6. Differentialkugelgeometrie, IV.
Über die Laguerre-geometrische Verallgemeinerung
des Fundamentalsatzes der Flächentheorie.

Von TSURUSABURO TAKASU.

(Eingegangen am 13. Dezember, 1927.)

Herr Prof. W. Blaschke⁽¹⁾ hat den Fundamentalsatz der Laguerreschen Flächentheorie zuerst aufgestellt. Sein Satz ist andererseits der Fundamentalsatz der Theorie von "Mittenkugelskongruenzen"⁽²⁾, die Laguerre-geometrische Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Minimalflächen sind. Im folgenden möchte ich seinen Satz zum Falle der allgemeinen Laguerreschen (=L-) Kugelskongruenzen so verallgemeinern (S. Art. 5), dass er eine Laguerregeometrische Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der gewöhnlichen Flächentheorie wird. Die Anzahl der Grundformen ist dabei ebenfalls *zwei*.

1. Ist $lx + my + nz - p = 0$ die Hessesche Normalform der Gleichung einer Ebene, so wird die orientierte Kugel mit Zentrum (A, B, C) und Radius R durch die folgende Gleichung gegeben:

$$lA + mB + nC - p + i \cdot iR = 0.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \xi_1 = A, \quad \xi_2 = B, \quad \xi_3 = C, \quad \xi_4 = iR, \quad \bar{\xi}_5 = 1, \\ \rho u^1 = l, \quad \rho u^2 = m, \quad \rho u^3 = n, \quad \rho u^4 = i, \quad \rho u^5 = -p, \\ \rho > 0: \text{sonst beliebig,} \end{aligned}$$

so werden $(\xi, \bar{\xi}_5)$ die sogenannten Laguerreschen Ebenenkoordinaten.

2. Es sei eine allgemeine L-Kugelskongruenz

$$(1) \quad \bar{\xi} = \xi(u^1, u^2), \quad (\bar{\xi}_5 = 1),$$

$$(2) \quad u^1 = u, \quad u^2 = v$$

⁽¹⁾ W. Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre, I. Grundformeln der Flächentheorie. Abhandl. aus dem math. Sem. der Hamburgischen Universität, **3** (1924).

⁽²⁾ Ebenda.

und die beiden Enveloppenmäntel davon

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= u(u^1, u^2), \quad ((uu)_4 = 0), \\ \bar{u} &= \bar{u}(u^1, u^2), \quad ((\bar{u}\bar{u})_4 = 0) \end{aligned}$$

gegeben. Man bezeichne im übrigen

$$\frac{\partial u}{\partial u^1} = u_1 = u_u, \quad \text{usw.}$$

Die Koordinaten u seien wie folgt normiert:

$$(4) \quad (u\bar{u})_4 = 2.$$

3. Ableitungsgleichungen für das Grundvektorensystem ξ_h , u , $\bar{u}$.
Wir nehmen die quadratische Form⁽³⁾

$$d\sigma^2 = \mathcal{G}_{hk} du^h du^k$$

als die Grundform der Tensorrechnung auf, wobei

$$\mathcal{G}_{hk} = (\xi_h \xi_k)_4$$

gesetzt ist. Setzen wir weiter

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{G} &= \mathcal{G}_{11}\mathcal{G}_{22} - \mathcal{G}_{12}^2, \\ D_{hk} &= (u\xi_{hk})_4 = -(u_h\xi_k)_4 = -(u_k\xi_h)_4,^{(4)} \\ \bar{D}_{hk} &= (\bar{u}\xi_{hk})_4 = -(\bar{u}_h\xi_k)_4 = -(\bar{u}_k\xi_h)_4, \\ N_h &= u\bar{u}_h = -\bar{u}u_h, \\ D_h{}^i &= \mathcal{G}^{\mu i} D_{h\mu}, \quad \bar{D}_h{}^i = \mathcal{G}^{\mu i} \bar{D}_{h\mu} \quad \text{usw.}, \\ \xi_5 &= -\frac{1}{2}\{(\xi\xi)_4 - 1\}, \quad \bar{\xi}_5 = 1. \end{aligned}$$

Wir werden jetzt zunächst versuchen, für die ersten vier Komponenten Ableitungsgleichungen von der Gestalt

⁽³⁾ Die Nullfiguren hiervon sind Laguerre-geometrische Verallgemeinerung der Minimalkurven.

