpunkt dieser Kreise konvergieren. Daher kann man anfangs q_n konstruieren derart, dass q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) ein kreisförmiger Querschnitt mit einem Punkt A von r als Mittelpunkt ist. Dann muss der Punkt A in $s \cdot t$ enthalten sein.

Angenommen in der Tat, dass der Punkt A in einem und nur einem von den beiden s und t , etwa in s , enthalten ist. Da q_n den Punkt A_n mit dem Punkte B_n

1) A. Rosenthal: Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua. Sgb. Bay. Ak. Wiss. (1919).

2) Vgl (II).

3) Vgl (II).

verbindet, und da der Durchmesser von q_n mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, so muss für ein genügend grosses n sowohl A_n als auch B_n in s enthalten sein. Wenn wir ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Teilkontinuum von s mit l bezeichnen, so bestimmt nach dem A. Rosenthalschen Satze $l + q_n$ in der Ebene genau zwei Gebiete, die von dem ganzen Kontinuum $l + q_n$ begrenzt werden. Eines von diesen beiden Gebieten muss mit $\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{H}_n + q_n)$ übereinstimmen, da die Begrenzung von $\mathfrak{H}_n$ die Punkte von t enthalten muss. Daraus folgt, dass sowohl C als auch D ein erreichbarer Punkt des Primendes E sein muss, wenn wir zwei Punkte C und D aus $r - s$ wählen, die von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbar sind und die nicht Grenzpunkte von s sind. Das widerspricht aber dem C. Carathéodoryschen Satz, damit muss der Punkt A in $s \cdot t$ enthalten sein. Ebenfalls kann es sich niemals ergeben, dass für unendlich viele n eines von beiden s und t die beiden Punkte A_n und B_n gleichzeitig enthält.

Zweitens bezeichnen wir $r_1 - t$ mit s_1 und beweisen, dass die abgeschlossene Hülle $\bar{s}_1$ von s_1 ein unzerlegbares Kontinuum ist. Die Menge s_1 muss zunächst eine zusammenhängende Menge sein. Angenommen in der Tat, dass s_1 keine zusammenhängende Menge ist, dann muss s_1 in die beiden Teilmengen s_2 und s_3 zerlegt werden derart, dass s_2 und s_3 punktfremd sind und keine einen Häufungspunkt der anderen enthält. Alsdann ist sowohl $t + s_2$ als $t + s_3$ ein Kontinuum. Da t für fast alle n einen und nur einen von den beiden A_n und B_n enthalten muss, so muss eines von den beiden $t + s_2$ und $t + s_3$, etwa $t + s_2$, für unendlich viele n die beiden Punkte A_n und B_n enthalten. Wir bezeichnen ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Teilkontinuum von $t + s_3$ mit l , so bestimmt $l + q_n$ in der Ebene genau zwei Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die von dem ganzen Kontinuum $l + q_n$ begrenzt werden. Man kann leicht dann einsehen, dass $\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{H}_n + q_n)$ mit einem von beiden $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ identisch ist, da die Begrenzung von $\mathfrak{H}_n$ alle Punkte von s_2 enthält. Daraus folgt, dass, wenn wir die beiden Punkte C und D von $r - (t + s_3)$ auswählen, die von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbar sind, sowohl C als auch D ein erreichbarer Punkt von E sein muss. Das widerspricht aber dem Carathéodoryschen Satz. Damit ist bewiesen, dass s_1 eine zusammenhängende Menge ist.

Wir beweisen nun, dass $\bar{s}_1$ ein unzerlegbares Kontinuum ist. Angenommen in der Tat, dass $\bar{s}_1$ kein unzerlegbares Kontinuum ist, so muss $\bar{s}_1$ in die beiden echten Teilkontinua u_1 und u_2 zerlegt werden. Dabei muss weder $u_1 - u_2$ noch $u_2 - u_1$ in t enthalten sein. Angenommen in der Tat, dass eines von den beiden $u_1 - u_2$ und $u_2 - u_1$, etwa $u_1 - u_2$, in t enthalten ist. Dann muss $u_1 - u_2$ in $\bar{s}_1 - s_1$ enthalten sein,

und daher muss s_1 in u_2 enthalten sein. Daraus folgt, dass alle Punkte von $u_1 - u_2$ die Häufungspunkte von u_2 sind. Das widerspricht aber der Eigenschaft von u_2 . Wir bekommen also die beiden Kontinua $t + u_1$ und $t + u_2$ und zwar von der Art, dass kein von den beiden Kontinuen $t + u_1$ und $t + u_2$ in andern enthalten ist. Da $r_1 = t + \bar{s}_1$ ist und sowohl t als auch $\bar{s}_1$ ein echtes Teilkontinuum von r_1 ist, kann es sich nicht ergeben, dass eines von t und $\bar{s}_1$ für unendlich viele n die beiden Punkte A_n und B_n gleichzeitig enthält. Folglich muss mindestens eines von $t + u_1$ und $t + u_2$ für unendlich viele n die beiden Punkte A_n und B_n enthalten. Andererseits, da r_1 in die zwei echte Teilkontinua $t + u_1$ und $t + u_2$ zerlegt wird, so kann es sich niemals ergeben, dass eines von $t + u_1$ und $t + u_2$ für unendlich viele n die beiden Punkte A_n und B_n enthält. Also gelangen wir unter der Annahme, dass $\bar{s}_1$ nicht ein unzerlegbares Kontinuum ist, zu einem Widerspruch. Daher muss $\bar{s}_1$ ein unzerlegbares Kontinuum sein.

