30. Sur les systèmes des équations différentielles ordinaires.

Par MASUO FUKUHARA.

(reçu le 5 septembre, 1928.)

Soient $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_q)$, ($i=1, 2, \dots, q$), q fonctions continues de l'ensemble $(x, y_1, y_2, \dots, y_q)$ dans une région $\Delta: 0 \leq x \leq a, |y_i| \leq b$, et formons un système des équations différentielles

$$(\alpha) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_q) \quad (i=1, 2, \dots, q).$$

Désignons par M une limite supérieure de $|f_i|$, ($i=1, 2, \dots, q$) dans la région Δ . On sait que le système (α) admet au moins un système des intégrales $y_i = y_i(x)$, ($i=1, 2, \dots, q$), satisfaisant aux conditions initiales

$$(\beta) \quad y_i(0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, q).$$

Un tel système est représenté par une courbe dans l'espace à $(q+1)$ dimensions. Cette courbe part de l'origine O et aboutit à un point de l'hyperplan $x = a' \left[= \min \left(a, \frac{b}{M} \right) \right]$, restant toujours dans la région Δ . L'ensemble des courbes intégrales de (α) satisfaisant aux conditions (β) remplit une région, $\bar{R}$. Désignons par ξ un nombre quelconque entre 0 et a' et par $\bar{E}(\xi)$ l'ensemble des points de $\bar{R}$ appartenant à l'hyperplan $x = \xi$. M. Peano a montré que l'ensemble $\bar{E}(\xi)$ est fermé. On sait de plus que $\bar{E}(\xi)$ est continu (*i. e.* fermé et bien enchaîné). Ce théorème a été obtenu par M. Kneser. On peut dire d'ailleurs que, si P est un point frontière de $\bar{R}$, il existe au moins une courbe intégrale passant par deux points O et P et dont les points entre O et P sont des points frontières de $\bar{R}$.

La région $\bar{R}$ est, comme on le verra dans la suite, la limite d'une suite des régions $R^{(1)}$. Considérons maintenant un autre système des équations différentielles

(1) Pour la définition des régions $R^{(1)}$, voir les nos 1, 2, 3.

$$(\alpha_1) \quad \frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, q).$$

On obtient une suite analogue, $R_1^{(q)}$, qui a pour limite la région $\bar{R}_1$ remplie par les courbes intégrales du système (α_1) passant par O . En comparant les régions $R_1^{(q)}$ avec les régions $R^{(q)}$, on obtient des théorèmes de comparaison qui peuvent affirmer l'unicité de la solution du système (α_1) , sachant l'unicité de la solution du système (α) . En particulierisant les fonctions f_i , on obtiendra beaucoup des cas d'unicité. Je veux exposer ces résultats dans ce présent mémoire.

§ I.

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème de M. Kneser.

1. Considérons, pour fixer les idées, deux équations simultanées:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \end{cases}$$

dont les seconds membres f et g sont des fonctions continues de l'ensemble (x, y, z) dans la région Δ définie par $0 \leq x \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq b$. Soit M une limite supérieure de $|f|$ et de $|g|$ dans la région Δ . Nous ne considérons que des systèmes des intégrales des équations 1) satisfaisant aux conditions initiales:

$$(2) \quad y=z=0 \quad \text{pour } x=0.$$

Donnons d'abord quelques définitions et notations préliminaires.

Soit P_1 un point quelconque dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1 ; et soit d un nombre positif quelconque. Nous désignerons par $D(P_1; d)$ un domaine défini par les inégalités: $0 \leq x - x_1 \leq d$, $|y - y_1| \leq Md$, $|z - z_1| \leq Md$. Soient de plus

$$M(P_1; d) = \text{le maximum de } f \text{ dans } D(P_1; d),$$

$$m(P_1; d) = \text{le minimum de } f \text{ dans } D(P_1; d),$$

$$N(P_1; d) = \text{le maximum de } g \text{ dans } D(P_1; d),$$

$$n(P_1; d) = \text{le minimum de } g \text{ dans } D(P_1; d).$$

Intercalons entre 0 et $a' \left[= \min \left(a, \frac{b}{M} \right) \right]$ une suite des nombres croissants

$$(I) \quad x_1, x_2, \dots, x_{i-1}.$$

Soient μ_1 un nombre quelconque entre $M(O; x_1)$ et $m(O; x_1)$ et ν_1 un nombre quelconque entre $N(O; x_1)$ et $n(O; x_1)$, O désignant l'origine. Soit P_1 le point dont les coordonnées sont