⁽⁴⁾ Die Nullfiguren von $D_{hk} du^h du^k$ sind Laguerre-geometrische Verallgemeinerung der asymptotischen Linien.

$$(6) \quad \xi_{ik} = a_{ik}u + b_{ik}\bar{u} + C_{ik}^l \xi_l$$

herzustellen, wobei nach dem Lemma Riccis $\mathcal{Q}_{ikl} = 0$, $C_{ik}^l = \mathcal{Q}^{lt} C_{ikt}$ ist. Durch Multiplikation mit ξ_r folgt

$$(7) \quad \xi_{ik} \xi_r = C_{ik}^l \mathcal{Q}_{lr} = C_{ikr}$$

und durch kovariante Ableitung von $\xi_i \xi_r = \mathcal{Q}_{ir}$ ergibt sich nach dem Lemma Riccis

$$(8) \quad \xi_{ik} \xi_r + \xi_i \xi_{rk} = 0,$$

somit auch

$$(9) \quad C_{ikr} = -\xi_i \xi_{rk}.$$

Nach (7) ist C_{ikr} bezüglich der beiden ersten, nach (9) auch bezüglich der beiden letzten Fussmarken und somit überhaupt symmetrisch. Deshalb gibt (8)

$$(10) \quad C_{ikr} = 0.$$

Folglich ist auch:

$$(11) \quad C_{ik}^l = 0.$$

Durch Multiplikation von (6) mit $\bar{u}$ bzw. u , erhalten wir

$$(12) \quad a_{ik} = \frac{1}{2} \bar{D}_{ik}, \quad b_{ik} = \frac{1}{2} D_{ik}.$$

Nimmt man

$$(13) \quad u_i = \alpha_i u + \beta_i \bar{u} + \mathcal{Q}^{it} \gamma_{it} \xi_t$$

an, dann durch Multiplikation mit $\bar{u}$, u und ξ_r erhält man

$$(14) \quad \alpha_i = -\frac{1}{2} N_i, \quad \beta_i = 0, \quad \mathcal{Q}^{it} \gamma_{it} = -\mathcal{Q}^{it} D_{it} = -D_i^t.$$

Ebenso erhalten wir

$$(15) \quad \bar{u}_i = \frac{1}{2} N_i \bar{u} - \bar{D}_i^t \xi_t.$$

Aus (6), (11), (12), (13), (14) und (15) erhalten wir also die folgenden Formeln

$$\begin{aligned}
 \xi_{ik} &= \frac{1}{2} \bar{D}_{ik} u + \frac{1}{2} D_{ik} \bar{u}, \\
 (16) \quad u_i &= -\frac{1}{2} N_i u - D_i{}^j \xi_j, \\
 \bar{u}_i &= \frac{1}{2} N_i \bar{u} - \bar{D}_i{}^j \xi_j
 \end{aligned}$$

für die ersten *vier* Komponenten. Durch Differentiation von

$$\xi_5 = -\frac{1}{2} \{(\xi\xi)_4 - 1\},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \xi_{5,i} &= -(\xi\xi)_4, \\
 \xi_{5,ik} &= -(\xi_k \xi_i)_4 - (\xi \xi_{ik})_4 = -\mathcal{G}_{ik} - \frac{1}{2} [\bar{D}_{ik}(\xi u)_4 + D_{ik}(\xi \bar{u})_4]
 \end{aligned}$$

nach (16)₁; folglich:

$$(17) \quad \xi_{5,ik} = -\mathcal{G}_{ik} + \frac{1}{2} \bar{D}_{ik} u_5 + \frac{1}{2} D_{ik} \bar{u}_5.$$