Wenn wir nun $r_1 - \bar{s}_1$ mit $\bar{t}_1$ bezeichnen, so können wir ebenfalls beweisen, dass $\bar{t}_1$ ein unzerlegbares Kontinuum ist. Also muss r_1 aus zwei unzerlegbaren Kontinuen $\bar{t}_1$ und $\bar{s}_1$ bestehen, wie behauptet, wenn r_1 weder ein Häufungskontinuum in r noch ein unzerlegbares Kontinuum ist.

3. Fall. Für fast alle n sei einer von den beiden A_n und B_n und nicht der andere in r_1 enthalten. In diesem Falle muss r_1 entweder ein Häufungskontinuum in r oder ein unzerlegbares Kontinuum oder die Vereinigungsmenge eines unzerlegbaren Kontinuum und eines Häufungskontinuum in r sein. Wie im 2. Falle konstruieren wir q_n , derart dass $q_n (n = 1, 2, \dots)$ ein kreisförmiger Querschnitt mit einem Punkt A von r als Mittelpunkt ist.

Angenommen, dass r_1 kein Häufungskontinuum in r ist. Um es hierbei zu beweisen, dass r_1 entweder ein unzerlegbares Kontinuum oder die Vereinigungsmenge eines unzerlegbaren Kontinuum und eines Häufungskontinuum in r ist, zeigen wir zunächst, dass $\overline{r - (r - r_1)}$ ein unzerlegbares Kontinuum ist.

In ganz analoger Weise wie im 2. Falle können wir zeigen, dass der Punkt A in $\overline{(r - r_1)} \cdot \overline{r - (r - r_1)}$ enthalten ist. Wenn das Kontinuum $\overline{r - (r - r_1)}$ kein unzerlegbares Kontinuum ist, so wird $\overline{r - (r - r_1)}$ in zwei echte Teilkontinua s und t zerlegt. Weder s noch t muss dann in $\overline{r - r_1}$ enthalten sein; denn, wenn etwa s in $\overline{r - r_1}$ enthalten ist, so müssen alle Punkte von s die Häufungspunkte von t sein, da alle Punkte von $\overline{(r - r_1)} \cdot \overline{r - (r - r_1)}$ die Häufungspunkte von $\overline{r - (r - r_1)}$ sind.

Mindestens eines von den beiden $\overline{r-r_1+s}$ und $\overline{r-r_1+t}$, etwa $\overline{r-r_1+s}$, muss für unendlich viele n A_n und B_n enthalten, da nach der Voraussetzung im 3. Falle $s+t$ nicht gleichzeitig A_n und B_n enthält. Wir bezeichnen nun ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Teilkontinuum von $\overline{r-r_1+s}$ mit l , so bestimmt $l+q_n$ in der Ebene genau zwei Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die von $l+q_n$ begrenzt werden. Eines von den beiden $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ muss mit $\mathfrak{G}_1-(\mathfrak{S}_n+q_n)$ übereinstimmen, da die Begrenzung von $\mathfrak{S}_n$ alle Punkte t enthalten muss. Daraus folgt, dass, wenn wir zwei Punkte C und D von t auswählen, die von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbar sind und nicht in $\overline{r-r_1+s}$ enthalten sind, sowohl C als auch D ein erreichbarer Punkt vom Primende E sein muss. Das widerspricht aber dem Carathéodoryschen Satz. Also kommen wir unter der Annahme, dass $\overline{r-(r-r_1)}$ kein unzerlegbares Kontinuum ist, zu einem Widerspruch, damit ist bewiesen, dass $\overline{r-(r-r_1)}$ ein unzerlegbares Kontinuum ist.

Wenn $\overline{r-(r-r_1)}$ mit r_1 identisch ist, so ist r_1 ein unzerlegbares Kontinuum. Angenommen nun, dass $\overline{r-(r-r_1)}$ mit r_1 nicht identisch ist. Wir setzen einen Punkt B von $r-r_1$ fest, so enthält für ein genügend grosses n die Begrenzung von $\mathfrak{S}_n$ nicht den Punkt B . Den Durchschnitt der Begrenzung von $\mathfrak{S}_n$ mit r bezeichnen wir mit p_n , so ist p_n ein Kontinuum. Das Kontinuum p_n enthält r_1 und damit auch $\overline{r-(r-r_1)}$. Nach der Annahme, dass $\overline{r-(r-r_1)}$ mit r_1 nicht identisch ist, ist $p_n-\overline{r-(r-r_1)}$ nicht die Nullmenge.

Nach der Voraussetzung im 3. Falle kann es sich niemals ergeben, dass sowohl A_n als auch B_n in $\overline{r-(r-r_1)}$ enthalten ist. Das kann auch sich nicht ergeben, dass A_n und B_n gleichzeitig in $\overline{r-r-(r-r_1)}$ enthalten sind. Angenommen in der Tat, dass $\overline{r-r-(r-r_1)}$ sowohl A_n als B_n enthält, so muss $\overline{r-r_1}$ auch die beiden Punkte A_n und B_n enthalten. Wir bezeichnen ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Teilkontinuum von $\overline{r-r_1}$ mit l , so bestimmt $l+q_n$ in der Ebene genau zwei Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die von $l+q_n$ begrenzt werden. Eines von den beiden Gebieten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ muss mit $\mathfrak{G}_1-(\mathfrak{S}_n+q_n)$ identisch sein, da die Begrenzung von $\mathfrak{S}_n$ alle Punkte von r_1 enthalten muss. Daraus folgt, dass, wenn wir zwei Punkte C und D von $r_1-(r-r_1)$ auswählen, die von $\mathfrak{G}_1$ aus erreichbar sind, sowohl C als auch D ein erreichbarer Punkt vom Primende E sein muss. Das widerspricht aber dem Carathéodoryschen Satz. Daher muss einer von A_n und B_n in $\overline{r-(r-r_1)}$ und der andere in $\overline{r-r-(r-r_1)}$ enthalten sein.

