12. Ueber affine Bertrand'sche Kurven.

Von Shinji OGIWARA, Sendai.

(Gelesen am 3. April 1927 in der Sitzung der Japan. phys.-math. Gesellschaft.)

Mehrere besondere Raumkurven in der affinen Differentialgeometrie sind untersucht worden, doch scheint es mir, dass das affine Gegenstück zu den Bertrand'schen sowie den Mannheim'schen Kurven unerörtet geblieben ist. In den folgenden Zeilen möchte ich einige Eigenschaften des affinen Gegenstückes der Bertrand'schen Kurven untersuchen.

Es liegt nahe, das affine Gegenstück der Bertrand'schen Kurven dadurch zu definieren, dass sie affine Hauptnormalen gemein haben. Wir nennen $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(s)$ und $\bar{\mathfrak{x}}=\bar{\mathfrak{x}}(\bar{s})$, wo die Parameter ihre Affinlänge sind, ein Paar der konjugierten affinen Bertrand'schen Kurven, wenn

$$(1) \quad \bar{\mathfrak{x}}(\bar{s}) = \mathfrak{x} + \rho \mathfrak{x}'' \quad \bar{\mathfrak{x}}'' = \alpha \mathfrak{x}''$$

sind.

1. Aus (1), erhalten wir durch Differentiation,

$$(2) \quad \bar{\mathfrak{x}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \mathfrak{x}' + \rho' \mathfrak{x}'' + \rho \mathfrak{x}'''$$

$$(3) \quad \bar{\mathfrak{x}}'' \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 + \bar{\mathfrak{x}}' \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} = -\rho t \mathfrak{x}' + (1 + \rho'' - \rho k) \mathfrak{x}'' + 2\rho' \mathfrak{x}'''$$

$$(4) \quad \bar{\mathfrak{x}}''' \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^3 + 3\bar{\mathfrak{x}}' \frac{d\bar{s}}{ds} \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} + \bar{\mathfrak{x}}' \frac{d^3\bar{s}}{ds^3} = (-3\rho' t - \rho t') \mathfrak{x}' \\ + (-\rho t + \rho''' - \rho k' - 3\rho' k) \mathfrak{x}'' + (1 + 3\rho'' - \rho k) \mathfrak{x}''' ,$$

$$(5) \quad \bar{\mathfrak{x}}''' \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right) = \alpha' \mathfrak{x}'' + \alpha \mathfrak{x}''' .$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$0 \equiv \left(\bar{\mathfrak{x}} \frac{d\bar{s}}{ds}, \bar{\mathfrak{x}}'', \bar{\mathfrak{x}}' \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 + \bar{\mathfrak{x}}' \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} \right) = \alpha (2\rho' + \rho^2 t) .$$

wo α sicher von Null verschieden ist; somit haben wir

$$(6) \quad \boxed{t = -\frac{2\rho'}{\rho^2}}$$

oder (7) $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \int^s t ds + a$, wobei a eine gewisse Konstante bedeutet.

Aus (2), (5) und (1) erhält man

$$\left(\bar{x} \frac{d\bar{s}}{ds}, \bar{x}'', \bar{x}''' \frac{d\bar{s}}{ds}\right) = \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = \alpha^2,$$

d. h. (8)

$$\boxed{\frac{d\bar{s}}{ds} = \pm \alpha.}$$

Andererseits erhält man aus (3), (5) und (1)

$$\left(\bar{x}'' \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 + \bar{x}' \frac{d^2\bar{s}}{ds^2}, \bar{x}'', \bar{x}''' \frac{d\bar{s}}{ds}\right) = \frac{d\bar{s}}{ds} \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} = -\rho t \alpha^2,$$

dann

$$\frac{d^2\bar{s}}{ds^2} \bigg/ \frac{d\bar{s}}{ds} = -\rho t = \frac{2\rho'}{\rho}.$$

Daraus bekommen wir durch Integration,

(9)

$$\boxed{\frac{d\bar{s}}{ds} = b\rho^2}$$

wobei b eine Konstante bedeutet.

2. Durch die gefundenen Formeln kann man folgende Sätze beweisen.

Satz 1°. x''' , $\bar{x}''$ liegen auf derselben Ebene mit den Vektoren x'' , $\bar{x}'$.