Weiter gilt

$$(18) \quad u_5 = -(\xi u)_4, \quad u_{5,i} = -(\xi u_i)_4 = \frac{1}{2} N_i(u\xi)_4 + D_i{}^j(\xi\xi)_j$$

und also nach (16)₂,

$$= -\frac{1}{2} N_i u_5 - D_i{}^j \xi_{5,j}.$$

Deshalb gilt (16)₂ und ebenso auch (16)₃ für die sämtlichen *fünf* Komponenten. Setzt man

$$(19) \quad \Xi = 0, 0, 0, 0, 1,$$

so erhält man aus (16), (17) und (18) die endgültigen Formeln:

$$\begin{aligned}
 \xi_{ik} &= -\mathcal{G}_{ik} \Xi + \frac{1}{2} \bar{D}_{ik} u + \frac{1}{2} D_{ik} \bar{u}, \\
 u_i &= -\frac{1}{2} N_i u - D_i{}^j \xi_j, \\
 \bar{u}_i &= \frac{1}{2} N_i \bar{u} - \bar{D}_i{}^j \xi_j,
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$$(20)_4 \quad \Xi = 0, 0, 0, 0, 1; \quad \xi_s = -\frac{1}{2} \{\xi\xi\}_4 - 1\}$$

für die sämtlichen fünf Komponenten. Gegenüber der Umnormierung von u sind (20) , $(20)_4$ invariant.

4. Integrabilitätsbedingungen von (20). Fundamentalsatz der Theorie von L-Kugelskongruenzen. Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen (20) sind invariant geschrieben wie folgt

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}^{kl} \xi_{hkl} &= \mathfrak{R}^g \mathcal{E}_{lh} \mathcal{G}^{mt} \xi_m, \\ \mathcal{E}^{hk} u_{hk} &= 0, \quad \mathcal{E}^{hk} \bar{u}_{hk} = 0, \end{aligned}$$

worin $\mathfrak{R}^g$ die Gauss'sche Krümmung der Grundform $\mathcal{G}_{hk} du^h du^k$ bezeichnet und $\mathcal{E}^{hk}$, $\mathcal{E}_{hk}$ die folgenden schiefsymmetrischen Tensoren bedeuten:

$$(22) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}^{11} &= 0, \quad \mathcal{E}^{12} = \mathcal{G}^{-\frac{1}{2}} = -\mathcal{E}^{21}, \quad \mathcal{E}^{22} = 0, \\ \mathcal{E}_{11} &= 0, \quad \mathcal{E}_{12} = \mathcal{G}^{\frac{1}{2}} = -\mathcal{E}_{21}, \quad \mathcal{E}_{22} = 0. \end{aligned}$$

Weiter gelten:

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_{hr} \mathcal{E}^{kr} &= \mathcal{G}_h^k = \begin{cases} 1, & h = k; \\ 0, & h \neq k, \end{cases} \\ \frac{1}{2} \mathcal{E}_{hk} \mathcal{E}^{hk} &= \frac{1}{2} \mathcal{G}_{hk} \mathcal{G}^{hk} = 1, \\ \mathcal{G}_{hk,r} &= 0. \end{aligned}$$

Aus $\mathcal{E}^{kl} \xi_{hkl} = \mathfrak{R}^g \mathcal{E}_{lh} \mathcal{G}^{st} \xi_s$, ergibt sich:

$$(24) \quad \mathfrak{R}^g = -\frac{1}{2} \mathcal{E}^{ph} \mathcal{E}^{kl} \bar{D}_{hk} D_{lp} = \frac{D}{2\mathcal{G}} D^{rs} \bar{D}_{rs},$$

$$(25) \quad \mathcal{E}^{kl} (\bar{D}_{hkl} - \frac{1}{2} \bar{D}_{hk} N_l) = 0,$$

$$(26) \quad \mathcal{E}^{kl} (D_{hkl} + \frac{1}{2} D_{hk} N_l) = 0.$$

Aus $\mathcal{E}^{hk}u_{hk}=0$ ergibt sich :

$$(27) \quad \mathcal{E}^{hk}(N_{hk} + D_h^i \bar{D}_{ik}) = 0,$$

$$(28) \quad \mathcal{E}^{hk} \left(\frac{1}{2} N_h D_k^i - \mathcal{G}^{il} D_{nlk} \right) = 0,$$

