25. Über das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

von Mitio NAGUMO.

(Eingegangen am 10. Juli, 1927.)

Es sei ein System der beschränkten Funktionen reeller Veränderlichen:

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

vorgelegt, wobei diese Funktionen im Bereiche $|t-t_0| \leq l, |x_i-x_i^0| \leq k$ definiert sind. Wir bezeichnen das Bereich mit B . Wir wollen nun ein System der stetigen Funktionen $x_i=x_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$) von t ein Integralsystem der Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa), \quad (I)$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

nennen⁽¹⁾, wenn für diese Funktionen in bezug auf ihre allen Hauptderivierten, die Ungleichungen:

$$\bar{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_{\pm}^{\pm} x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)), \quad (I')$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

gelten, wobei $\bar{f}_i$ bzw. $\underline{f}_i$ die obere bzw. untere Limesfunktionen von f_i im Bereiche B bedeuten⁽²⁾.

1.

Ehe wir die Existenz des Integralsystems und andere Theoreme beweisen, schicken wir folgende Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Genügt eine stetige Funktion von $t, x(t)$, den Ungleichungen:*

⁽¹⁾ Auch geometrisch sagen wir, dass das Funktionensystem eine Integralkurve der Differentialgleichungen darstellt.

⁽²⁾ Vgl. Caratheodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 122. Dafür dass wir nicht so weit von dem gewöhnlichen Sinne des Integralsystems der gewöhnlichen Differentialgleichungen abweichen, dürfen wir uns auf dem Falle beschränken, wobei die Funktionen f_i nur auf nirgends dichter Menge im B unstetig sind. Sind alle f_i stetig im B , so stimmt die oben erwähnte Definition mit der gewöhnlichen überein.

$$\beta \leq D_{\pm}^{\pm} x(t) \leq \alpha$$

für jeden Wert von t im $t_1 - \delta \leq t \leq t_1 + \delta$, ($\delta > 0$), dann besteht für irgend zwei Werte von t , t' und t'' , im $t_1 - \delta \leq t \leq t_1 + \delta$ die Beziehung:

$$\beta \leq \frac{x'(t'') - x'(t')}{t'' - t'} \leq \alpha.$$

Für den Beweis vergleiche man; Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 532—534.

Hilfssatz 2. Es sei eine Folge der im Intervalle $t_0 - l \leq t \leq t_0 + l$ (das kurz mit L bezeichnet wird) gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen $\{x_n(t)\}$ vorgelegt, deren Derivierten auch in L gleichmäßig beschränkt sind.

$$\begin{aligned} |x_n(t)| &\leq G, \\ |D_{\pm}^{\pm} x_n(t)| &\leq G. \quad (G = \text{Konst.}) \end{aligned} \quad (1)$$

Wir können dann eine Teilfolge $\{x_{n_\nu}(t)\}$ aus $\{x_n(t)\}$ auswählen, so dass die Folge $\{x_{n_\nu}(t)\}$ für $\nu \rightarrow \infty$ in L gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $x(t)$ konvergiert.

Wegen des Hilfssatzes 1 erhält man aus (1):

$$|x_n(t'') - x_n(t')| \leq G |t'' - t'|$$

für beliebige zwei Werte von t , t'' und t' , in L , wobei G von n und t unabhängige Konstante ist. Dann können wir nach dem bekannten Häufungsprinzip für Funktionen den vorliegenden Hilfssatz beweisen. (Man vergleiche: Courant und Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I, S. 40—41.)

Hilfssatz 3. Es sei ein System der Folgen stetiger Funktionen $\{x_i^n(t)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), gegeben, welche, in bezug auf ihre oberen Derivierten, den Ungleichungen:

$$|x_i^n(t) - x_i^0| \leq k, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D^{\pm} x_i^n(t) &\leq \phi_i(t, x_1^n(t), x_2^n(t), \dots, x_{\kappa}^n(t)), \\ (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned} \quad (3)$$

im Intervalle L' (offenem Teilintervalle von L) genügen, wobei die Funktionen $\phi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{\kappa})$ in B stetig sind. Konvergiert jede Folge $\{x_i^n(t)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $x_i(t)$ in L' , so bestehen auch die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} D^{\pm} x_i(t) &\leq \phi_i(t, x_1(t), \dots, x_{\kappa}(t)), \\ (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned} \quad (4)$$

im L' .