Dies folgt sofort aus (5). Setzen wir nun

$$\eta = x + \beta x''' = \bar{x} + \bar{\beta} \bar{x}''',$$

so erhalten wir wegen (5), $\frac{1}{\beta} \frac{d\bar{s}}{ds} = -\frac{\alpha'}{\rho} = \frac{\alpha}{\bar{\beta}}$, und daher

$$(10) \quad \beta = \frac{1}{t} = \pm \bar{\beta} = \pm \frac{1}{\bar{t}} \quad \boxed{t = \pm \bar{t}},$$

jenachdem $\frac{d\bar{s}}{ds} = \pm \alpha$. Daraus ergibt sich der Satz:

Satz 2°. Die affinen zweiten Krümmungen konjugierter affiner Bertrand'scher Kurven sind abgesehen von dem Vorzeichen miteinander gleich.

Ist nun

$$\begin{aligned} x + \rho x'' &= \bar{x} & \rho x'' + \bar{\rho} \bar{x}'' &= 0, \\ \bar{x} + \bar{\rho} \bar{x}'' &= x, \end{aligned}$$

bekommen wir, unter Berücksichtigung auf die Relationen (8) und (9), dass

$$b\rho^2 = \pm \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad \text{oder} \quad (11) \quad \boxed{\rho\bar{\rho} = \pm \frac{1}{b}} \quad \text{ist.}$$

Satz 3°. Sind $\rho, \bar{\rho}$ die zwei Längenmasse der gemeinsamen Hauptnormalen mit den Einheiten $|\mathfrak{x}''|, |\bar{\mathfrak{x}}''|$ so ist ihr Produkt konstant.

Dieser Satz ist völlig analog zu dem bekannten Satz der gewöhnlichen Bertrand'schen Kurven. b soll die zuordnete Konstante konjugierter affiner Bertrand'scher Kurven heißen.

Konstruieren wir jetzt das Tetraeder mit den Endpunkten von drei Vektoren $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x} + \mathfrak{x}', \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{x}}'$, dann bekommen wir den

Satz 4°. Solch Tetraeder hat notwendig einen von Null verschiedenen konstanten Inhalt b .

Dieser Satz ist zu der Eigenschaft der gewöhnlichen Bertrand'schen Kurven analog, dass der Winkel zwischen den Tangenten entsprechender Punkte der Kurven notwendigerweise eine von Null verschiedene Konstante sein soll.

Wir bemerken, dass wenn bei einer Raumkurve das mit $\mathfrak{x} + \frac{d\bar{\mathfrak{x}}}{ds}$, $\mathfrak{x} + \frac{d\mathfrak{x}}{ds}$ und $\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}$ konstruierte Tetraeder einen von Null verschiedenen konstanten Inhalt hat, wo

$$\bar{\mathfrak{x}}(\bar{s}) = \mathfrak{x} + \rho \mathfrak{x}'', \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \int^s t ds + C,$$

so muss sie notwendigerweise eine affine Bertrand'sche Kurve sein, welche $\bar{\mathfrak{x}}(\bar{s})$ als konjugierte besitzt.

3. Es bleibt noch übrig, die natürliche Gleichung der Kurve zu untersuchen. Aus (1), (2) und (4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\bar{\mathfrak{x}}' \frac{d\bar{s}}{ds}, \bar{\mathfrak{x}}'', \bar{\mathfrak{x}}''' \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^3 + 3\bar{\mathfrak{x}}'' \frac{d\bar{s}}{ds} \frac{d^2\bar{s}}{ds^2} + \bar{\mathfrak{x}}' \frac{d^3\bar{s}}{ds^3} \right) \\ = \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^4 = \alpha(1 + 3\rho'' - \rho\kappa) + \alpha(3\rho't + \rho t)\rho, \end{aligned}$$

und daher

$$\pm \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^3 = 1 + 3\rho'' - \rho k + (3\rho't + \rho t')\rho = 1 - \frac{1}{2}\rho^2 t' - \rho k.$$

Es soll, wegen (9) als notwendige Bedingung gelten:

$$(14) \quad \boxed{\pm b^3 \rho^6 = 1 - \rho k - \frac{1}{2} \rho^2 t'} \quad , \quad \rho = \frac{1}{\frac{1}{2} \int^s t ds + a}.$$

Wir werden zeigen, dass die Gleichung (14) auch hinreichend ist. Wenn $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(s)$ solche Kurve ist, welche die Gleichung (14) befriedigt, so ziehen wir eine andere Kurve $\bar{\mathfrak{r}}=\bar{\mathfrak{r}}(\bar{s})$ in Betracht derart, dass

$$(1) \quad \bar{\mathfrak{r}}(\bar{s}) = \mathfrak{r} + \rho \mathfrak{r}'',$$

wobei $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \int^s t ds + C$, d. h. (6) $\rho^2 t = -2\rho'$.

