22. Geodätische Netze.

Von Sôji NAKAJIMA.

(Eingegangen am 15. Mai, 1928.)

Die folgende Note schliesst sich an die Arbeiten über geodätische Abbildungen von Flächen an. Jene Arbeiten hatten zum Ziel, diejenigen Flächen zu bestimmen, die sich so in die Ebene punktweise abbilden lassen, dass ihre geodätischen Linien in eine zwei-parametrische Schar von Geraden⁽¹⁾, von Kreisen⁽²⁾, von Vertikal-Parabeln⁽³⁾ und allgemein von Kegelschnitten⁽⁴⁾ übergehen.

Jedoch für den letzten Fall wurde das Problem nicht gelöst.

Im Folgenden wird ein allgemeines geodätisches Netz in der Umgebung eines Punktes betrachtet; es werden einige invariante Eigenschaften bestimmt, die die Schwierigkeiten der obigen Probleme veranschaulichen, ja geradezu eine Abschätzung der Schwierigkeit geben.

I.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien einer Fläche F mit dem Linienelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

hat stets die Form:

$$(1) \quad v'' = Av'^3 + Bv'^2 + Cv' + D,$$

wo A, B, C, D Funktionen der Parameter u, v sind. Diese Form bleibt erhalten, was man auch für Parametertransformationen

$$\bar{u} = \psi(u, v), \quad \bar{v} = \chi(u, v)$$

vornimmt, wenn nur ψ und χ voneinander unabhängige, genügend oft differenzierbare Funktionen von u, v sind.

Die einfachsten invarianten Eigenschaften eines geodätischen Netzes

⁽¹⁾ Beltrami, Opere matematiche 1902 t. I 263-280.

⁽²⁾ Haack, Math. Zeitschr. 27. (1927), 134-137.

⁽³⁾ Kasner, Amer. Trans. 6 (1905), 141-158.

⁽⁴⁾ J. Drach, Comptes Rendus, 148, p. 150.

wird man daher finden, wenn man die zweiparametrische Kurvenschar einer Differentialgleichung der Form (1) untersucht. Die allgemeinste punktweise Abbildung der Fläche F in die xy -Ebene kann jetzt durch $x=u$, $y=v$ bewerkstelligt werden, da ja u , v irgendwelche Parameter der Fläche sein können. Im besonderen ist aber die Abbildung konform, wenn u , v auf der Fläche F isometrische Parameter sind, dann wird in (1) $A=C$ und $B=D$, und erhält ein spezielles geodätisches Netz⁽⁵⁾.

Im Folgenden werden die Netze in der Ebene untersucht, der Fall der konformen Abbildung wird stets mit angeführt werden.

II.

Es mögen die ∞^1 Kurven der Gleichung (1), die durch einen beliebigen Punkt x_0, y_0 hindurchgehen, in der Umgebung dieses Punktes betrachtet werden. Nach jeder Richtung geht eine Kurve, denn man kann die Tangentenrichtung im Punkt x_0, y_0 beliebig durch $y'=v'$ vorgeben und stets nach (1) die zugehörige Netzkurve bestimmen.

In der Umgebung I Ordnung eines Punktes x_0, y_0 besitzt also das Netz(1) keine Invariante, wohl aber in der Umgebung II Ordnung; denn durch (1) ist zu jeder Tangentenrichtung y' durch den Punkt x_0, y_0 der Krümmungskreis der zugehörigen Kurve bestimmt.

Lässt man jetzt y' alle Werte durchlaufen, so beschreiben die Krümmungsmittelpunkte der zugehörigen Netzkurve eine Kurve.

Diese ist eine algebraische Kurve III Grades, die im Punkt x_0, y_0 einen Doppelpunkt besitzt.