Wegen (2) haben wir im L'

$$|x_i(t) - x_i^0| \leq k.$$

Sei t_1 irgend ein Wert von t im L' , so liegt der Punkt $(t=t_1, x_i=x_i(t_1))$ auch im B . Da die Funktionen $\phi_i(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ im B stetig sind, können wir eine positive Zahl δ so klein wählen, dass für $|t-t_1| < \delta$ und $|x_i - x_i(t_1)| < \delta$ stets die Ungleichungen:

$$|\phi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa) - \phi_i(t_1, x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_\kappa(t_1))| < \varepsilon, \quad (5)$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

bestehen, wobei ε eine beliebig klein vorgeschriebene positive Zahl bedeutet. Wir nehmen dann eine andere positive Zahl h , kleiner als δ , so klein, dass für $|t-t_1| < h$ stets:

$$|x_i(t) - x_i(t_1)| < \frac{\delta}{2}, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

gelten. Wir haben auch für genügend grosses n und für $|t-t_1| < h$:

$$|x_i^n(t) - x_i(t)| < \frac{\delta}{2}.$$

Daraus folgt für $|t-t_1| < h$ und genügend grosses n :

$$|x_i^n(t) - x_i(t_1)| < \delta,$$

und also nach (5)

$$|\phi_i(t, x_1^n(t), \dots, x_\kappa^n(t)) - \phi_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1))| < \varepsilon.$$

Dies mit (3) ergibt:

$$D^\pm x_i^n(t) < \phi_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) + \varepsilon.$$

Dann nach dem Hilfssatz 1, für genügend grosses n , im $|t-t_1| < h$,

$$\frac{x_i^n(t) - x_i^n(t_1)}{t - t_1} \leq \phi_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) + \varepsilon,$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Wächst n unendlich gross, so erhält man für $|t-t_1| < h$:

$$\frac{x_i(t) - x_i(t_1)}{t - t_1} \leq \phi_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) + \varepsilon.$$

Lässt man nun ε mit h gegen Null konvergieren, dann

$$D^\pm x_i(t_1) \leq \phi_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

wobei t_1 ein beliebiger Wert von t im L' sein kann. W. z. b. w.

Der Hilfssatz 3 bleibt noch richtig, wenn man (3) und (4) durch die Ungleichungen:

$$D_\pm x_i^n(t) \geq \psi_i(t, x_1^n(t), \dots, x_\kappa^n(t))$$

bzw.

$$D_\pm x_i(t) \geq \psi_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

ersetzt, wobei die Funktionen $\psi_i(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ in B stetig sind.

2.

Satz 1. *Es sei P_0 ($t=\tau$, $x_i=\xi_i$) ein innerer Punkt von B , der den Bedingungen: $|\tau-t_0| < \eta$, $|\xi_i-x_i^0| < \zeta$, $\eta < l$, $\zeta < k$ genügt. Es bestehen auch die Ungleichungen:*

$$|f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa)| \leq G, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa), \quad (G=\text{Konst.})$$

in B . Darum können wir beweisen, dass es im Intervalle $\tau-\delta \leq t \leq \tau+\delta$, $(\delta \leq l-\eta, \delta \leq \frac{k-\zeta}{G})$, mindestens ein Integralsystem der Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa) \quad (\text{I})$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i(\tau) = \xi_i$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), gibt.

Die Limesfunktionen, $\bar{f}_i$ und $\underline{f}_i$, haben dieselbe Schranken wie f_i . Also:

$$|\bar{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa)| \leq G \quad \text{und} \quad |\underline{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa)| \leq G.$$

Da die Limesfunktionen, $\bar{f}_i$ in B oberhalb stetig, und $\underline{f}_i$ in B unterhalb stetig sind, so gibt es Folgen der im B stetigen Funktionen $\{\phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)\}$, welche monoton abnehmend gegen $\bar{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ konvergieren, und Folgen der im B stetigen Funktionen $\{\psi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)\}$, welche monoton zunehmend gegen $\underline{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ konvergieren⁽³⁾. Wir haben zunächst in B :

$$\phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \bar{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \underline{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \psi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)$$

Wir können dabei ϕ_i^n und ψ_i^n so wählen, dass auch die Unglei-

(³) Vgl. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 401—402.

chungen :

$$\begin{aligned} |\phi_i^n| &\leq G, & |\psi_i^n| &\leq G, \\ \phi_i^n - \psi_i^n &\geq \frac{\varepsilon}{2^n}, & 0 < \varepsilon < G, & (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned}$$

bestehen.

Nun betrachten wir ein System der Folgen stetiger Funktionen $\{x_i^n(t)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), welche im Intervalle $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ den Relationen :

$$\begin{aligned} \phi_i^n(t, x_1^n(t), \dots, x_\kappa^n(t)) &\geq D_{\pm}^n x_i^n(t) \geq \psi_i^n(t, x_1^n(t), \dots, x_\kappa^n(t)), & (6) \\ x_i^n(\tau) &= \xi_i, & (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned}$$

genügen. Man kann die Existenz solcher Funktionen folgendermassen beweisen. Wir setzen :

$$\begin{aligned} F_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) &= \frac{\phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) + \psi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)}{2}, \\ &(i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned}$$

im B . Dann sind F_i^n im B stetig und folgenden Beziehungen genügen :

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) - F_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) &\geq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \\ F_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) - \psi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) &\geq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \\ |F_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)| &\leq G, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