Wir bezeichnen nun ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Teilkontinuum von p_n mit l_n , so bestimmt l_n+q_n in der Ebene genau zwei Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, die von

dem ganzen Kontinuum $l_n + q_n$ begrenzt werden. Eines von den beiden Gebieten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ muss mit $\mathfrak{S}_n$ identisch sein, da die Begrenzung von $\mathfrak{G}_1 - (\mathfrak{S}_n + q_n)$ den Punkt B enthalten muss. Daraus folgt, dass p_n mit l_n identisch ist und daher ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Kontinuum ist.

Da $\overline{r - (r - r_1)}$ einen von den beiden A_n und B_n und nicht den andern enthält, so muss $p_n - \overline{r - (r - r_1)}$ eine zusammenhängende Menge sein. Angenommen in der Tat, dass $\overline{p_n - r - (r - r_1)}$ nicht eine zusammenhängende Menge ist, so wird $\overline{p_n - r - (r - r_1)}$ in zwei Teilmengen u und v zerlegt derart, dass u und v zueinander punktfremd sind und keine einen Häufungspunkt der andern enthält. Alsdann muss eines von den beiden Kontinuen $\overline{r - (r - r_1) + u}$ und $\overline{r - (r - r_1) + v}$ die beiden Punkte A_n und B_n enthalten; das widerspricht aber der Tatsache, dass p_n ein zwischen A_n und B_n irreduzibles Kontinuum ist.

Wir bezeichnen $\overline{p_n - r - (r - r_1)}$ mit k_n , dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{k_n}$ ein Kontinuum. Wir konstruieren für fast alle n ($n \geq m$) das Kontinuum $\overline{k_n}$. Es entsteht, dass $r_1 = \prod_{n=m}^{\infty} p_n = \prod_{n=m}^{\infty} \overline{(r - r - r_1 + k_n)} = \overline{r - (r - r_1)} + \prod_{n=m}^{\infty} \overline{k_n}$ ist. Das Kontinuum $\overline{k_n}$ ist in $p_n - \{r - (r - r_1)\}$ und daher in $\overline{r - r_1}$ enthalten. Andererseits ist $\prod_{n=m}^{\infty} \overline{k_n}$ in r_1 enthalten, so $\prod_{n=m}^{\infty} \overline{k_n}$ ist ein Häufungskontinuum in $\overline{r - r_1}$ und damit auch in r . So ist r_1 die Vereinigungsmenge von dem unzerlegbaren Kontinuum $\overline{r - (r - r_1)}$ und dem Häufungskontinuum $\prod_{n=m}^{\infty} \overline{k_n}$ in r .

Satz. II. Es sei r die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$. Jenachdem r die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen ist oder nicht, ist r „monostatique“ oder nicht.

Beweis. Wie C. Carathéodory bewiesen hat, gibt es eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Primenden des Gebietes $\mathfrak{G}_1$ auf alle Punkte einer Kreis-peripherie k . Wir bezeichnen im folgenden einen Punkt von k mit $x, x', \dots$ oder $y, y', \dots$ und das zu $x, x', \dots$ entsprechende Primende mit $E_x, E_{x'}, \dots$. Erstens unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall A. r sei nicht die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen.

1. Schritt. Es seien x und x_1 zwei Punkte von k derart, dass E_x und E_{x_1} die Punkte von r gemeinsam enthalten. Dann wird k durch die beiden Punkte x und

x_1 in die beiden abgeschlossenen Kreisbogen $\overleftarrow{xx_1}$ und $\overleftarrow{x_1x}$ derart zerlegen, dass $\overleftarrow{xx_1}$ und $\overleftarrow{x_1x}$, bis auf Endpunkte, keine Punkte gemein haben. Nach dem Satze IV in meiner letzten Arbeit (II) besitzt einer von den beiden $\overleftarrow{xx_1}$ und $\overleftarrow{x_1x}$, etwa $\overleftarrow{xx_1}$, die folgende Eigenschaft¹⁾; ein beliebiger Punkt von $\overleftarrow{xx_1}$ entspricht dem mehrfachen Primende; genauer gesagt, wenn y einen beliebigen Punkt auf $\overleftarrow{xx_1}$ bedeutet, und wenn A ein in E_y enthaltener Punkt von r ist, so muss A in mindestens einem von den beiden E_x und E_{x_1} enthalten sein. Das kann aber sich nicht ergeben, dass sowohl $\overleftarrow{xx_1}$ wie auch $\overleftarrow{x_1x}$ die obige Eigenschaft IV von (II) hat. Wir bezeichnen²⁾ in der Tat mit m_x die Menge aller in E_x enthaltenen Punkte von r und mit m_{x_1} die Menge aller in E_{x_1} enthaltenen Punkte von r , so muss r mit der Vereinigung von m_x und m_{x_1} übereinstimmen, damit muss r nach Satz I die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von unzerlegbaren Kontinuen und Häufungskontinuen in r sein. Das kann aber im Falle A nicht auftreten. Wir sagen im folgenden: der Punkt x_1 in oben oder in unten für x liegt, jenachdem $\overleftarrow{x_1x}$ oder $\overleftarrow{xx_1}$ die Eigenschaft IV von (II) hat.