$$(29) \quad \mathcal{E}^{hk} D_{hk} = 0,$$

$$(30) \quad \mathcal{E}^{hk} D_h^i D_{ik} = 0.$$

(29) und (30) sind Identitäten. (28) folgt aus (26),

Aus $\mathcal{E}^{hk}\bar{u}_{hk}=0$ ergibt sich :

$$(31) \quad \mathcal{E}^{hk}(N_{hk} - \bar{D}_h^s D_{sk}) = 0,$$

$$(32) \quad \mathcal{E}^{hk} \left(\frac{1}{2} N_h \bar{D}_k^s + \mathcal{G}^{sl} \bar{D}_{hkl} \right) = 0,$$

$$(33) \quad \mathcal{E}^{hk} \bar{D}_h^s \bar{D}_{sk} = 0,$$

$$(34) \quad \bar{D}_h^s \mathcal{G}_{sk} = 0.$$

(33) und (34) sind Identitäten. (32) folgt aus (25). (31) folgt aus (27), Also als die Integrabilitätsbedingungen fürs System (20) haben wir (24), (25), (26) und (27). (24) ist eine *L-Verallgemeinerung der Gausschen Identität*.

Aus (25) und (26) folgt:

$$(35) \quad (\mathcal{E}^{pl} N_l =) \mathcal{E}^{kl} \bar{D}^{hp} \bar{D}_{hkl} = - \mathcal{E}^{kl} D^{hp} D_{hkl}.$$

Dies (ebenso wie (25) und (26)) ist eine *L-Verallgemeinerung der Codazzi Formeln*.

Aus (25), (26) und (27) haben wir

$$(36)$$

$$(\mathcal{E}^{hk} N_{hk} = - \mathcal{E}^{sl} (\bar{D}_k^{lk} \bar{D}_{tsl} + \bar{D}^{lk} \bar{D}_{tslk}) =) \mathcal{E}^{sl} (D_k^{lk} D_{tsl} + D^{lk} D_{tslk}) = - \mathcal{E}^{hk} D_h^s \bar{D}_{sk}.$$

Wir können jetzt wie folgt schliessen :

Fundamentalsatz der Theorie von L-Kugelkongruenzen (eine praktische Formulierung). Wenn drei Differentialformen $\mathcal{G}_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$,

$D_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$ und $\bar{D}_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$, von denen die erste positiv definit ist, mit den Bedingungen (24), (35) und (36) gegeben sind, dann lässt sich N_i aus (35) bestimmen und also wird (20) integrierbar, sodass eine L -Kugelkongruenz $\xi(u^1, u^2)$ dadurch bis auf Laguerresche Transformationen sich eindeutig so bestimmen lässt, dass $\xi(u^1, u^2)$ die drei gegebenen Formen zu Grundformen hat. $\bar{D}_{hk}$ sind nach (44) durch $\mathcal{G}_{hk}$ und D_{hk} allein dargestellt.⁽⁶⁾

5. Präzisere Formulierung des Fundamentalsatzes. Um nun $\bar{D}_{hk}$ durch $\mathcal{G}_{hk}$ und D_{hk} allein darzustellen, wollen wir eine neue Form

$$(37) \quad P_{hk}^*(u^1, u^2) du^h du^k, \quad (P^* = P_{11}^* P_{22}^* - P_{12}^{*2})$$

eingeführen, deren Nulltoren die Krümmungstoren sind:

$$(38) \quad P_{hk}^* = \mathcal{E}_{hr} D_k^r, \quad P^{*hk} = \frac{\mathcal{G}}{P^*} \mathcal{E}^{pk} D_p^h = \frac{1}{P^*} \frac{\partial P^*}{\partial P_{hk}^*}.$$