($i=1, 2, \dots, \kappa$),

im B . Weil F_i^n , ϕ_i^n , und ψ_i^n im abgeschlossenen Bereiche B stetig sind, so können wir eine positive Zahl h derart finden, dass für $|t'' - t'| < h$, $|x_i'' - x_i'| < Gh$ stets

$$\left. \begin{aligned} |F_i^n(t'', x_1'', \dots, x_\kappa'') - F_i^n(t', x_1', \dots, x_\kappa')| &< \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \\ |\phi_i^n(t'', x_1'', \dots, x_\kappa'') - \phi_i^n(t', x_1', \dots, x_\kappa')| &< \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \\ |\psi_i^n(t'', x_1'', \dots, x_\kappa'') - \psi_i^n(t', x_1', \dots, x_\kappa')| &< \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

($i=1, 2, \dots, \kappa$),

bestehen, wobei n festgehalten ist. Wir zerlegen das Intervall $\tau \leq t \leq \tau + \delta$ in N Teilintervalle, $\tau_\nu \leq t \leq \tau_{\nu+1}$, ($\tau_0 = \tau$, $\tau_N = \tau + \delta$), deren Längen

sämtlich kleiner als h sind. Dann konstruieren wir die Funktionen $x_i^n(t)$ folgendermassen. Für $\tau \leq t \leq \tau_1$ setzen wir:

$$x_i^n(t) = \xi_i + F_i^n(\tau, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\kappa)(t - \tau),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Im Intervalle $\tau < t < \tau_1$ also stets gelten:

$$|t - \tau| < h, \quad |x_i^n(t) - \xi_i| < Gh,$$

und

$$D_{\pm}^n x_i^n(t) = F_i^n(\tau, \xi_1, \dots, \xi_\kappa).$$

Daraus folgt, wegen (7) und (8), das Bestehen der Ungleichungen (6) für $\tau < t < \tau_1$. Setzen wir dann für $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$:

$$x_i^n(t) = x_i^n(\tau_1) + F_i^n(\tau_1, x_1^n(\tau_1), x_2^n(\tau_1), \dots, x_\kappa^n(\tau_1))(t - \tau_1),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Wir haben also im Intervalle $\tau_1 < t < \tau_2$:

$$D_{\pm}^n x_i^n(t) = F_i^n(\tau_1, x_1^n(\tau_1), x_2^n(\tau_1), \dots, x_\kappa^n(\tau_1)),$$

und folglich im $\tau_1 \leq t < \tau_2$ das Bestehen der Ungleichungen (6). Ähnlicherweise setzen wir allgemein für $\tau_\nu \leq t \leq \tau_{\nu+1}$:

$$x_i^n(t) = x_i^n(\tau_\nu) + F_i^n(\tau_\nu, x_1^n(\tau_\nu), \dots, x_\kappa^n(\tau_\nu))(t - \tau_\nu),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

und daraus ergeben sich die Ungleichungen (6) für $\tau_\nu \leq t < \tau_{\nu+1}$. Ähnlich kann man leicht die Existenz der oben erwähnten Funktionen $x_i(t)$ auf dem ganzen Intervalle $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ beweisen. Die durch $x_i = x_i^n(t)$ dargestellten Kurven laufen für $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ ganz im B . D. h., für $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ sind stets:

$$|x_i^n(t) - x_i^0| \leq k, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

wobei x_i^0 und k von t und n unabhängig sind.

Nach dem Hilfssatz 2 können wir eine Teilfolge der natürlichen Zahlen $\{n_\nu\}$ auswählen, so dass das System der Folgen $\{x_i^{n_\nu}(t)\}$, $(i=1, 2, \dots, \kappa)$, gleichmässig im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ gegen ein System der stetigen Funktionen $x_i(t)$, $(i=1, 2, \dots, \kappa)$, konvergiert. Denn es gilt für alle n und t , $(\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta)$,

$$|x_i^n(t)| \leq |x_i^0| + k$$

und

$$|D_{\pm}^n x_i^n(t)| \leq G, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Weil für irgend zwei natürliche Zahlen, μ und ν , welche der Relation $\mu < \nu$ genügen, (also auch $n_\mu < n_\nu$) wir

$$\phi_i^{n_\mu}(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \phi_i^{n_\nu}(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \psi_i^{n_\nu}(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \psi_i^{n_\mu}(t, x_1, \dots, x_\kappa)$$

im B haben, so können wir nach (6) für $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ schliessen:

$$\phi_i^{n_\mu}(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)) \geq D_\pm^{\pm} x_i^{n_\nu}(t) \geq \psi_i^{n_\mu}(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)).$$

Lässt man ν unendlich wachsen, so folgt nach dem Hilfssatz 3 die Beziehung:

$$\phi_i^{n_\mu}(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_\pm^{\pm} x_i(t) \geq \psi_i^{n_\mu}(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)).$$

Für $\mu \rightarrow \infty$ haben wir schliesslich die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) &\geq D_\pm^{\pm} x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)), \\ (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned}$$

im Intervalle $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$. W. z. b. w.

