7. Differentialkugelgeometrie, V.

Über die Laguerre-geometrische Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der dualistischen Flächentheorie.

Von Tsurusaburo TAKASU.

(Eingegangen am 21. Dezember 1927.)

Im Abschnitt IV dieser Abhandlung⁽¹⁾ habe ich den Fundamentalsatz (Herrn Blaschkes⁽²⁾) der Laguerreschen⁽³⁾ Flächentheorie zum Falle der allgemeinen L-Kugelskongruenzen so verallgemeinert, dass der so verallgemeinerte Satz eine L-Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der gewöhnlichen Flächentheorie wird. Im folgenden möchte ich ein dualistisches Gegenstück davon herstellen (S. Art. 4). Der so erhaltene Satz steht zum Fundamentalsatz der L-Flächentheorie, welcher ein L-Gegenstück des Fundamentalsatzes (Herrn Thomsens⁽⁴⁾) der konformen Flächentheorie ist, wie der eben zitierte Satz von mir zum Fundamentalsatz (Herrn Blaschkes) der L-Flächentheorie steht. Die Anzahl der Grundformen ist dabei ebenfalls *zwei*: nämlich, die vom dualistischen Gegenstück des L-Bogenelements und die von L-asymptotischen L-Torsen.

1. Ist $lx + my + nz - p = 0$ die Hessesche Normalform der Gleichung einer Ebene, so wird die orientierte Kugel mit Zentrum (A, B, C) und Radius R durch die folgende Gleichung gegeben:

$$lA + mB + nC - p + i \cdot iR = 0.$$

Setzen wir

$$\xi_1 = A, \quad \xi_2 = B, \quad \xi_3 = C, \quad \xi_4 = iR, \quad \bar{\xi}_5 = 1,$$

$$\rho u^1 = l, \quad \rho u^2 = m, \quad \rho u^3 = n, \quad \rho u^4 = i, \quad \rho u^5 = -p,$$

(¹) Dieses Journal, die vorhergehende Abhandlung.

(²) W. Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre, I. Grundformeln der Flächentheorie. Abhandl. aus dem math. Sem. der Hamburgischen Universität, **3** (1924).

(³) Im folgenden werde ich die Abkürzung "L-" für "Laguerresch" benutzen.

(⁴) G. Thomsen, Über konforme Geometrie I. Grundlagen der konformen Flächentheorie. Abhandl. aus dem math. Sem. der Hamburgischen Universität, **2** (1923).

$\rho > 0$: sonst beliebig,

so sind $(\xi, \bar{\xi}_5)$ die sogenannten L-Kugelkoordinaten und (u) die sogenannten L-Ebenenkoordinaten.

2. Es sei eine allgemeine L-Kugelskongruenz

$$(1) \quad \xi = \xi(u^1, u^2), \quad (\bar{\xi}_5 = 1),$$

$$(2) \quad u = u^1, \quad v = u^2,$$

und eine von den beiden Enveloppenmänten davon

$$(3) \quad u = u(u^1, u^2), \quad ((uu)_4 = 0),$$

gegeben. Man bezeichne im übrigen

$$\frac{\partial u}{\partial u^1} = u_1 = u_u, \quad \text{usw.}$$

Die Koordinaten u seien wie folgt normiert:

$$(4) \quad (uv)_4 = 2,$$

wo v die von u verschiedene gemeinsame orientierte Tangentialebene von den drei orientierten Kugeln $\xi, ((u_n)_4, 0)$ ist. Dabei sind *die orientierten Kugeln* $((u_n)_4, 0)$ *tatsächlich zwei unendlich ferne Kegelschnitte*⁽⁵⁾.