Zum Nachweise dieses Satzes sei folgendes angeführt: Der Krümmungsmittelpunkt einer Kurve $y=f(x)$ im Punkte x_0 hat die Koordinaten:

$$\xi = x_0 - \frac{(1+f_0'^2)f_0'}{f_0''}, \quad \eta = f(x_0) + \frac{1+f_0'^2}{f_0''}.$$

Setzt man aus (1) für f_0'' den Wert v'' ein, so erhält man zunächst für die Krümmungsmittelpunktskurve die Parameterdarstellung

$$\xi = x_0 - \frac{(1+y'^2)y'}{A_0y'^3 + B_0y'^2 + C_0y' + D_0}; \quad \eta = y_0 + \frac{1+y'^2}{A_0y'^3 + B_0y'^2 + C_0y' + D_0}.$$

Elimination von y' aus diesen beiden Gleichungen liefert schliesslich

(5) Kasner, Amer. Trans. 10 (1909), 201 f.

$$(2) \quad (\eta - y_0)^2 + (\xi - x_0)^2 = -A_0(\xi - x_0)^3 + B_0(\xi - x_0)^2(\eta - y_0) \\ - C_0(\xi - x_0)(\eta - y_0)^2 + D_0(\eta - y_0)^3,$$

wo A_0, B_0, C_0, D_0 die Werte von A, B, C, D im Punkte x_0, y_0 bedeuten.

Die ist bereits die gesuchte Kurve dritten Grades mit einem (isoliert) Doppelpunkt in (x_0, y_0) .

Im Falle der konformen Abbildung, (d. h. $A=C$ und $B=D$) zerfällt die kubische Kurve in drei Geraden (5), von denen zwei in die isotropen Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) fallen. Die Gleichung (2) nimmt dann nämlich die Form an:

$$(3) \quad [(\eta - y_0)^2 + (\xi - x_0)^2][1 + A_0(\eta - y_0) - B_0(\xi - x_0)] = 0.$$

Die kubische Kurve (2) bzw. (3) schneidet die uneigentliche Gerade der xy -Ebene in drei Punkten. Daher liegen stets 3 Krümmungsmittelpunkte im Unendlichen und die Krümmungskreise der zugehörigen Netzkurven sind gerade Linien, die die Netzkurve dreipunktig berühren, d. h. in jedem Punkt x_0, y_0 gibt es drei Richtungen y' derart, dass die zugehörigen geodätischen *hyperoskulierende* Tangente haben. Bei der konformen Abbildung in die xy -Ebene fallen 2 dieser Richtungen in die isotropen Geraden durch x_0, y_0 .

III.

Es liegt jetzt die Frage nahe, ob es unter den ∞^1 Krümmungskreisen der Netzkurven durch den Punkt x_0, y_0 hyperoskulierende gibt, d. h. solche, die die zugehörige Netzkurve vierpunktig berühren. Wir werden zeigen: es gibt im allgemeinen in jedem Punkte 6 solche hyperoskulierende Krümmungskreise, d. h. die zu 6 Richtungen y' durch x_0, y_0 gehörigen Kurven des Netzes (1) werden von ihren Krümmungskreisen vierpunktig berührt.

Zum Nachweise werde der Punkt x_0, y_0 zum Ursprung des Koordinatensystems der xy -Ebene gewählt. Die Gleichung des zur Richtung y' gehörigen Krümmungskreises wird dann:

$$(4) \quad \left(\xi + \frac{(1+y'^2)y'}{y''} \right)^2 + \left(\eta - \frac{1+y'^2}{y''} \right)^2 = \frac{(1+y'^2)y'^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}.$$

Man berechnet die Ableitungen

$$\frac{d\eta}{d\xi}; \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3}.$$

Für einen hyperoskulierenden Krümmungskreis müssen diese Ableitungen mit den entsprechenden aus Gleichung (1), übereinstimmen.

Für die ersten beiden Ableitungen ist dies der Fall, dagegen liefert die dritte Ableitung:

$$(5) \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = v'''.$$

Differenziert man Gleichung (1) vollständig nach u , so erhält man:

$$v''' = 3A^2v'^5 + B_1v'^4 + C_1v'^3 + D_1v'^2 + E_1v' + F_1$$

dabei sind:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_v + 5AB, \\ C_1 &= A_u + B_v + 4AC + 2B^2, \\ D_1 &= 3AD + B_u + 3BC + C_v, \\ E_1 &= 2BD + C^2 + C_u + D_v, \\ F_1 &= CD + D_u. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (5) erhält man dann nach (4) und (1):