Ein Punkt A von r sei in einem Primende E_x enthalten. Wenn der Punkt A nicht einfacher³⁾ Punkt von E_x ist, so bestimmt die Menge aller Punkte x' von k von der Art, dass das zu x' entsprechende Primende $E_{x'}$ den Punkt A enthält und x' in oben für x liegt, eine obere Grenze x_1 . Das Primende E_{x_1} enthält dann den Punkt A . Es gibt in der Tat eine Punktfolge $\{y_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ auf k von der Art, dass das zu y_n entsprechende Primende E_{y_n} den Punkt A enthält und y_n in oben für x liegt, und dass $\{y_n\}$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen den Punkt x_1 konvergiert. Da es eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Primenden von $\mathfrak{G}_1$ auf alle Punkte von k gibt, so konvergiert die Primendenfolge $\{E_{y_n}\}$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen E_{x_1} . $\{\mathfrak{S}_{x_1}^m\} (m=1, 2, 3, \dots)$ sei die das Primende E_{x_1} definierende Gebietskette, so gehören⁴⁾ fast alle Primenden der Folge $\{E_{y_n}\}$ zu jedem Gebiet $\mathfrak{S}_{x_1}^m$. Da jedes Primende E_{y_n} den Punkt A enthält, so enthält die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{S}_{x_1}^m} (m=1, 2, \dots)$ auch den Punkt A .

1) Diese Eigenschaft bezeichnen wir im folgenden als die Eigenschaft IV von (II).

2) Im folgenden bezeichnen wir stets die Menge aller in einem Primende E_x enthaltenen Punkte mit m_x .

3) Ein Punkt A der Begrenzung r von $\mathfrak{G}_1$ wird einfach genannt, wenn er in nur einem einzigen Primende von $\mathfrak{G}_1$ enthalten ist. Je ein Punkt von r , der nicht einfach ist, heisst mehrfacher Punkt.

4) Es sei $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathfrak{G}'$ ein Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. E_x sei ein Primende von $\mathfrak{G}$ und $\{\mathfrak{S}_n\} (n=1, 2, \dots)$ die das Primende E_x definierende Gebietskette. Wenn fast alle Gebiete von $\{\mathfrak{S}_n\}$ in $\mathfrak{G}'$ enthalten sind, so sagen wir, dass Primende E_x zu $\mathfrak{G}'$ gehört.

Zweitens liegt der Punkt x_1 in oben für x . Angenommen in der Tat, dass x in oben für x_1 liegt, so muss r die Vereinigungsmenge $m_x + m_{x_1} + m_{y_1} + m_{y_2} + \dots$ sein. Daraus folgt nach Satz I, dass r die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von unzerlegbaren Kontinuen und Häufungskontinuen in r ist. Das widerspricht aber der Voraussetzung im Falle A.

Ebenfalls bestimmt die Menge aller Punkte x'' von k , so dass das zu x'' entsprechende Primende $E_{x''}$ den Punkt A enthält und x in oben für x'' liegt, eine untere Grenze x_2 . Das Primende E_{x_2} enthält dann den Punkt A und x liegt in oben für x_2 . Wenn x_2 nicht mit x übereinstimmt, so kann x_2 niemals auf $\overleftarrow{x_1 x}$ liegen. Angenommen in der Tat, dass x_2 auf $\overleftarrow{x_1 x}$ liegt, so muss r die Vereinigungsmenge $m_x + m_{x_1} + m_{x_2}$ sein. Das kann im Falle A nicht der Fall sein.

Wir bezeichnen mit $\tilde{x}_0$ die untere Grenze der Menge aller Punkte x' von k von der Art, dass E_{x_1} und $E_{x'}$ gemeinsame Punkte enthalten und x_1 in oben für x' liegt, und mit $\tilde{x}_1$ die obere Grenze der Menge aller Punkte x'' von k von der Art, dass E_{x_0} und $E_{x''}$ gemeinsame Punkte enthalten und x'' in oben für $\tilde{x}_0$ liegt. In ganz analoger Weise wie oben können wir leicht zeigen, dass $E_{\tilde{x}_0}$ und $E_{\tilde{x}_1}$ die gemeinsame Punkte enthalten und $\tilde{x}_1$ in oben für $\tilde{x}_0$ liegt.

Hierbei können wir die folgenden vier Möglichkeiten voraussehen.

1. Fall. $x_1 = \tilde{x}_1$ und $x_2 = \tilde{x}_0$
2. Fall. $x_1 = \tilde{x}_1$ und $x_2 \neq \tilde{x}_0$
3. Fall. $x_1 \neq \tilde{x}_1$ und $x_2 = \tilde{x}_0$
4. Fall. $x_1 \neq \tilde{x}_1$ und $x_2 \neq \tilde{x}_0$.