3.

Satz 2. Es sei ein System der Folgen im B beschränkter Funktionen $\{g_i^n(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), gegeben. Die Funktionen $g_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ sollen im B den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) &\geq g_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \psi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa), \\ (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned} \quad (9)$$

genügen, wobei die Funktionen ϕ_i^n und ψ_i^n im B gleichmässig beschränkt sind, und die ϕ_i^n oberhalb stetig, die ψ_i^n unterhalb stetig sind. Die Folgen $\{\phi_i^n\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), konvergieren monoton abnehmend gegen die Funktionen $\bar{f}_i$ im B , und die Folgen $\{\psi_i^n\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), konvergieren monoton zunehmend gegen die Funktionen $\underline{f}_i$ im B . Also

$$\begin{aligned} G &\geq \phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \bar{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq \underline{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa) \\ &\geq \psi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa) \geq -G, \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_i^n = \bar{f}_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_i^n = \underline{f}_i, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Nun sei eine Folge der Integralsysteme $\{x_i = x_i^n(t)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$, der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa), \quad (10)$$

vorgelegt, wobei die Ungleichungen $|x_i^n(t) - x_i^0| \leq k$ bestehen. $\{n_\nu\}$ sei

eine Teilfolge der natürlichen Zahlen derart, dass die Folgen $\{x_i^{n_\nu}(t)\}$, $(i=1, 2, \dots, \kappa)$, gleichmässig gegen stetigen Funktionen $x_i(t)$, $(i=1, 2, \dots, \kappa)$, konvergieren⁽⁴⁾.

Nun wollen wir beweisen, dass diese Funktionen $x_i(t)$ den Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

genügen.

Aus (9) und (10) erhält man für $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$:

$$\phi_i^{n_\nu}(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)) \geq D_\pm^\pm x_i^{n_\nu}(t) \geq \psi_i^{n_\nu}(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)). \quad (11)$$

Da $\phi_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ im B beschränkt und oberhalb stetig sind, so gibt es Folgen der im B stetigen Funktionen $\Phi_{i,j}^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)$, $(j=1, 2, 3, \dots)$, welche, unter festgehaltenem n , monoton abnehmend gegen ϕ_i^n im B konvergieren. Also für $n_\nu > n$ haben wir:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^n(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)) &\geq \phi_i^n(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)) \\ &\geq \phi_i^{n_\nu}(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)). \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (11) für $n_\nu > n$ im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$:

$$\Phi_{i,j}^n(t, x_1^{n_\nu}(t), \dots, x_\kappa^{n_\nu}(t)) \geq D_\pm^\pm x_i^{n_\nu}(t).$$

Nach dem Hilfssatz 3 bekommen wir dann für $\nu \rightarrow \infty$:

$$\Phi_{i,j}^n(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_\pm^\pm x_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Wächst j unendlich gross, so erhält man:

$$\phi_i^n(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_\pm^\pm x_i(t).$$

Lässt man dann n gegen Unendliche gehen,

$$\bar{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_\pm^\pm x_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Ganz ähnlich können wir auch schliessen, dass

$$D_\pm^\pm x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

W. z. b. w.

Bemerkung zum Satz 2. Obwohl die Monotonie der Konvergenz von ϕ_i^n und ψ_i^n nicht notwendig ist, doch ist sie nicht entbehrlich, wie folgendes Beispiel uns lehrt.

Wir setzen:

(4) Nach dem Hilfssatz 2.

$$g^n(t, x) = e^{-8^n \left(t - x - \frac{1}{2^n}\right)^2}.$$

(Das ist der Fall wo $\kappa=1$ ist). Wir haben hier:

$$|g^n(t, x)| \leq 1 \quad \text{für alle } t \text{ und } x,$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(t, x) = 0 \quad \text{für alle } t \text{ und } x.$$

Wir haben also:

$$f(t, x) = 0 \quad \text{für alle } t \text{ und } x.$$

Das Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} = g^n(t, x) = e^{-8^n \left(t - x - \frac{1}{2^n}\right)^2}$$

mit der Anfangsbedingung $x = -\frac{1}{2^n}$ für $t=0$ ist aber

$$x = x^n(t) = t - \frac{1}{2^n}.$$

Diese Funktionen haben aber als ihre Grenze die Funktion:

$$x = t$$

während die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) = 0$$

nur die Konstanten als ihre Integrale besitzt.

Wir sagen, dass eine abgeschlossene Menge M im B die Eigenschaft $E(a)$ hat, wenn es um jeden Punkt P_0 von M eine Umgebung derart gibt, dass für alle andere Punkte P dieser Umgebung mindestens eine der Ungleichungen:

$$|x_i - x_i^0| > a |t - t_0|, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

besteht, wobei $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_\kappa^0)$ und $(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa)$ die Koordinaten der Punkte P_0 und P bezeichnen.