$$(6) \quad 3y'(A_0y'^3 + B_0y'^2 + C_0y' + D_0)^2 = (1 + y'^2) \times (3A_0^2y'^5 + B_0y'^4 + C_0y'^3 + D_0y'^2 + E_0y' + F_0);$$

dies ist, da sich die Koeffizienten des höchsten Gliedes fortheben, eine Gleichung sechsten Grades in y' , die im allgemeinen sechs Lösungen hat.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Im Falle der konformen Abbildung ($A=C$ und $B=D$) vereinfacht sich die Gleichung (6) zu:

$$(7) \quad 3y'(Ay' + B)^2(1 + y'^2) = (1 + y'^2)(3A^2y'^3 + \bar{B}y'^2 + \bar{C}_1y' + \bar{D}_1)$$

d. h. es fallen 4 der hyperoskulierenden Krümmungskreise in die beiden isotropen Geraden durch den Nullpunkt, also mit den hyperoskulierenden Tangenten zusammen und nur 2 hyperoskulierende Krümmungskreise sind wesentlich.

IV.

Eine analoge Abschätzung muss man zu dem Problem von Jules Drach (4) erhalten, wenn man die Zahl der hyperoskulierenden Schmiegekegelschnitte der Netzkurven (1) durch den Punkt (x_0, y_0) berechnet.

Ist eine Fortschreitungsrichtung y' durch x_0, y_0 gegeben, so ist nach (1) die zugehörige geodätische bestimmt und man kann den Schmiegekegelschnitt dieser geodätischen im Punkt x_0, y_0 als Funktion von y' bestimmen.

Der Punkt x_0, y_0 sei wieder der Anfangspunkt des Koordinatensystems.

Ein Kegelschnitt durch $(0, 0)$ hat die Gleichung

$$(8) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = 0;$$

durch fünfmaliges Differenzieren nach x berechnet man $y', y'', y''', y^{(IV)}$ und $y^{(V)}$. Für den Schmiegekegelschnitt an die Netzkurve (1) durch den Punkt x_0, y_0 in der Richtung $y' = v'$ sind dann

$$(9) \quad y' = v', y'' = v'', y''' = v''', \text{ und } y^{(IV)} = v^{(IV)}.$$

wo für $v'', v''', v^{(IV)}$ die Werte nach (1) und durch vollständige Differentiation von (1) nach u einzusetzen sind.

Soll der Schmiegekegelschnitt der Richtung y' hyperoskulierend sein, so muss auch

$$(10) \quad y^{(V)} = v^{(V)}$$

sein.

Dies gibt eine algebraische Gleichung in y' , die man am schnellsten berechnet, indem man aus den 5 Gleichungen (9) und (10) die Koeffizienten a, b, c, d, e des Kegelschnitts eliminiert.

Man erhält

$$(11) \quad 45y''y''y^{(IV)} - 4y''^3 - 9y''y^{(V)} = 0.$$

Setzt man hiernach (1) für $y'', y''', y^{(IV)}$ und $y^{(V)}$ die Werte ein, dann erhält man:

$$(12) \quad \bar{A}y^{14} + \bar{B}y^{13} + \dots + \bar{X} = 0,$$

wo $\bar{A}, \bar{B}, \dots, \bar{X}$ Ausdrücke im A, B, C, D und deren partiellen Ableitungen nach u und v bis zur dritten Ordnung im Punkte x_0, y_0 sind.

Dies ist eine Gleichung von 14-ten Grade. Es gibt also im allgemeinen 14 Richtungen y' durch den Punkt x_0, y_0 derart, dass der Schmiegekegelschnitt der zugehörigen geodätischen hyperoskulierend ist.

Im Falle der konformen Abbildung ($A=C$ und $B=D$), wo die Minimallinien der Fläche in die isotropen Geraden der xy -Ebene übergehen, erhält man statt Gleichung (12) eine Gleichung der Form

$$(y'^2 + 1)^6 \{ \hat{A}y'^8 + \hat{B}y'^7 + \dots + \hat{X} \} = 0.$$

Man sieht, dass in diesem Falle sechs der hyperoskulierenden Schmiegekegelschnitte in die beiden isotropen Geraden durch den betrachteten Punkt fallen.

Den 10. März, 1928.