In Wirklichkeit kann 4. Fall nicht auftreten. Denn mindestens eines von den beiden $E_{\tilde{x}_1}$ und $E_{\tilde{x}_0}$ muss den Punkt A enthalten.¹⁾

Nächstens bezeichnen wir mit $\tilde{x}_2$ die obere Grenze der Menge aller Punkte x' von k von der Art, dass $E_{\tilde{x}_1}$ und $E_{x'}$ gemeinsame Punkte enthalten und x' in oben für $\tilde{x}_1$ liegt, und mit $\tilde{x}_3$ die obere Grenze der Menge aller Punkte x' von k von der Art, dass $E_{\tilde{x}_2}$ und $E_{x'}$ gemeinsame Punkte enthalten und x' in oben für $\tilde{x}_2$ liegt.

1) Die untere Grenze $\tilde{x}_0^*$ von der Menge aller Punkte x'' von k von der Art, dass das zu x'' entsprechende Primende $E_{x''}$ und das Primende $E_{\tilde{x}_1}$ gemeinsame Punkte enthalten und $\tilde{x}_1$ in oben für x'' liegt, muss mit $\tilde{x}_0$ übereinstimmen. Dies ist ebenfalls leicht einzusehen.

Dabei ist es zu bemerken, dass $\overleftarrow{\tilde{x}_2\tilde{x}_1}$ und $\overleftarrow{\tilde{x}_3\tilde{x}_2}$ nur einen einzigen Punkt $\tilde{x}_2$ gemeinsam hat.

Diese Verfahren setzen wir fort, dann bekommen wir eine Folge der Punkte $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots$. Wir bezeichnen $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n$ mit $\tilde{x}$.

In gleicher Weise bezeichnen wir mit $\tilde{x}_{-1}$ die untere Grenze der Menge aller Punkte x' von k von der Art, dass $E_{x'_0}$ und $E_{x'}$ gemeinsame Punkte enthalten und $\tilde{x}_0$ in oben für x' liegt. Diese Verfahren setzen wir fort, dann bekommen wir eine Folge der Punkte $\tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_{-2}, \tilde{x}_{-3}, \dots$. Wir bezeichnen $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_{-n}$ mit $\tilde{x}$. Der Punkt $\tilde{x}$ kann nicht $\tilde{x}$ übereinstimmen. Denn, wenn $\tilde{x}$ mit $\tilde{x}$ übereinstimmt, so muss r die Vereinigungsmenge $m_{\tilde{x}_0} + m_{\tilde{x}_1} + m_{\tilde{x}_2} + \dots + m_{\tilde{x}_{-1}} + m_{\tilde{x}_{-2}} + \dots$ sein; das widerspricht aber der Voraussetzung des Falles A. Damit bekommen wir ein abgeschlossenes Intervall $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$ auf k .

2. Schritt. Für einen Punkt x von k definieren wir wie im 1. Schritte $\{\tilde{x}_n\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$, $\tilde{x}$ und $\tilde{x}$. Es seien y_1 und y_2 zwei Punkte von k von der Art, dass E_{y_1} und E_{y_2} gemeinsame Punkte enthalten und y_1 in oben für y_2 liegt. Wenn y_2 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}}$ und $\tilde{x}_p$ auf $\overleftarrow{y_1y_2}$ liegt, und wenn $\tilde{x}_p$ nicht mit y_2 übereinstimmt, so muss y_1 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p}$ liegen. Um dies zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall a) $p \geq 1$.

Angenommen in diesem Falle, dass $\tilde{x}_{p+1}$ auf $\overleftarrow{y_1y_2}$ liegt und $\tilde{x}_{p+1}$ nicht mit y_1 übereinstimmt. Dann können nicht alle in E_{y_2} enthaltenen Punkte in $E_{\tilde{x}_p}$ enthalten sein. Daher müssen alle in E_{y_2} und nicht in $E_{\tilde{x}_p}$ enthaltenen Punkte in $E_{\tilde{x}_{p-1}}$ enthalten sein. Hieraus folgt, dass alle sowohl in E_{y_1} als in E_{y_2} enthaltenen Punkte in $E_{\tilde{x}_{p-1}}$ enthalten sind, das ist aber ein Widerspruch mit der Eigenschaft von $\tilde{x}_p$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Fall b) $p \leq 0$.

Der Punkt $\tilde{x}_1$ kann nicht auf $\overleftarrow{y_1y_2}$ liegen. Wenn $\tilde{x}_1$ auf $\overleftarrow{y_1y_2}$ liegt, so muss $\tilde{x}_0$ auch auf $\overleftarrow{y_1y_2}$ liegen. Ein Punkt A sei sowohl in $E_{\tilde{x}_1}$ als auch in $E_{\tilde{x}_0}$ enthalten, so muss der Punkt A in E_{y_1} oder in E_{y_2} enthalten sein. Da y_2 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}}$ liegt und $\tilde{x}_p$ nicht mit y_2 übereinstimmt, so muss der Punkt A in E_{y_1} enthalten sein. Folglich muss y_1 mit $\tilde{x}_1$ übereinstimmen; damit muss y_2 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_1\tilde{x}_0}$ liegen. Das ist unmöglich, da y_2 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}}$ liegt und $\tilde{x}_p$ nicht mit y_2 übereinstimmt. Daher kann $\tilde{x}_1$ nicht auf $\overleftarrow{y_1y_2}$ liegen.