Satz 3. Der Satz 2 bleibt noch richtig, wenn man die Monotonie der Konvergenz von darauftretenden $\{\phi_i^n\}$ und $\{\psi_i^n\}$ im B durch die folgenden Bedingungen ersetzt.

M sei eine abgeschlossene Menge im B , die die Eigenschaft $E(G)$ besitzt. ϕ_i^n und ψ_i^n , $(i=1, 2, \dots, \kappa)$ sind im B gleichmässig beschränkt.

$$|\phi_i^n| \leq G, \quad |\psi_i^n| \leq G.$$

Und für jede von M fremde abgeschlossene Menge M' wird eine natürliche Zahl N gefunden, so dass für alle $n > N$, $\{\phi_i^n\}$ im M' monoton abnehmend gegen $\bar{f}_i$ konvergieren, und $\{\psi_i^n\}$ im M' monoton zunehmend gegen $\underline{f}_i$ konvergieren.

Liegt ein Punkt P_1 ($t=t_1$, $x_i=x_i(t_1)$) nicht auf M , so kann man eine abgeschlossene Umgebung U um P_1 finden, die ganz von M fremd ist. Dann können wir eine kleine positive Zahl δ' und eine genügend grosse natürliche Zahl N derart bestimmen, dass für $t_1 - \delta' < t < t_1 + \delta'$ und $n > N$ alle Punkte (t , $x_i=x_i^{n\nu}(t)$) in dieser Umgebung U liegen, und in U für $n > N$ $\{\phi_i^n\}$ mit n monoton abnehmen, $\{\psi_i^n\}$ mit n monoton zunehmen. Wir bekommen also nach dem Satz 2 für $t_1 - \delta' < t < t_1 + \delta'$:

$$\bar{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_{\pm}^{\pm} x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Liegt dagegen der Punkt P_1 auf M , so kann man eine positive Zahl δ' so bestimmen, dass im Bereiche $|t-t_1| \leq \delta'$, $|x_i - x_i(t_1)| \leq G\delta'$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), für alle Punkte P' (t' , x_1' , ..., x_κ') von M ausser P_1 mindestens eine der Ungleichungen:

$$|x_i' - x_i(t_1)| > |t' - t_1| G, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

besteht. Andererseits kann man leicht schliessen, dass für alle t die Ungleichungen:

$$|x_i(t) - x_i(t_1)| \leq |t - t_1| G, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa), \quad (12)$$

bestehen. Die durch die Funktionen $x_i=x_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), dargestellte Kurve im B hat also für $|t-t_1| < \delta'$ keinen Punkt ausser P_1 mit M gemeinsam. Es gilt dann nach der vorangehenden Betrachtung für $0 < |t-t_1| < \delta'$:

$$\bar{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_{\pm}^{\pm} x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)), \quad (13)$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

In bezug auf beliebig vorgeschriebene positive Zahl ε kann man eine andere positive Zahl h ($< \delta'$) so klein bestimmen, dass im Bereiche $|t-t_1| \leq h$, $|x_i - x_i(t_1)| \leq Gh$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), die Ungleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa) &< \bar{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) + \varepsilon, \\ \underline{f}_i(t, x_1, \dots, x_\kappa) &> \underline{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) - \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

bestehen. Seien η und ζ positive Zahlen, die den Ungleichungen:

$$h > \eta > \zeta > 0$$

genügen. Aus (12) folgt sogleich:

$$G\zeta \geq x_i(t_1 + \zeta) - x_i(t_1) \geq -G\zeta. \quad (15)$$

Aus (13) und (14) für $t_1 + \zeta \leq t \leq t_1 + \eta$

$$\bar{f}_i(t, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) + \varepsilon \geq D_{\pm}^{\pm} x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) - \varepsilon.$$

Also nach dem Hilfssatz 1

$$(\eta - \zeta)(\bar{f}_i(1) + \varepsilon) \geq x_i(t_1 + \eta) - x_i(t_1 + \zeta) \geq (\eta - \zeta)(\underline{f}_i(1) - \varepsilon). \quad (16)$$

Unter $\bar{f}_i(1)$ und $\underline{f}_i(1)$ verstehen wir $\bar{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1))$ bzw. $\underline{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1))$. Aus (15) und (16) ergeben sich:

$$\frac{(\eta - \zeta)(\bar{f}_i(1) + \varepsilon) + G\zeta}{\eta} \geq \frac{x_i(t_1 + \eta) - x_i(t_1)}{\eta} \geq \frac{(\eta - \zeta)(\underline{f}_i(1) - \varepsilon) - G\zeta}{\eta},$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Konvergiert ζ gegen Null,

$$\bar{f}_i(1) + \varepsilon \geq \frac{x_i(t_1 + \eta) - x_i(t_1)}{\eta} \geq \underline{f}_i(1) - \varepsilon.$$

