10. Das Problem der besten Approximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen.

Von Seigo FUKASAWA

(Eingegangen am 9. Juli, 1926.)

Wenn wir eine irrationale Zahl α durch rationale Zahlen approximieren, so stellt sich die Frage, ob ein Bruch $\frac{y_1}{x_1}$ die beste Annäherung gibt oder nicht, d. h. ob für alle Brüche $\frac{y}{x}$, wo $x < x_1$ ist, immer

$\left| \alpha - \frac{y}{x} \right| > \left| \alpha - \frac{y_1}{x_1} \right|$ ist oder nicht. Diese Frage ist schon von H. J. S. Smith völlig gelöst worden⁽¹⁾.

Neulich habe ich einige Aufgabe des Kettenbruchs nach der Kleinschen Idee behandelt⁽²⁾. Ich möchte hier diese Methode auch auf die obige Aufgabe anwenden.

1. Es sei (x, y) die rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene. Wir bilden das Punktgitter G , das den ganzzahligen Werten x und y entspricht, und jedem Gitterpunkte (x, y) lassen wir eine rationale Zahl $\frac{y}{x}$ entsprechen. Wir ziehen in der Ebene eine Gerade $L: y = \alpha x$, und bilden zwei Polygonzüge, deren Ecke den Hauptnäherungsbrüchen von α entsprechen⁽³⁾. Durch einen Punkt $P: (x, y)$ ziehen wir die der Y -Achse parallele Gerade und schneiden L an H . Auf PH nehmen wir P' , so dass $PH = HP'$ ist. Wenn in dem Dreiecke $PP'O$ oder auf seiner Seite kein Gitterpunkt liegt, (O bedeutet den Nullpunkt), so gibt $\frac{y}{x}$ die beste Annäherung und umgekehrt.

Wir wählen in einer Seite von L zwei aufeinanderfolgende (Haupt- oder Neben-) Näherungspunkte $Q: (q, p)$, $Q': (q', p')$ und ziehen durch Q' die der Y -Achse parallele Gerade und schneiden L und OQ an R und S . Wenn $q < x < q'$ ist und $\frac{y}{x}$ die beste Annäherung gibt, wo $P: (x, y)$ in derselben Seite von L wie Q und Q' liegt, so muss P in dem Dreiecke

⁽¹⁾ Smith, Note on continued fractions, Messenger of Mathematics, new series, 6 (1877), 1—13.

⁽²⁾ Fukasawa, Über die Kleinsche geometrische Darstellung des Kettenbruchs, dieses Journal, 2 (1926), 101—114.

⁽³⁾ Vgl. Fukasawa, loc. cit.

ORS liegen. Aber dieses Dreieck enthält keinen Punkt von G , da Q' einer der zu OQ am nächsten liegenden Punkte von G ist. Folglich erkennen wir, dass nur die Näherungsbrüche die beste Annäherung geben können, und da ein Hauptnäherungsbruch näher zu α als jeder ihm vorangehenden Näherungsbruch liegt, gibt er sicher die beste Annäherung. Also haben wir die Nebennäherungsbrüche zu betrachten.

2. Sei $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$ und seien $P_n : (x, y)$ ($n=1, 2, \dots$) die Hauptnäherungspunkte. Zwischen P_{n-2} und P_n liegen $a_n - 1$ Nebennäherungspunkte

$$P_{n,m} : (x_{n,m}, y_{n,m}) \quad (m=1, 2, \dots, a_n-1),$$

und da $x_{n-1} < x_{n,m} < x_n$ ist, gibt $\frac{y_{n,m}}{x_{n,m}}$ dann und nur dann die beste Annäherung, wenn er näher zu α als $\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}$ liegt. Wählen wir P'_{n-1} , so dass $P'_{n-1}P_{n-1}$ der Y -Achse parallel ist und durch L halbiert wird, so gibt $\frac{y_{n,m}}{x_{n,m}}$ dann und nur dann die beste Annäherung, wenn $P_{n,m}$ zwischen OP'_{n-1} und L liegt. Wir transformieren die Punkte O, P_{n-2}, P_{n-1} in $O, A : (0, 1)$ und $B : (1, 0)$ durch die Affintransformation. Dabei kommen L, Y -Achse und $P_n, P_{n,m}$, in

$$\begin{aligned} L' : y &= \alpha_n x & \left(\alpha_n = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}} \right), \\ Y' : y &= \alpha'_n x & \left(\alpha'_n = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots} \right) \end{aligned}$$

und $C : (a_n, 1)$, $C_m : (m, 1)$ (4). Die neue Lage von OP'_{n-1} sei OM und die Schnittpunkte von AC mit Y', L' bzw. OM seien S, T bzw. M .

Weil $O(BTMS)$ harmonisch ist, ist M der Mittelpunkt von ST . $P_{n,m}$ liegt zwischen L und OP'_{n-1} , wenn C_m zwischen M, T liegt, d. h. wenn $C_m T < C_m S$ ist. C_m liegt zwischen M, T oder nicht, wenn

$$m > \frac{a_n + 1}{2} \quad \text{oder} \quad m < \frac{a_n - 1}{2}$$

ist, und wenn a_n gerade ist, liegt $C_{\frac{a_n}{2}}$ dann und nur dann zwischen M , T ,

wenn $CT < AS$ ist, d. h. $\frac{1}{\alpha_n} - a_n = \alpha_{n+1} < \alpha'_n$ ist. Also gibt $\frac{y_{n,m}}{x_{n,m}}$ dann und nur dann die beste Annäherung, wenn

$$m > \frac{a_n - 1}{2}$$

oder

$$m = \frac{a_n}{2}, \quad \alpha_{n+1} < \alpha'_n$$

ist. Dies ist nichts anderes als das Resultat von *Smith*.

Juni, 1926.

(*) Fukasawa, loc. cit.