Wieder aus (2), (3) und (4), erhalten wir durch Multiplikation:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^6 &= (1 + \rho'' - \rho k)(1 + 3\rho'' - \rho k + \rho(3\rho' t + \rho t')) \\ &\quad + (2\rho' + \rho^2 t)(\rho''' - \rho k' - 3\rho' k - \rho t) \\ &\quad + \rho\rho' t(1 + 3\rho'' - \rho k) + 2\rho'^2(-3\rho' t - \rho t'). \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir auf (6) und (14), so folgt

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^6 = (\pm b^3 \rho^6)^2.$$

Durch logarithmische Differentiation erhalten wir wieder

$$(16) \quad \frac{d^2 \bar{s}}{ds^2} \bigg/ \frac{d\bar{s}}{ds} = 2 \frac{\rho'}{\rho}.$$

Nun sieht man, dass auch wegen (2) und (3) die Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{r}}'' \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= \left(-\rho t - \frac{d^2 \bar{s}}{ds^2} \bigg/ \frac{d\bar{s}}{ds}\right) \mathfrak{r}' + \left(1 + \rho'' - \rho k - \rho' \frac{d^2 \bar{s}}{ds^2} \bigg/ \frac{d\bar{s}}{ds}\right) \mathfrak{r} \\ &\quad + \left(2\rho' - \rho \frac{d^2 \bar{s}}{ds^2} \bigg/ \frac{d\bar{s}}{ds}\right) \mathfrak{r}''' \equiv A\mathfrak{r}' + B\mathfrak{r}'' + C\mathfrak{r}''' \end{aligned}$$

richtig ist, und folglich erhält man aus (16) und (6),

$$A \equiv 0, \quad C \equiv 0,$$

so dass sicherlich: (1) $\bar{\mathfrak{r}}'' = \alpha \mathfrak{r}''$.

4. Obwohl diese Kurvenklasse mehrere weitere Eigenschaften haben mag, doch möchte ich hier nur den folgenden Satz beweisen.

Satz. Sind $\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ die konjugierten affinen Bertrand'schen Kurven und $\mathfrak{x}_0$, $\bar{\mathfrak{x}}_0$ die gemeinsamen Affinnormalen besitzenden Ebenenkurven, welche aus $\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ durch parallele Projektion nach geeigneter Richtung erhalten werden, so gilt $\bar{k}k = \pm 4b$, wobei b die zugeordnete Konstante der konjugierten affinen Bertrand'schen Kurven ist. Umgekehrt, wenn ein Paar

konjugierter affiner Bertrand'scher Kurven den Relationen genügt, dann gibt es entweder ein Paar der die Affinnormalen gemein habenden Ebenenkurven welche durch Projektion nach x_3 -Richtung erhalten werden oder die Relation $k=2b^3\rho^5$.

Nehmen wir diese Richtung zur x_3 -Richtung, so können wir die Kurve und ihre Projektion auf der (x_1, x_2) Ebene, mit demselben x_1, x_2 , durch $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(x_1, x_2, x_3)$, bez. $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{x}_0(x_1, x_2)$, darstellen, wo der Parameter die Affinlänge der Kurve ist. Die affine Normale der Ebenekurve wird

$$\mathfrak{n}=\frac{\mathfrak{x}_0'''}{\varphi^2}-\frac{\phi'}{\varphi^3}\mathfrak{x}', \quad \text{wo} \quad \varphi^3=(\mathfrak{x}'_0, \mathfrak{x}''_0).$$

Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\frac{\mathfrak{x}_0'''}{\varphi^2}-\frac{\phi'}{\varphi^3}\mathfrak{x}'_0=\lambda\mathfrak{x}_0''',$$

und daraus folgt $\varphi'=0$, d. h. (17) $(\mathfrak{x}'_0, \mathfrak{x}_0'')=\text{Konst.}$

Die Affinlänge der Kurve $\mathfrak{x}_0$ ist zur Affinlänge der Kurve $\mathfrak{x}$ proportional. Solche Kurve $\mathfrak{x}$ wurde von Salkowski untersucht und ist dadurch gekennzeichnet, dass $k'-t=0$.⁽¹⁾ Dann erhalten wir durch Integration,

$$(18) \quad k=\int^s t ds + C = \frac{2}{\rho} + C'.$$

Jetzt wollen wir die Konstante C' bestimmen. Wir wollen das kovariante Krümmungsbild $\mathfrak{a}_0$, welches dabei ein Punkt ist⁽²⁾, als $(0, 0, 1)$ wählen, so dass $(\mathfrak{x}'_0, \mathfrak{x}''_0)=1$. Daraus ergibt sich, dass die Affinlänge der Ebenenkurve $\mathfrak{x}_0$ zu der Affinlänge der Kurve $\mathfrak{x}$ gleich sind.