Wenn y_1 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_q\tilde{x}_{q-1}}$ liegt und $\tilde{x}_{q-1}$ nicht mit y_1 übereinstimmt, so muss

$q-1 \leq 0$ sein. Dann muss $\tilde{x}_{q-1}$ auf $\overleftarrow{y_1 y_2}$ liegen und daher muss y_2 auf demselben Grunde wie im Falle a) auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{q-1} \tilde{x}_{q-2}}$ liegen. Daraus folgt, dass $p = q-1$ oder $p = q$ sein muss.

Wenn $p = q$ ist, so muss y_1 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p \tilde{x}_{p-1}}$ liegen. Nach Voraussetzung, dass $\tilde{x}_p$ auf $\overleftarrow{y_1 y_2}$ liegt, muss y_1 mit $\tilde{x}_p$ übereinstimmen. Wenn $p = q-1$ ist, so liegt y_1 offenbar auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} \tilde{x}_p}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es seien y_1 und y_2 zwei Punkte von k von der Art, dass E_{y_1} und E_{y_2} gemeinsame Punkte enthalten und y_1 in oben für y_2 liegt. Wenn y_1 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} \tilde{x}_p}$ liegt und $\tilde{x}_p$ auf $\overleftarrow{y_1 y_2}$ liegt, und wenn y_1 nicht mit $\tilde{x}_p$ übereinstimmt, so muss y_2 auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p \tilde{x}_{p-1}}$ liegen. Diese Behauptung kann in ganz ähnlicher Weise wie oben bewiesen werden.

3. Schritt. $x, \{\tilde{x}_n\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $\tilde{x}$ und $\tilde{z}$ sollen dieselben Sinne wie im 2. Schritte haben. Es sei y ein Punkt auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p \tilde{x}_{p-1}}$, und z sei die obere Grenze der Menge aller Punkte y' von k von der Art, dass $E_{y'}$ und E_y gemeinsame Punkte enthalten und y' in oben für y liegt, und w sei die obere Grenze der Menge aller Punkte y'' von k von der Art, dass $E_{y''}$ und E_z gemeinsame Punkte enthalten und y'' in oben für z liegt.

Wir beweisen nun, dass, wenn der Punkt z auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} \tilde{x}_p}$ liegt, w nicht auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} \tilde{x}_{p-1}}$ liegen muss oder mit $\tilde{x}_{p+1}$ übereinstimmen muss. Angenommen in der Tat, dass w auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} \tilde{x}_{p-1}}$ liegt und nicht mit $\tilde{x}_{p+1}$ übereinstimmt. Dann muss w auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} z}$ liegen. Denn, wenn w auf $\overleftarrow{z \tilde{x}_{p-1}}$ liegt, so muss die Begrenzung r von $\mathfrak{G}_1$ die Vereinigungsmenge $m_{\tilde{x}_{p+1}} + m_{\tilde{x}_p} + m_{\tilde{x}_{p-1}}$ sein; damit muss r die Vereinigungsmenge von endlicher Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen sein. Dies ist aber unmöglich im Falle A.

Nun, wenn w auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} z}$ liegt und nicht mit $\tilde{x}_{p+1}$ übereinstimmt, so muss jeder von den in E_z enthaltenen Punkte auch in $E_{\tilde{x}_p}$ und nicht in $E_{\tilde{x}_{p+1}}$ enthalten sein. Daraus folgt, dass die in $E_{\tilde{x}_p}$ und nicht in E_z enthaltenen Punkte existieren. Denn, wenn $m_{\tilde{x}_p}$ und m_z übereinstimmt, so muss w mit $\tilde{x}_{p+1}$ übereinstimmen. Jeder in $E_{\tilde{x}_p}$ und nicht in E_z enthaltene Punkt muss in E_y enthalten sein. Ein sowohl in $E_{\tilde{x}_p}$ als auch in $E_{\tilde{x}_{p+1}}$ gleichzeitig enthaltener Punkt muss daher in E_y enthalten sein, damit müssen E_y und $E_{\tilde{x}_{p+1}}$ gemeinsame Punkte enthalten. Das ist aber ein Widerspruch mit der Annahme, dass z auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1} \tilde{x}_p}$ liegt und z nicht mit $\tilde{x}_{p+1}$ übereinstimmt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sei y ein Punkt auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p \tilde{x}_{p-1}}$, und z sei die untere Grenze der Menge aller Punkte y' von k von der Art, dass $E_{y'}$ und E_y gemeinsame Punkte enthalten und y

in oben für y' liegt, und w sei die untere Grenze der Menge aller Punkte y'' von k derart, dass $E_{y''}$ und E_z gemeinsame Punkte enthalten und z in oben für y'' liegt. Wenn der Punkt z dabei auf $\tilde{x}_{p-1}\tilde{x}_{p-2}$ liegt, so muss w nicht auf $\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-2}$ liegen oder w und $\tilde{x}_{p-2}$ übereinstimmen. Diese Behauptung kann in gleicher Weise wie oben bewiesen werden.

4. Schritt. Für beide beliebige Punkte x und x' von k in der in 1. Schritte geübten Weise definieren wir $\tilde{x}\tilde{x}$ und $\tilde{x}'\tilde{x}'$, dann müssen $\tilde{x}\tilde{x}$ und $\tilde{x}'\tilde{x}'$ übereinstimmen oder höchstens nur Endpunkte gemein haben. Hierbei unterscheiden wir die beiden Fälle.