Weiter haben wir

$$(5) \quad (\xi u)_5 = (\xi v)_5 = (uu_k)_4 = (vu_k)_4 = -(uv_k)_4 = (\xi u_k)_5 = -(\xi_k u)_4 = 0.$$

Dabei ist die fünfte Komponente von ξ als

$$(6) \quad \bar{\xi}_5 = 1$$

(5) Der Kugelkomplex $(u_k)_5$ hat die Gleichung:

$$\frac{(u_k \xi)_4 + u_{k5} \bar{\xi}_5}{\sqrt{(u_k u_k)_4}} = 0.$$

Er ist geometrisch wie folgt charakterisiert: er besteht aus dem Inbegriff der orientierten Kugeln, die die feste orientierte Ebene

$$\frac{(u_k \xi)_3 + u_{k5}}{\sqrt{(u_k u_k)_3}} = 0$$

unter dem konstanten Neigungswinkel $\cos^{-1} \left[-\frac{i u_{k4}}{\sqrt{(u_k u_k)_3}} \right]$ schneiden. Im euklidischen R_4 repräsentiert $(u_k)_4$ (bei der Minimalprojektion) eine orientierte Hyperebene.

anzusehen.

3. Ableitungsgleichungen fürs Grundvektorensystem ξ, u_h, v . Wir wollen als die Grundform der Tensorrechnung die folgende aufnehmen:

$$(7) \quad G_{hk} du^h du^k,$$

worin

$$(8) \quad G_{hk} = (u_h u_k)_4 = G_{kh}$$

gesetzt ist. Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(9) \quad \begin{aligned} G &= G_{11} G_{22} - G_{12}^2, \quad G^{hk} = E^{hp} E^{kq} G_{pq}, \\ E^{11} &= 0, \quad E^{12} = G^{-\frac{1}{2}} = -E^{21}, \quad E^{22} = 0, \\ E_{11} &= 0, \quad E_{12} = G^{\frac{1}{2}} = -E_{21}, \quad E_{22} = 0, \\ A_{hk} &= (u_h v_k)_4 = -(v_k u_h)_4 = -(u_{hk} v)_4 = A_{kh}, \quad A = A_{11} A_{22} - A_{12}^2, \\ D_{hk} &= -(u_h \xi_k)_4 = (u \xi_{hk})_4 = D_{kh}, \quad D = D_{11} D_{22} - D_{12}^2, \\ M_r &= -(v \xi_r)_4. \end{aligned}$$

Dann gelten die folgenden Ableitungsgleichungen:

$$(10) \quad \begin{aligned} u_{hk} &= -\frac{1}{2} A_{hk} u + D_{hk} \Xi - \frac{1}{2} G_{hk} v, \\ \xi_r &= -\frac{1}{2} M_r u - D_r^s u_s, \\ v_r &= A_r^s u_s + M_r \Xi, \\ \Xi &= 0, 0, 0, 0, 1; \quad \xi_s = -\frac{1}{2} \{(\xi \xi)_4 - 1\}; \quad u_{s,h} = -(\xi u_h)_4 \end{aligned}$$

für die fünf Komponenten. *Invariant* ist (10) gegenüber $u^* = \omega \cdot u$.

$(10)_1$ ist eine *L-Verallgemeinerung der Gauss'schen Formel*; $(10)_2$ ist eine *L-Verallgemeinerung der Weingartenschen Formel*.

4. Die Integrabilitätsbedingung von (10). Fundamentalsatz der Theorie von L-Kugelskongruenzen. Die Integrabilitätsbedingungen für

(10) sind invariant geschrieben wie folgt:

$$(11) \quad \begin{aligned} E^{kl}u_{hkl} &= K^G E_{lh} G^{st}u_s, \\ E^{hk}\xi_{hk} &= 0, \quad E^{hk}v_{hk}=0, \end{aligned}$$

worin K^G die Gausssche Krümmung der Form $G_{hk}du^hdu^k$ ist.