Dann lassen wir η mit ε nach Null streben, so erhalten wir:

$$\bar{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) \geq D_+^+ x_i(t_1) \geq \underline{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Ganz ähnlich erhält man:

$$\bar{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)) \geq D_-^- x_i(t_1) \geq \underline{f}_i(t_1, x_1(t_1), \dots, x_\kappa(t_1)),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Daraus können wir schliessen im Intervalle $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$:

$$\bar{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)) \geq D_{\pm}^{\pm} x_i(t) \geq \underline{f}_i(t, x_1(t), \dots, x_\kappa(t)),$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa).$$

W. z. b. w.

Satz 4. Sei $x_i = x_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), das einzige Integralsystem der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa), \quad (\text{I})$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i(t_0) = x_i^0$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), $(\tau - \delta < t_0 < \tau + \delta)$, (es gibt also kein anderes Integralsystem mit den obigen Anfangsbeding-

ungen). Und sei $x_i^n(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), ein Integralsystem der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i^n(t, x_1, x_2, \dots, x_\kappa), \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i^n(t_0^n) = x_i^0$, wobei g_i^n den Voraussetzungen des Satzes 3 genügen, und

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t_0^n &= t_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n &= x_i^0, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

sind. Dann konvergieren die Folgen $\{x_i^n(t)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), im Intervalle $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ gleichmässig gegen $x_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$).

Angenommen in der Tat, konvergiere nicht gleichmässig im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ eine Folge $\{x_j^n(t)\}$, oder bloss divergiere eine Folge $\{x_j^n(t)\}$ für irgend einen Wert t_1 im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$, wobei j festgehalten ist, so gäbe es zwei Teilfolgen der natürlichen Zahlen, $\{n_\nu'\}$ und $\{n_\nu''\}$, derart, dass im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ die Folgen $\{x_i^{n_\nu'}(t)\}$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), gleichmässig gegen $\bar{x}_i(t)$, und die Folgen $\{x_i^{n_\nu''}(t)\}$ gleichmässig gegen $\bar{\bar{x}}_i(t)$ konvergieren, wobei $\bar{x}_j(t)$ und $\bar{\bar{x}}_j(t)$ im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ nicht identisch sind. Aus dem Satz 3 können wir aber schliessen, dass die beiden Funktionensysteme, $\bar{x}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), und $\bar{\bar{x}}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), im $\tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta$ Integralsysteme der Differentialgleichungen (I) sind. Auch nach (17) genügen die beiden Funktionensysteme $\bar{x}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), und $\bar{\bar{x}}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), den Anfangsbedingungen $x_i(t_0) = x_i^0$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$). Es gibt also zwei verschiedene Integralsysteme der Differentialgleichungen mit denselben Anfangsbedingungen $x_i(t_0) = x_i^0$, gegen unsere Annahme.

4.

Unter einem Verästelungspunkte P von (I) verstehen wir einen solchen, durch den mindestens zwei Integralkurven $\bar{x}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), und $\bar{\bar{x}}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), von (I) gehen, welche in beliebig kleiner Umgebung von P nicht identisch sind. Gibt es irgend einen Punkt $P_a(t_a, x_i^a)$, durch den mindestens zwei verschiedene Integralkurven $\bar{x}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), und $\bar{\bar{x}}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), gehen, so gibt es einen Wert t_1 von t , für den die Ungleichung $\bar{x}_j(t_1) \neq \bar{\bar{x}}_j(t_1)$ besteht, wobei j eine bestimmte

Zahl von $i (=1, 2, \dots, \kappa)$ bezeichnet. Da für alle $i (=1, 2, \dots, \kappa)$ $\bar{x}_i(t_a) = \bar{\bar{x}}_i(t_a)$ sind, so gibt es einen t_1 am nächsten liegenden Wert t_2 von t , für den die Gleichungen $\bar{x}_i(t_2) = \bar{\bar{x}}_i(t_2)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), bestehen. Dann ist der Punkt $(t=t_2, x_i=\bar{x}_i(t_2))$ ein Verästelungspunkt.

Satz 5. *Es gebe für jeden Punkt $(t=t_1, x_i=x_i^1)$ von B eine kegelförmige Umgebung $0 < |t-t_1| \leq \varepsilon$, $|x_i-x_i^1| \leq G|t-t_1|$ derart, dass für im Durchschnitt dieser Umgebung mit B liegende Punkte $(t, x_1', \dots, x_\kappa')$ und $(t, x_1'', \dots, x_\kappa'')$ die Funktionen f_i stets den 4κ Ungleichungen:*

$$\left| \bar{f}_i(t, x_1'', \dots, x_\kappa'') - \bar{f}_i(t, x_1', \dots, x_\kappa') \right| \leq \sum_{v=1}^{\kappa} a_v^i \frac{|x_v'' - x_v'|}{|t-t_1|} \quad (18)$$

genügen, wobei jede $\bar{f}_i$ entweder $\bar{f}_i$ oder $\underline{f}_i$ bezeichnet, und a_v^i von $(t, t_1, x_1', \dots, x_\kappa', x_1'', \dots, x_\kappa'')$ abhängige nicht negative Werte bedeuten, die die Bedingung:

$$\sum_{v=1}^{\kappa} a_v^i \leq a < 1, \quad (a = \text{Konst.}), \quad (19)$$

erfüllen. Dann ist das Integralsystem von (I) mit den Anfangsbedingungen $x_i = \xi_i$ für $t = \tau$ in B eindeutig bestimmt⁽⁵⁾.