Aus (2), ist

$$\bar{x}_3' \frac{d\bar{s}}{ds} = x_3' + \rho' x_3'' + \rho x_3'''$$

oder

$$(19) \quad (\bar{x}_0 \bar{x}_0') \frac{d\bar{s}}{ds} = (x_0 x_0') + \rho' (x_0 x_0'') + \rho (1 - k(x_0 x_0')).$$

Andererseits, für dasselbe ρ , haben wir

$$\bar{x}_0 = x_0 + \rho x_0'',$$

⁽¹⁾ W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, S. 83, § 33.

E. Salkowski: Leipziger Berichte 70 (1918) 160.

⁽²⁾ Dieselbe wie oben.

wo $\bar{x}_0''$ sich selbst die Affinnormalenvektor der Ebenenkurve $\bar{x}_0$ ist. Daraus folgt:

$$(20) \quad (\bar{x}_0 \bar{x}_0') \frac{d\bar{s}}{ds} = (1 - \rho k)(x_0 x_0') + \rho'(x_0 x_0'') + \rho(\rho k - 1),$$

wo k die erste Affinkrümmung der Kurve x und zwar die Affinkrümmung der Ebenenkurve x_0 ist, denn wir haben nach Auswahl des kovarianten Krümmungsbildes $\bar{x}_0 = x_0(0, 0, 1)$

$$(21) \quad x_0''' + kx_0' = 0.$$

Vergleichen wir (19) und (20), so erhalten wir

$$(22) \quad \rho k - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad C' = 0.$$

Aus (2) und (1), wegen (21) und (8), folgt

$$(\bar{x}_0 \bar{x}_0'') = \pm(\rho k - 1) = \pm 1,$$

und daraus erkennt man, dass $\pm s$ auch die Affinlänge der Kurve $\bar{x}_0$ ist, so dass wieder

$$(23) \quad \bar{\rho} \bar{k} - 2 = 0. \quad (3)$$

Es besteht auch: Ein konjugiertes Paar affiner Bertrand'scher Kurven die die Salkowski'sche Gewindekurven sind, welche einen Punkt als das gemeinsame kovariante Krümmungsbild, oder die beiden zur gewählten Koordinatenebene symmetrischen Punkte, besitzen. Umgekehrt, erfüllen die affinen Bertrand'schen Kurven x , $\bar{x}$, die die von Null verschiedenen ersten Affinkrümmungen haben, die Gleichung

$$x''' + kx' = \bar{x}''' + \bar{k}\bar{x}',$$

so müssen die Salkowski'sche Gewindekurven sein.⁽⁴⁾

Nun folgt aus (22) und (23) sicherlich unsere Behauptung:

$$(25) \quad k \bar{k} = \pm 4b.$$

Es sein nun x und $\bar{x}$ ein Paar konjugierter affiner Bertrand'scher Kurven, die (25) erfüllen. Dann haben wir etwa:

$$(14)^* \quad -\left(\frac{ds}{ds}\right)^3 = 1 - \rho k - \frac{1}{2}\rho^2 t', \quad -\left(\frac{d\bar{s}}{d\bar{s}}\right)^3 = 1 - \bar{\rho} \bar{k} - \frac{1}{2}\bar{\rho}^2 \bar{t}',$$

(3) Dies erhält man sofort aus der Relation $\frac{1}{\rho k} + \frac{1}{\bar{\rho} \bar{k}} = 1$ für Ebenenkurve, welche nur die gemeinsamen Affinnormalen haben.

(4) Dies erhält man durch Multiplikation der Gleichungen (2), (1) und (24).

wenn

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = -\alpha = \frac{\rho}{\bar{\rho}},$$

und daher

$$\rho k = 1 - \frac{1}{2}\rho^2 t' + b^3 \rho^6, \quad \bar{\rho} \bar{k} = 1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}^2 \bar{t}' + b^3 \bar{\rho}^6.$$

Multiplizieren wir die beiden Gleichungen, so erhält man, wegen (25), (11), und unter Berücksichtigung auf (12),

$$4 = \frac{1}{b^3 \rho^6} \left((1 + b^3 \rho^6)^2 - \frac{1}{4} \rho^4 t'^2 \right),$$

somit haben wir

$$(27) \quad \frac{1}{2}\rho^2 t' = 1 - b^3 \rho^6, \quad \frac{1}{2}\rho^2 t' = -1 + b^3 \rho^6.$$

Die vorhergehenden Relationen sind nämlich, wegen (12), $\rho k = 2$, d. h., $k' - t = 0$, während die letzte die Relation $k = 2b^3 \rho^5$ ergibt.

Damit ist unser Satz völlig bewiesen.

Januar, 1927.