Weiter bemerken wir eine Reihe von Identitäten:

$$(39) \quad \begin{aligned} (a) \quad \frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk} \mathcal{G}_{hk} &= 1, & (b) \quad \frac{1}{2} D^{hk} D_{hk} &= 1, \\ (c) \quad \frac{1}{2} \mathcal{E}^{hk} \mathcal{E}_{hk} &= 1, & (d) \quad \frac{1}{2} P^{*hk} P_{hk}^* &= 1; \end{aligned}$$

$$(40) \quad \begin{aligned} (a) \quad \mathcal{G}^{hk} P_{hk}^* &= 0 = P^{*hk} \mathcal{G}_{hk}, \\ (b) \quad \frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk} D_{hk} &= \mathfrak{S} = \frac{1}{2} \frac{D}{\mathcal{G}} D^{hk} \mathcal{G}_{hk}, \\ (c) \quad P^{*hk} D_{hk} &= 0 = D^{hk} P_{hk}^*, \\ (d) \quad \mathcal{E}^{hk} \mathcal{G}_{hk} &= 0 = \mathcal{G}^{hk} \mathcal{E}_{hk}, \\ (e) \quad \mathcal{E}^{hk} P_{hk}^* &= 0 = P^{*hk} \mathcal{E}_{hk}, \\ (f) \quad \mathcal{E}^{hk} D_{hk} &= 0 = D^{hk} \mathcal{E}_{hk}; \end{aligned}$$

⁽⁶⁾ Dabei ist der Fall $\mathcal{G} = D^2 G^{-1} = 0$ ($G = G_{11} G_{22} - G_{12}^2$, $G_{hk} = 11_{hk}$) von L -Krümmungskongruenzen ausgeschlossen.

$$(41) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk} \bar{D}_{hk} = F, \\ (b) \quad & \frac{1}{2} D^{hk} \bar{D}_{hk} = \frac{\mathcal{G}}{D} \mathfrak{R}^g, \\ (c) \quad & \frac{1}{2} P^{*hk} \bar{D}_{hk} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}}{P^*} \mathcal{E}^{kl} N_{kl} = \frac{\mathcal{G}}{P^*} \mathcal{E}^{klp} (D_{hpk} D^{hl} + D_{hpk} D_l^{hl}). \end{aligned}$$

Die zwei Buchstaben F und $\mathfrak{H}$ haben wir bloss so eingeführt. Die Formel (41) (b) folgt aus (24) ohne weiteres. Die Formel (41) (c) folgt wegen (38) aus (36).

Multipliziert man die erste, zweite und die dritte Kolonne (oder Zeile) der Determinante $|\mathcal{G}_{11} \ D_{12} \ P_{22}^*|$ bzw. mit $\frac{1}{2} P^{*11}$, P^{*12} und $\frac{1}{2} P^{*22}$ und addiert zur dritten, so folgt

$$|\mathcal{G}_{11} \ D_{12} \ P_{22}^*| = \frac{P_{22}^{*11}}{P^{*22}} \sqrt{\mathcal{G}} = P^* \sqrt{\mathcal{G}} \neq 0,$$

woraus folgt die *lineare Unabhängigkeit* von $\mathcal{G}_{hk}$, D_{hk} und P_{hk}^* . So kann man den symmetrischen Tensor $\bar{D}_{hk}$ aus ihnen linear kombinieren:

$$(42) \quad \bar{D}_{hk} = \alpha \mathcal{G}_{hk} + \beta D_{hk} + \gamma P_{hk}^*.$$

Durch tensorielle Multiplikation mit $\frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk}$, $\frac{1}{2} D^{hk}$ und $\frac{1}{2} P^{*hk}$ finden wir nach (39), (40) und (41):

$$\begin{aligned} \alpha \left(1 - \mathfrak{H}^2 \frac{\mathcal{G}}{D} \right) &= F - \mathfrak{H} \mathfrak{R}^g \frac{\mathcal{G}}{D}, \\ \beta \left(\mathfrak{H}^2 \frac{\mathcal{G}}{D} - 1 \right) &= \frac{\mathcal{G}}{D} (\mathfrak{H} F - \mathfrak{R}^g), \quad \gamma = \frac{1}{2} P^{*hk} \bar{D}_{hk}. \end{aligned}$$