$$x_1, y_1 = \mu_1 x_1, \quad z_1 = \nu_1 x_1.$$

Soient μ_2 un nombre quelconque entre $M(P_1; x_2 - x_1)$ et $m(P_1; x_2 - x_1)$ et ν_2 un nombre quelconque entre $N(P_1; x_2 - x_1)$ et $n(P_1; x_2 - x_1)$. Soit P_2 le point dont les coordonnées sont

$$x_2, y_2 = y_1 + \mu_2(x_2 - x_1), \quad z_2 = z_1 + \nu_2(x_2 - x_1).$$

Le procédé peut être continué: ayant obtenu le point $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ sur le plan $x = x_{i-1}$, les coordonnées du point P_i sont données par

$$x_i, y_i = y_{i-1} + \mu_i(x_i - x_{i-1}), \quad z_i = z_{i-1} + \nu_i(x_i - x_{i-1}),$$

où μ_i et ν_i sont des nombres quelconques satisfaisant aux inégalités

$$m(P_{i-1}; x_i - x_{i-1}) \leq \mu_i \leq M(P_{i-1}; x_i - x_{i-1}),$$

$$n(P_{i-1}; x_i - x_{i-1}) \leq \nu_i \leq N(P_{i-1}; x_i - x_{i-1}).$$

Définissons deux fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ par les égalités

$$\begin{cases} \Phi(x) = y_{i-1} + \mu_i(x - x_{i-1}) & \text{pour } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \Psi(x) = z_{i-1} + \nu_i(x - x_{i-1}) & \text{pour } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ x_0 = 0, x_s = a'; & (i = 1, 2, \dots, s). \end{cases}$$

Les deux équations

$$y = \Phi(x), \quad z = \Psi(x)$$

représentent une ligne polygonale partant de O et aboutissant à un point du plan $x = a'$. Cette ligne polygonale sera appelée, dans la suite, la ligne polygonale (L) correspondant à la division (I). En particulier, si tous les μ et ν satisfont aux égalités

$$\mu_i = f(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), \quad \nu_i = g(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}),$$

elle sera appelée la ligne polygonale (Λ) .

2. Cela posé, nous allons maintenant considérer l'ensemble de toutes les lignes polygonales (L) correspondant à la division (I). Ces lignes polygonales remplissent une région de l'espace, R . Cette région

sera dite la région (R) correspondant à la division (I). Soit $E(\xi)$ l'ensemble de tous les points du plan $x=\xi$ appartenant à la région R . Nous dirons que l'ensemble $E(\xi)$ est continu.

Supposons que la suite des points de $E(\xi)$

$$P', P'', \dots, P^{(i)}, \dots$$

converge vers un point P . $P^{(i)}$ étant un point de $E(\xi)$, il existe au moins une ligne polygonale (L) correspondant à la division (I) et passant par O et $P^{(i)}$, soit L_i . On pourra trouver une suite des entiers croissants

$$n_1, n_2, \dots, n_i, \dots$$

telle que les lignes L_i tendent uniformément vers une ligne polygonale L , qui est nécessairement une ligne polygonale (L) correspondant à la division (I). Le point P appartient donc à l'ensemble $E(\xi)$ et l'ensemble $E(\xi)$ est fermé

Considérons ensuite deux lignes polygonales (L) , L_1 et L_2 , correspondant à la division (I). Ces deux lignes polygonales coupent le plan $x=\xi$ en points P_1 et P_2 respectivement. Je dis que *ces deux points P_1 , P_2 peuvent se joindre par une courbe de Jordan appartenant à $E(\xi)$* . Soit P' un point quelconque d'abscisse x' . La ligne polygonale (Λ) partant du point P' et correspondant à la division

$$x', x_i, x_{i+1}, \dots, x_{s-1} \quad (x_{i-1} \leq x' < x_i)$$

coupe le plan $x=\xi$ en un point P'' . Lorsque le point P' , partant du point P_1 , se meut le long de L_1 puis L_2 , le point P'' décrit une courbe C partant du point P_1 . Cette courbe C appartient évidemment à l'ensemble $E(\xi)$ et aboutit au point P_2 en même temps que P' . C. Q. F. D.

L'ensemble $E(\xi)$ est donc continu.