Man braucht nur zu beweisen, dass es keinen Verästelungspunkt in B gibt.

Wäre $(t=t_1, x_i=x_i^1)$ ein Verästelungspunkt in B , so gehen durch $(t=t_1, x_i=x_i^1)$ mindestens zwei verschiedene Integralkurven $x_i=x_i'(t)$ und $x_i=x_i''(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), die beide für $0 < |t-t_1| \leq \varepsilon$ ganz in der Umgebung $0 < |t-t_1| \leq \varepsilon$, $|x_i-x_i^1| \leq G|t-t_1|$ liegen und darin mit einander nicht identisch sind. Man bezeichne mit α den grössten Wert unter 16κ oberen Grenzen von $|D_{\pm}^{\pm} x_i''(t) - D_{\pm}^{\pm} x_i'(t)|$ im $|t-t_1| \leq \varepsilon$. α kann weder Null noch Unendlich sein. Denn α wäre Null, so würden $x_i'(t)$ und $x_i''(t)$ im $|t-t_1| \leq \varepsilon$ mit einander identisch. Daraus erhält man:

$$D_{\pm}^{\pm} |x_i''(t) - x_i'(t)| \leq \alpha, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

oder

$$|x_i''(t) - x_i'(t)| \leq \alpha |t-t_1|$$

im $|t-t_1| \leq \varepsilon$. Dies mit (19) ergibt:

(⁵) Vgl. Max Müller: Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen usw., Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften Math.-nat. Klasse, 1927, 9. Abhandlung § 9.

$$\sum_{\nu=1}^{\kappa} a_{\nu} \frac{|x_{\nu}''(t) - x_{\nu}'(t)|}{|t - t_1|} \leq a\alpha < \alpha, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Andererseits aber, mindestens für einen Wert von i , hat $|\bar{f}_i(t, x_1'', \dots, x_{\kappa}'') - \bar{f}_i(t, x_1', \dots, x_{\kappa}')|$ die obere Grenze nicht kleiner als α im $|t - t_1| \leq \varepsilon$, wobei $\bar{f}_i$ geeignet gewählte Funktionen unter $\bar{f}_i$ und $\underline{f}_i$ sein sollen. Dies aber nun im Widerspruch steht mit der Tatsache, dass die obere Grenze des rechten Gliedes von (18) kleiner als α ist. Es gibt also keinen Verästelungspunkt im B , w. z. b. w.

5.

Satz 6. Die Menge M aller Punkte der Integralkurven von (I) durch einen Punkt P_0 ($t=t_0$, $x_i=x_i^0$), welche dem Argumentwerte $t=t_1$, ($|t_1 - t_0| < \frac{k}{G}$), entsprechen, bildet ein Kontinuum.

Zunächst betrachten wir die Gesamtheit $\mathfrak{R}_n$ aller Systeme der stetigen Funktionen $\bar{x}_i(t)$, die den Bedingungen:

$$\psi_i^n(t, \bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{\kappa}(t)) \leq D_{\pm} \bar{x}_i(t) \leq \phi_i^n(t, \bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_{\kappa}(t)), \quad (6')$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

$$\bar{x}_i(t_0) = x_i^0, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

im B genügen, wobei die Funktionen ψ_i^n und ϕ_i^n dieselbe Bedeutungen wie im Satz 1 haben. Dann ist die Menge M_n aller Punkte ($t=t_1$, $x_i=\bar{x}_i(t_1)$), wobei t_1 festgehalten ist, ein Kontinuum. Wir können leicht sehen, dass M_n abgeschlossen ist. Wäre M_n nicht zusammenhängend, so würde M_n in zwei von einander fremde abgeschlossene Mengen M' und M'' zerlegt. Die Gesamtheiten der Kurven $x_i=\bar{x}_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, \kappa$), von $\mathfrak{R}_n$, die durch P_0 gehen und in M' bzw. M'' münden, bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}'$ bzw. $\mathfrak{R}''$, und ihre Durchschnitte mit der Menge aller Punkte von $t=\tau$ (=Konst.) im B mit M'_{τ} bzw. M''_{τ} . M'_{τ} und M''_{τ} sind auch abgeschlossen. Dann können wir einen Wert $t=t_2$ finden, so dass für alle τ zwischen t_1 und t_2 die abgeschlossene Mengen M'_{τ} und M''_{τ}