Folglich wird (42) zu⁽⁷⁾:

$$(43) \quad \bar{D}_{hk} = \frac{F - \mathfrak{H} \mathfrak{R}^g \frac{\mathcal{G}}{D}}{1 - \mathfrak{H}^2 \frac{\mathcal{G}}{D}} \mathcal{G}_{hk} - \frac{\mathfrak{H} F - \mathfrak{R}^g}{1 - \mathfrak{H}^2 \frac{\mathcal{G}}{D}} \frac{\mathcal{G}}{D} D_{hk} + \gamma P_{hk}^*.$$

γ ist wegen (41) (c) durch $\mathcal{G}_{nk}$ und D_{nk} allein darstellbar. Also sind die beiden Bedingungen (24) und (36) schon eingeführt.

(7) Dem Falle $1 - \mathfrak{H}^2 \frac{\mathcal{G}}{D} = 0$ entsprechen Kugeln $\xi = \text{konst.}$

An Stelle von (43) schreiben wir an :

$$(44) \quad \bar{D}_{hk} = F \cdot \psi_{hk} + \phi_{hk},$$

worin

$$(45) \quad \begin{aligned} \psi_{hk} &= \left(1 - \mathfrak{S}^2 \frac{\mathcal{G}}{D}\right)^{-1} \left(\mathcal{G}_{hk} - \mathfrak{S} \frac{\mathcal{G}}{D} D_{hk}\right), \\ \phi_{hk} &= -\left(1 - \mathfrak{S}^2 \frac{\mathcal{G}}{D}\right)^{-1} \mathfrak{S}^{\mathcal{G}} (\mathfrak{S} \mathcal{G}_{hk} - D_{hk}) \frac{\mathcal{G}}{D} + \gamma P^*_{hk} \end{aligned}$$

gesetzt ist.⁽⁸⁾

Abgesehen von F sind jetzt alle vorkommenden Grössen wegen (40) und (41) durch $\mathcal{G}_{hk}$ und D_{hk} allein darstellbar.

Um die Invariante F durch $\mathcal{G}_{hk}$ und D_{hk} allein darzustellen, multiplizieren wir (35) mit D_{qp} , so folgt

$$(46) \quad \varepsilon^{kl} \bar{D}_{hkl} + \varepsilon^{kl} D^{rp} \bar{D}_{hp} D_{rkl} = 0.$$

Setzt man nun (44) in (46) ein, so folgt:

$$(47) \quad \varepsilon^{kl} \psi_{hk} F_l + \varepsilon^{kl} (\psi_{hkl} + D^{rp} D_{rkl} \psi_{hp}) F + \varepsilon^{kl} (\phi_{hkl} + D^{rp} D_{rkl} \phi_{hp}) = 0.$$

Wir wollen nun neue Bezeichnungen einführen:

$$(48) \quad \begin{aligned} \psi &= \psi_{11} \psi_{22} - \psi_{12}^2, \quad \psi^{hk} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \psi_{hk}}, \\ \frac{1}{2} \psi^{hk} \psi_{hk} &= 1, \\ \psi^{hr} \psi_{hs} &= \begin{cases} 1, & r=s, \\ 0, & r \neq s. \end{cases} \end{aligned}$$

(⁸) **N.B.** $\frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk} \psi_{hk} = 1, \quad \frac{1}{2} D^{hk} \psi_{hk} = 0, \quad \frac{1}{2} P^{*hk} \psi_{hk} = 0, \quad \psi = \left(1 - \mathfrak{S}^2 \frac{\mathcal{G}}{D}\right)^{-2} \mathcal{G} \neq 0,$
 $\frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk} \phi_{hk} = 0 \quad \frac{1}{2} D^{hk} \phi_{hk} = \frac{\mathcal{G}}{D} \mathfrak{S}^{\mathcal{G}} \quad \frac{1}{2} P^{*hk} \phi_{hk} = \gamma.$