Im folgenden berücksichtigen wir weiter

(12)

$$\begin{aligned} E_{hr}E^{kr} &= G^k_h = \begin{cases} 1, & h=k, \\ 0, & h \neq k, \end{cases} \\ \frac{1}{2}E^{hk}E_{hk} &= \frac{1}{2}G^{hk}G_{hk}=1, \\ G_{hkl} &= 0. \end{aligned}$$

Aus (11)₁ folgt:

(13)

$$K^G = \frac{1}{2}G^{hk}A_{hk},$$

(14)

$$0 = E^{kl}A_{hkl},$$

(15)

$$0 = E^{kl}(D_{hkl} - \frac{1}{2}G_{hk}M_l).$$

Aus (11)₂ folgt:

(16)

$$E^{hk}(D_h^s A_{sk} - M_{hk}) = 0,$$

(17)

$$E^{hk}D_{hk}^s + \frac{1}{2}E^{hs}M_h = 0,$$

(18)

$$E^{hk}D_h^s D_{sk} = 0,$$

(19)

$$E^{hk}D_{hv} = 0.$$

(18) und (19) sind Identitäten. (17) ist in (15) enthalten.

Aus $E^{hk}v_{hk}=0$ folgt:

$$(20) \quad E^{hk} A_{hk}^s = 0,$$

$$(21) \quad E^{hk} A_h^s A_{sk} = 0,$$

$$(22) \quad E^{hk} (A_h^s D_{sk} + M_{hk}) = 0,$$

$$(23) \quad E^{hk} G_{hk} = 0.$$

(20) ist in (14) enthalten. (21) und (23) sind Identitäten. (22) ist in (16) enthalten.

Aus (15) und (16) folgt:

$$(24) \quad (E^{hk} M_{hk} =) E^{hk} G^{st} D_{ht} A_{sk} = 2 E^{ts} G^{hk} D_{hstl}.$$

Jetzt können wir wie folgt schliessen:

Fundamentalsatz der Theorie von L-Kugelkongruenzen (eine praktische Formulierung). Sind die drei quadratischen Formen $G_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$, $D_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$ und $A_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$, von denen die erste positiv definit ist, mit den Bedingungen (13), (14) und (24) vorgegeben, dann wird M_i durch (15) gegeben, sodass (10) integrierbar wird. Die L-Kugelkongruenz $\xi(u^1, u^2)$ wird durch Integration von (10) bis auf L-Transformationen eindeutig so bestimmt, dass sie die drei gegebenen Formen zu Grundformen haben.⁽⁶⁾ A_{hk} wird nach (32) durch G_{hk} und D_{hk} allein dargestellt.

Um nun A_{hk} durch G_{hk} und D_{hk} allein darzustellen, führen wir eine neue quadratische Form ein:

$$(25) \quad P_{hk} du^h du^k,$$

worin

$$(26) \quad P_{hk} = E_{hr} \cdot D_k^r, \quad P^{hk} = \frac{G}{P} E^{pk} D_p^h = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial P_{hk}}$$

gesetzt ist.

Weiter bemerken wir eine Reihe von Identitäten:

⁽⁶⁾ Wir beweisen diesen wie üblich (vgl. etwa W. Blaschke, Differentialgeometrie, II, §§ 50-51.) Dabei ist der Fall $D^2 = G\mathcal{G} = 0$ ($\mathcal{G} = \mathcal{G}_{11}\mathcal{G}_{22} - \mathcal{G}_{12}^2$, $\mathcal{G}_{hk} = \xi_h \xi_k$) von L-Krümmungskugelkongruenzen ausgeschlossen.

$$(27) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{1}{2} G^{hk} G_{hk} = 1, \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{2} D^{hk} D_{hk} = 1, \\ \text{(c)} & \frac{1}{2} E^{hk} E_{hk} = 1, \quad \text{(d)} \quad \frac{1}{2} P^{hk} P_{hk} = 1; \end{array}$$

(28)