1. Fall. $\tilde{x}\tilde{x}$ enthält mindestens einen von $\tilde{x}'$ und $\tilde{x}'$ verschiedenen Punkt von $\tilde{x}'\tilde{x}'$.

In diesem Falle in der Menge $\tilde{x}\tilde{x} - (\tilde{x} + \tilde{x})$ wird ein von $\tilde{x}'$ und $\tilde{x}'$ verschiedener Punkt y von $\tilde{x}'\tilde{x}'$ enthalten. Wir können annehmen, dass y in $\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p$ enthalten ist, und dass y nicht mit $\tilde{x}_p$ übereinstimmt.

Ein Punkt A von r sei in E_y enthalten, und wir bezeichnen mit y_1 die obere Grenze der Menge aller Punkte y' von k von der Art, dass $E_{y'}$ den Punkt A enthält und y' in oben für y liegt, und wir bezeichnen auch mit y_2 die untere Grenze der Menge aller Punkte y'' von k von der Art, dass $E_{y''}$ den Punkt A enthält und y in oben für y'' liegt. Da der Punkt A in mindestens einem von beiden $E_{\tilde{x}_{p+1}}$ und $E_{\tilde{x}_p}$ enthalten ist, nehmen wir erstens an, dass $E_{\tilde{x}_p}$ den Punkt A enthält.¹⁾ Nach 2. Schritte muss dann y_2 auf $\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}$ liegen. Wenn dabei y_2 nicht mit $\tilde{x}_p$ übereinstimmt, so muss wiederum nach 2. Schritte der Punkt y_1 auf $\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p$ liegen. Wenn y_2 mit $\tilde{x}_p$ übereinstimmt, und wenn y_1 nicht auf $\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p$ liegt, so muss nach 2. Schritte y_1 auf $\tilde{x}_{p+2}\tilde{x}_{p+1}$ liegen.

Wir bezeichnen mit $\tilde{y}_0$ die unteren Grenze der Menge aller Punkte y' von k von der Art, dass E_{y_1} und $E_{y'}$ gemeinsame Punkte enthalten und y_1 in oben für y' liegt. Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall a) y_1 liegt auf $\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p$. In diesem Falle muss nach 2. Schritte $\tilde{y}_0$ auf $\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}$ liegen. Denn y_1 liegt auf $\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p$ und y_1 stimmt nicht mit $\tilde{x}_p$ überein und $\tilde{x}_p$ liegt auf $y_1\tilde{y}_0$.

1) Angenommen, dass $E_{\tilde{x}_{p+1}}$ den Punkt A enthält. In diesem Falle unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall. y stimmt weder mit $\tilde{x}_p$ noch mit $\tilde{x}_{p+1}$ überein. In diesem Falle gilt auch die Analogie mit der folgenden Beweisführung.

2. Fall. y stimmt mit $\tilde{x}_{p+1}$ überein. In diesem Falle gilt auch die folgende Beweisführung, wenn wir p durch $p+1$ ersetzen.

Fall b) y_1 liegt auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+2}\tilde{x}_{p+1}}$ und stimmt nicht mit $\tilde{x}_{p+1}$ überein. In diesem Falle muss nach 2. Schritte $\tilde{y}_0$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p}$ liegen. Andererseits muss $\tilde{y}_0$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}}$ liegen. Daher im Falle b) stimmt $\tilde{y}_0$ mit $\tilde{x}_p$ überein.

Wir bezeichnen mit $\tilde{y}_1$ die obere Grenze der Menge aller Punkte y' von k von der Art, dass E_{y_0} und $E_{y'}$ gemeinsame Punkte enthalten und y' in oben für $\tilde{y}_0$ liegt. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle.

Fall a) $\tilde{y}_0$ liegt auf $\overleftarrow{\tilde{x}_p\tilde{x}_{p-1}}$ und stimmt nicht mit $\tilde{x}_p$ überein. In diesem Falle muss nach 2. Schritte $\tilde{y}_1$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+1}\tilde{x}_p}$ liegen.

Fall b) $\tilde{y}_0$ stimmt mit $\tilde{x}_p$ überein. In diesem Falle muss $\tilde{y}_1$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{p+2}\tilde{x}_{p+1}}$ liegen.

Schliesslich können wir in den beiden Fällen a) und b) eine Nummer h hinweisen von der Art, dass $\tilde{y}_0$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_h\tilde{x}_{h-1}}$ liegt und $\tilde{y}_1$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h+1}\tilde{x}_h}$ liegt.

Wir definieren nun $\tilde{y}_n (n = 2, 3, \dots)$ wie in 1. Schritte, so kann nach 3. Schritte $\tilde{y}_2$ nicht auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h+1}\tilde{x}_{h-1}}$ liegen, wenn $\tilde{y}_2$ nicht mit $\tilde{x}_{h+1}$ übereinstimmt. Wenn $\tilde{y}_1$ nicht mit $\tilde{x}_{h+1}$ übereinstimmt, so muss nach 2. Schritte $\tilde{y}_2$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h+2}\tilde{x}_{h+1}}$ liegen. Wenn $\tilde{y}_1$ mit $\tilde{x}_{h+1}$ übereinstimmt, so muss nach 2. Schritte $\tilde{y}_2$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h+3}\tilde{x}_{h+2}}$ liegen. Folglich existiert eine Nummer h_2 von der Art, dass $\tilde{y}_1$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h_2}\tilde{x}_{h_2-1}}$ und $\tilde{y}_2$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h_2+1}\tilde{x}_{h_2}}$ liegt, wo $h_2 = h+1$ oder $h_2 = h+2$ ist. Auf demselben Grunde existiert eine Nummer h_3 von der Art, dass $\tilde{y}_2$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h_3}\tilde{x}_{h_3-1}}$ und $\tilde{y}_3$ auf $\overleftarrow{\tilde{x}_{h_3+1}\tilde{x}_{h_3}}$ liegt, wo $h_3 = h_2+1 = \begin{cases} h+2 \\ h+3 \end{cases}$ oder $h_3 = h_2+2 = \begin{cases} h+3 \\ h+4 \end{cases}$ ist. Indem wir die 2. und 3. Schritte auf $\tilde{y}_n (n = 4, 5, 6, \dots)$ anwenden, können wir leicht folgern, dass $\tilde{y}$ mit $\tilde{x}$ übereinstimmt, wenn wir $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}_n$ mit $\tilde{y}$ bezeichnen.