Multiplizieren wir (47) zunächst mit ψ^{hp} und dann mit $\mathcal{E}_{qp}$, so folgt

$$(49) \quad F_q + Y_q \cdot F + Z_q = 0,$$

worin

$$(50) \quad \begin{aligned} Y_q &= \mathcal{E}_{pq} \mathcal{E}^{kl} (\psi^{hp} \psi_{hkl} + D^{rt} D_{rkl}), \\ Z_q &= \mathcal{E}_{pq} \mathcal{E}^{kl} \psi^{hp} (\phi_{hkl} + D^{rt} D_{rkl} \phi_{ht}) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Leitet man (49) nach p kovariant ab und (49) benutzt, so erhält man

$$(51) \quad F_{qp} + (Y_p - Y_q Y_p) F + (Z_{qp} - Y_q Z_p) = 0.$$

Transformieren wir die Integrabilitätsbedingung

$$(52) \quad \mathcal{E}^{qp} F_{qp} = 0$$

von (49) mittels (51), so erhalten wir

$$(53) \quad \mathcal{E}^{qp} Y_{qp} \cdot F + \mathcal{E}^{qp} (Z_{qp} - Y_q Z_p) = 0.$$

A) Ist erstens

$$(54) \quad \mathcal{E}^{qp} Y_{qp} \neq 0,$$

so lässt sich F ohne Integration aus (53) bestimmen.

Setzt man F von (55) in (49) ein, so erhält man

$$(55) \quad \begin{vmatrix} \mathcal{E}^{rs} (Y_{rsq} - Y_{rs} Z_q) & \mathcal{E}^{rs} Y_{rs} \\ \mathcal{E}^{rs} \{ Y_{rs} Z_q + (Y_r Z_s)_q - Z_{rsq} \} & \mathcal{E}^{rs} (Y_r Z_s - Z_{rs}) \end{vmatrix} = 0.$$

B) Ist zweitens

$$(56) \quad \mathcal{E}^{qp} Y_{qp} = 0,$$

so wird die Integrabilitätsbedingung (53) von (49) zu :

(57)

$$\mathcal{E}^{ap}(Z_{ap} - Y_a Z_p) = 0,$$

und F lässt sich durch Integration des integrierbaren Differentialgleichungensystems (49) bis auf eine Integrationskonstante bestimmen. Also nach dem letzten Satz folgt der

Fundamentalsatz der Theorie von L-Kugelskongruenzen (präzisere Auffassung). Sind zwei quadratische Formen $\mathcal{G}_{nk}(u^1, u^2) du^h du^k$, $D_{nk}(u^1, u^2) du^h du^k$, von denen die erste positiv definit ist, so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichungen (55) gelten, so existieren für (54) stets L-Kugelskongruenzen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf Laguerresche Transformationen eindeutig bestimmt.⁽⁹⁾ Es gibt im Falle (56) eine einparametrische Schar⁽¹⁰⁾ wesentlich verschiedener L-Kugelskongruenzen, wobei alle L-Kugelskongruenzen dieselbe Grundformen haben. Der Umnormierung $u^* = \omega \cdot u$ entspricht dabei $D_{nk}^* = \omega \cdot D_{nk}$.

Dieser Satz ist eine Laguerre-geometrische Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der gewöhnlichen Flächentheorie.

6. Fundamentalsatz (Herrn Blaschkes) der Laguerreschen Flächentheorie.

Es seien $\kappa^{(1)}$ und $\kappa^{(2)}$ die beiden orientierten Krümmungskugeln an u . Setzen wir

(58)

$$\xi_n = \kappa_n^{(m)} + (-1)^m u_n, \quad n=1, 2, 3, 4; \quad m=1, 2; \quad \bar{\xi}_5=1,$$

so sind $(\xi_n, \bar{\xi}_5)$ die zuerst von Herrn Blaschke (loc. cit.) eingeführten sogenannten Mittenkugeln. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine L-Kugelskongruenz $\xi(u^1, u^2)$ eine Mittenkugelskongruenz sei besteht darin dass $\mathfrak{S} \equiv \frac{1}{2} \mathcal{G}^{hk} D_{hk} = 0$ gilt.

In diesem Falle geht die ganze Theorie vom Art. 5 in die Blaschkesche über. Besonders wird der Satz vom Art. 5 zu:

Fundamentalsatz (Herrn Blaschkes) der Laguerreschen Flächentheorie.