3. Si l'on subdivise chacun des intervalles partiels (x_{i-1}, x_i) en intervalles plus petits d'une façon arbitraire, la région (R) correspondant à cette nouvelle division (I') , R' , est évidemment une région partielle de R . Si l'on subdivise chacun des intervalles partiels de la division (I') en intervalles plus petits, la région (R) correspondant à la nouvelle division (I'') , R'' , est une région partielle de R' . En continuant ainsi, on obtient une suite des régions

$$R, R', R'', \dots$$

s'emboîtant les unes dans les autres. En désignant par $E^{(i)}(\xi)$ la section

de $R^{(i)}$ par le plan $x=\xi$, l'ensemble $E^{(i)}(\xi)$ contient tous les $E^{(j)}(\xi)$ d'indices supérieurs à i . Il est clair que, si tous les intervalles partiels de la division $(I^{(i)})$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{i}$, l'ensemble des points appartenant à toutes les régions $R^{(i)}$, $\bar{R}$, constitue la région remplie par toutes les courbes intégrales des équations (1) satisfaisant aux conditions (2). La section de $\bar{R}$ par le plan $x=\xi$, $\bar{E}(\xi)$, est l'ensemble des points appartenant à tous les $E^{(i)}(\xi)$. Chaque ensemble $E^{(i)}(\xi)$ étant continu, l'ensemble $\bar{E}(\xi)$ est aussi continu. Le théorème de M. Kneser est donc établi.

4. GÉNÉRALISATION. Considérons maintenant un système des inégalités

$$(3_0) \quad \begin{cases} f_0(x, y, z) \leq Dy \leq F_0(x, y, z), \\ g_0(x, y, z) \leq Dz \leq G_0(x, y, z), \end{cases}$$

où f_0, g_0, F_0, G_0 sont des fonctions continues de l'ensemble (x, y, z) . Un système de fonctions continues $y(x), z(x)$ est, par définition, une solution du système (3_0) , si leurs nombres dérivés satisfont aux inégalités

$$\begin{cases} f_0(x, y, z) \leq Dy(x) \leq F_0(x, y, z), \\ g_0(x, y, z) \leq Dz(x) \leq G_0(x, y, z). \end{cases}$$

(On désigne par $Df(x)$ l'une quelconque des nombres dérivés de $f(x)$).

Notre procédé exposé dans les n^{os} 1, 2, 3 est applicable sans modifications. Remarquons seulement qu'on doit poser

$$\begin{aligned} M(P_1; d) &= \text{le maximum de } F_0 \text{ dans } D(P_1; d), \\ m(P_1; d) &= \text{le minimum de } f_0 \text{ dans } D(P_1; d), \\ N(P_1; d) &= \text{le maximum de } G_0 \text{ dans } D(P_1; d), \\ n(P_1; d) &= \text{le minimum de } g_0 \text{ dans } D(P_1; d). \end{aligned}$$

5. On peut généraliser encore. Admettons alors la semi-continuité supérieure de F_0, G_0 et la semi-continuité inférieure de f_0, g_0 ⁽²⁾. On peut appliquer directement notre procédé au système (3_0) même dans ce cas. Mais il peut arriver que deux points de $E(\xi)$ ne peuvent se joindre par une *courbe de Jordan*. Toutefois la considération analogue (à celle du n^o 2) permet de prouver qu'il existe un continu joignant deux points quelconques de $E(\xi)$ et appartenant à $E(\xi)$.

(²) Les modules de f_0, g_0, F_0, G_0 sont supposés bornés.

On peut procéder d'une autre manière et considérer avec M. Nagumo la suite des systèmes

$$(3_i) \quad \begin{cases} f_i(x, y, z) \leq Dy \leq F_i(x, y, z), \\ g_i(x, y, z) \leq Dz \leq G_i(x, y, z), \\ (i=1, 2, 3, \dots), \end{cases}$$

telle qu'on ait, f_i, g_i, F_i, G_i étant tous continus,

$$F_1 \geq F_2 \geq \dots \geq F_n \geq \dots, \quad \lim F_n = F_0,$$

$$G_1 \geq G_2 \geq \dots \geq G_n \geq \dots, \quad \lim G_n = G_0,$$

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots, \quad \lim f_n = f_0,$$

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq \dots, \quad \lim g_n = g_0.$$

Il va sans dire que la région $\bar{R}_i$ remplie par les courbes représentant les solutions du système (3_i) satisfaisant aux conditions (2) tend vers la région analogue, $\bar{R}_0$, correspondant au système (3_0) lorsque i augmente indéfiniment. D'où résulte aussi la généralisation.

L'Institut mathématique,

L'Université impériale de Tokyo.