Die Analogie mit den oberen Betrachtungen führt nun ohne weiteres zu $\tilde{y}_n (n = -1, -2, \dots)$. Wir können daher schliessen, dass $\tilde{y}$ mit $\tilde{x}$ übereinstimmt, wenn wir $\lim_{n \rightarrow -\infty} \tilde{y}_n$ mit $\tilde{y}$ bezeichnen. Also stimmt $\overleftarrow{\tilde{y}\tilde{y}}$ mit $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$ überein. Ebenfalls stimmt $\overleftarrow{\tilde{y}\tilde{y}}$ mit $\overleftarrow{\tilde{x}'\tilde{x}'}$ überein, damit stimmt $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$ mit $\overleftarrow{\tilde{x}'\tilde{x}'}$ überein.

2. Fall. $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$ und $\overleftarrow{\tilde{x}'\tilde{x}'}$ gemein haben höchstens nur Endpunkte.

5. Schritt. Es sei l ein fundamentales Intervall¹⁾ von k , so entsprechen höchstens abzählbar viele Punkte $y_1, y_2, y_3, \dots$ von l den einfachen Primenden von $\mathfrak{G}_1$ und ein zu mehrfachem Primende entsprechender Punkt x ist im oben definierten $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$ enthalten. Nach 4. Schritte existiert höchstens abzählbar viele voneinander verschiedene $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$. Es sei z beliebiger Punkt auf einem $\overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}}$, so ist $\sum m_z (z \in \overleftarrow{\tilde{x}\tilde{x}})$ die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von Häu-

1) K. Koseki. (II).

fungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen $m_{\mathbb{Z}}^n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) und $m_{\mathbb{Z}}, m_{\mathbb{Z}}$. Daher muss r die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen, wenn r „monostratique“ ist. Folglich muss im Falle A r nicht „monostratique“ sein.

Fall B. r sei die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen.

In diesem Falle ist r „monostratique“. Angenommen in der Tat, dass r nicht „monostratique“ ist, dann lässt sich r in „Tranches fondamentales“ zyklisch zerlegen derart, dass $r = \sum T_x$ ist. Dabei bedeutet T_x ein „Tranche fondamentale“, und Suffix x durchschreitet eine Kreisperipherie und aus der Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt die Beziehung $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_{x_n} \subset T_{x_0}$. Wenn t ein Teilkontinuum von r ist, und wenn t die beide Punkte $A \in T_{x_1}$ und $B \in T_{x_2}$ enthält, wo $x_1 \neq x_2$ ist, so muss t mindestens eines von den beiden $\sum_{x_1 < \epsilon < x_2} T_x$ und $\sum_{x_1 < \epsilon < x_2} T_x$ enthalten.¹⁾ Daraus folgt ohne weiteres, dass, wenn t ein Häufungskontinuum in r oder ein unzerlegbares Kontinuum ist, t in einem und demselben „Tranche fondamentale“ enthalten sein muss. Daher kann r nicht die Vereinigungsmenge von höchstens abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen sein, wenn r nicht „monostratique“ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zusatz. Es sei r die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ und T_x sei ein „Tranche fondamentale“. Dann besteht T_x aus höchstens abzählbarer Anzahl von Häufungskontinuen in r und unzerlegbaren Kontinuen.

Satz III. Es sei r die beschränkte und gemeinsame Begrenzung zweier Gebiete $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$. Wenn r nicht „monostratique“ ist, so ist jedes „Tranche fondamentale“ von r , ausser höchstens abzählbar vielen „Tranches fondamentales“, ein Häufungskontinuum in r .

Beweis. Satz XII in meiner letzten Arbeit (II) zeigt, dass jedes „Tranche fondamentale“ von r , ausser höchstens abzählbar vielen „Tranches fondamentales“, höchstens einen von $\mathbb{G}_1$ aus erreichbaren Punkt. Daraus folgt ohne weiteres der Satz III.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor T. Matumoto für seine Kritik und verschiedene wichtige Ratschläge herzlichst danken.

1) C. Kuratowski: Sur la structure des frontières communes à deux régions. Fund. Math. 12 (1928).

Literaturverzeichnis.

- C. Carathéodory. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73** (1913).
- K. Koseki. Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes, (II). Jap. Journ. Math. **19** (1948).
- C. Kuratowski. Sur la structure des frontières communes à deux régions, Fund. Math. **12** (1928).
- A. Rosenthal. Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua. Sgb. Bay. Ak. Wiss. (1919).