von einander fremd sind. Der Bequemlichkeit halber setzen wir voraus, dass $t_0 < t_1$, also auch $t_0 \leq t_2 < t_1$. Die untere Grenze von solchem t_2 sei t_a . Dann haben M_{t_a}' und M_{t_a}'' mindestens einen Punkt P_a ($t=t_a$, $x_i=x_i^a$) gemein. Es gilt $t_0 \leq t_a < t_1$. Hieraus folgt, dass durch P_a mindestens zwei Kurven K' , $(x_i'(t))$, und K'' , $(x_i''(t))$, gehen, von denen die erste zu $\mathfrak{K}'$ die zweite zu $\mathfrak{K}''$ gehört. Da für die Kurven K' und K'' die Bedingungen (6') gelten, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} |x_i'(t_a + \delta) - x_i^a| &\leq G\delta, \\ |x_i''(t_a + \delta) - x_i^a| &\leq G\delta, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$(0 < \delta < t_1 - t_a).$$

Nun betrachten wir eine Integralkurve $\tilde{K}$, $x_i = \tilde{x}_i(t)$, des Differentialgleichungssystems:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa), \quad (21)$$

$$(i=1, 2, \dots, \kappa),$$

mit den Anfangsbedingungen $\tilde{x}_i(t_a) = x_i^a$, wobei $F_i^n(t, x_1, \dots, x_\kappa)$ dieselbe Bedeutung wie im Satz 1 haben. Wir verbinden den Punkt $(t=t_a + \delta, x_i = x_i'(t_a + \delta))$ auf K' mit den Punkt P_1 ($t=t_1, x_i = \tilde{x}_i(t_1)$) auf $\tilde{K}$ durch die Kurve K^* :

$$x_i^*(t) = \tilde{x}_i(t) + (x_i'(t_a + \delta) - \tilde{x}_i(t_a + \delta)) \frac{t_1 - t}{t_1 - t_a - \delta}, \quad t_a + \delta \leq t \leq t_1.$$

Es gilt hierbei:

$$|\tilde{x}_i(t_a + \delta) - x_i^a| \leq G\delta, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa).$$

Also nach (20) haben wir

$$|\tilde{x}_i(t_a + \delta) - x_i'(t_a + \delta)| \leq 2G\delta. \quad (22)$$

Aus

$$D_{\pm}^{\pm} x_i^*(t) = \frac{d\tilde{x}_i}{dt} - \frac{x_i'(t_a + \delta) - \tilde{x}_i(t_a + \delta)}{t_1 - t_a - \delta}, \quad (i=1, 2, \dots, \kappa),$$

kann man leicht sehen, dass wegen (7) des Satzes 1, (21) und (22), für genügend kleines δ die Funktionen $x_i^*(t)$ den Bedingungen (6') genügen. Wir haben also eine zu $\mathfrak{K}_n$ gehörige Kurve $\tilde{K}$, die aus einem Stück der

Kurve K' für $t_0 \leq t \leq t_a + \delta$ und einem Stück der Kurve K^* für $t_a + \delta \leq t \leq t_1$ besteht. Die Kurve $\bar{K}$ soll dann zu $\mathfrak{R}'$ gehören, denn sonst gehört $\bar{K}$ zu $\mathfrak{R}''$, so haben $M_{t_a+\delta}'$ und $M_{t_a+\delta}''$, gegen unsere Annahme, den gemeinsamen Punkt von K' und $\bar{K}$ gemein. $\bar{K}$ hat auch mit $\hat{K}$ den Punkt P_1 , $(t_1, \tilde{x}_1(t_1))$, gemein. Ganz ähnlich können wir zu $\mathfrak{R}''$ gehörige Kurve $\bar{K}$ finden, welche mit $\hat{K}$ den Punkt P_1 gemeinsam hat. Hieraus folgt, dass P_1 gleichzeitig zu M' und M'' gehört, was aber unserer Voraussetzung widerspricht. M_n soll also zusammenhängend sein. Aus den Voraussetzungen ist es leicht zu sehen, dass alle M_n die M in sich enthalten. Aus jeder Menge M_n wählen wir einen Punkt P_n aus, und betrachten eine durch P_0 und gleichzeitig durch P_n gehende Kurve K_n , $x_i = x_i^n(t)$, die den Bedingungen (6') genügt. Dann gibt es eine Teilfolge der natürlichen Zahlen $\{n_\nu\}$ derart, dass K_{n_ν} gegen eine Integralkurve von (I) konvergiert. P_{n_ν} konvergiert dann gegen einen Punkt in M . So ist M die Näherungsgrenze der Folge der zusammenhängenden Mengen M_n , die alle gleichmässig beschränkt sind. Daraus können wir schliessen, dass M ein Kontinuum ist⁽⁵⁾.

Den 10. Juli, 1927.

Mathematisches Institut,

K. Universität zu Tôkyô.

(⁵) Vgl. Hahn: Theorie der reellen Funktionen, S. 87, Satz XVII.