Sind die zwei quadratischen Formen $\hat{\mathcal{G}}_{nk}(u^1, u^2) du^h du^k$ und $D_{nk}(u^1, u^2) du^h du^k$, von denen die erste positiv definit ist, so vor-

⁽⁹⁾ Man beweist diesen auf übliche Weise. Vgl. etwa W. Blaschke, Differentialgeometrie, II, §§ 50-51. Dabei ist der Fall $D=0$ von L-Krümmungskugelskongruenzen ausgeschlossen.

⁽¹⁰⁾ Wegen der Integrationskonstanten, die bei der Integration von (47) auftreten.

geschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichungen

$$(55)_1 \quad \left| \begin{array}{cc} \hat{\mathcal{E}}^{rs}(\hat{Y}_{rsq} - \hat{Y}_{rs}\hat{Z}_q) & \hat{\mathcal{E}}^{rs}\hat{Y}_{rs} \\ \hat{\mathcal{E}}^{rs}\{\hat{Y}_{rs}\hat{Z}_q + (\hat{Y}_r\hat{Z}_s)_q - \hat{Z}_{rsq}\} & \hat{\mathcal{E}}^{rs}(\hat{Y}_r\hat{Z}_s - \hat{Z}_{rs}) \end{array} \right| = 0$$

gelten, so existieren für $\hat{\mathcal{E}}^{qp}\hat{Y}_{qp} \neq 0$ stets L-Mittenkugelnkongruenzen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf Laguerresche Transformationen eindeutig bestimmt. Es gibt im Falle $\hat{\mathcal{E}}^{qp}\hat{Y}_{qp} = 0$ eine einparametrische Schar wesentlich verschiedener L-Mittenkugelnkongruenzen mit isothermen sphärischen Abbild der Krümmungslinien,* wobei alle L-Mittenkugelnkongruenzen dieselben Grundformen haben.

Der mit * bezeichnete Teil beweist sich aus der Formel

$$(59) \quad \hat{\mathcal{E}}^{qp}\hat{Y}_{qp} = - \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathcal{G}}_{11}\hat{\mathcal{G}}_{22}}} \frac{\mathcal{E}^2 \log \frac{\hat{\mathcal{G}}_{11}}{\hat{\mathcal{G}}_{22}}}{\partial u \partial v} = 0,$$

die bei den Krümmungslinienparametern u, v entsteht. Dabei stellt das Zeichen $\wedge$ diejenigen einfacheren Grössen, die für die Mittenkugelnkongruenz aus den entsprechenden allgemeineren Grössen entstehen.

7. Andere zweckmässige Grundvektorensysteme. Betrachten wir die speziellen Kugelkomplexe⁽¹⁾

$$(60) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2i}(u - \bar{u}), & (AA)_4 &= 1, \\ U &= \frac{1}{2}(u + \bar{u}), & (UU)_4 &= 1, \end{aligned}$$

so sind die folgenden zwei Grundvektorensysteme uns auch zweckmässig:

$$\text{I. } \xi_n, A, u; \quad \text{II. } \xi_n, A, U.$$

Die entsprechenden Theorien beabsichtige ich als getrennte Schriften erscheinen zu lassen.

Adjungiert man dabei den Kugelkomplex, $A=0, 0, 0, 1, 0$, und normiert man u und $\bar{u}$ wie folgt:

⁽¹⁾ Diesen entspricht im euklidischen R_4 bei der Minimalprojektion je eine Hyperebene.

$$u^m = \bar{u}^m, \quad m = 1, 2, 3, \quad u^4 = -\bar{u}^4 = i,$$

so entsteht eine euklidische Flächentheorie. In der Tat aus $(\xi A)_5 = (\xi_k A)_5 = 0$ folgt: $\xi_4 = 0$, $\xi_{4,k} = 0$; und wegen $u_{4,k} = 0$ und $A = 0, 0, 0, 1, 0$, wird $(u_k A)_5 = 0$.

Mathematisches Institut,
Kaiserliche Tôhoku Universität, Sendai.

Den 12. Dezember, 1927.