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & G^{hk} P_{hk} = 0 = P^{hk} G_{hk}, \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{2} G^{hk} D_{hk} = H = \frac{1}{2} \frac{D}{G} D^{hk} G_{hk}, \\ \text{(c)} & P^{hk} D_{hk} = 0 = D^{hk} P_{hk}, \quad \text{(d)} \quad E^{hk} G_{hk} = 0 = G^{hk} E_{hk}, \\ \text{(e)} & E^{hk} P_{hk} = 0 = P^{hk} E_{hk}, \quad \text{(f)} \quad E^{hk} D_{hk} = 0 = D^{hk} E_{hk}, \end{array}$$

$$(29) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \frac{1}{2} G^{hk} A_{hk} = K^G, \\ \text{(b)} & \frac{1}{2} D^{hk} A_{hk} = L. \quad (\text{Wir setzen bloss so!}) \\ \text{(c)} & P^{hk} A_{hk} = \frac{G}{P} E^{kl} M_{kl} = 2 \frac{G}{P} E^{ls} G^{hk} D_{hslk}. \end{array}$$

Um nun (29) (c) zu beweisen, benutzen wir (24) und (26):

$$P^{hk} A_{hk} = \frac{G}{P} E^{pk} D_p^h A_{hk} = \frac{G}{P} E^{pk} G^{ht} D_{pt} A_{hk} = 2 \frac{G}{P} E^{ls} G^{hk} D_{hslk}.$$

Multipliziert man in der Determinante $|G_{11} D_{12} P_{22}|$, die erste, zweite und die dritte Kolonnen (oder Zeilen) mit $\frac{1}{2} P^{11}$, P^2 bzw. $\frac{1}{2} P^{22}$ und addiert zu den dritten, so folgt:

$$\frac{1}{P^{22}} \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ D_{11} & D_{12} & 0 \\ P_{11} & P_{12} & 1 \end{vmatrix} = P G^{\frac{1}{2}} \neq 0,$$

woraus folgt die lineare Unabhängigkeit von G_{hk} , D_{hk} und P_{hk} . Folglich läßt A_{hk} durch G_{hk} , D_{hk} und P_{hk} sich linear kombinieren, etwa:

$$(30) \quad A_{hk} = \frac{1}{2}[\alpha G_{hk} + \beta D_{hk} + \gamma P_{hk}].$$

Multipliziert man (30) mit $\frac{1}{2}G^{hk}$, $\frac{1}{2}D^{hk}$ bzw. $\frac{1}{2}P^{hk}$, so folgt:

$$\alpha\left(1 - \frac{G}{D}H^2\right) = 2(K^G - H \cdot L),$$

$$\beta\left(1 - \frac{G}{D}H^2\right) = 2\left(L - \frac{G}{D}H \cdot K^G\right),$$

$$\gamma = P^{hk}A_{hk} = 2\frac{G}{D}E^{ts}G^{hk}D_{hstl}.$$

Dem Falle $1 - H^2GD^{-1} = 0$ entsprechen Kugeln $\xi = \text{konst.}$ Deshalb:

$$(31) \quad A_{hk} = \frac{K^G - H \cdot L}{1 - \frac{G}{D}H^2}G_{hk} + \frac{L - \frac{G}{D}H \cdot K^G}{1 - \frac{G}{D}H^2}D_{hk} + \left(\frac{G}{P}E^{ts}G^{pq}D_{pstq}\right) \cdot P_{hk},$$

oder

$$(32) \quad \boxed{A_{hk} = L \cdot \Psi_{hk} + \Phi_{hk}},$$

worin

$$(33) \quad \boxed{\begin{aligned} \Psi_{hk} &= \frac{D_{hk} - H \cdot G_{hk}}{1 - \frac{G}{D}H^2}, \\ \Phi_{hk} &= \frac{G_{hk} - \frac{G}{D}H \cdot D_{hk}}{1 - \frac{G}{D}H^2}K^G + \frac{G}{P}E^{ts}G^{pq}D_{pstq}P_{hk} \end{aligned}}$$

gesetzt ist.⁽⁷⁾

Abgesehen von L sind nun alle vorkommenden Grössen durch G_{hk}

$$\begin{aligned} (7) \quad \mathbf{N. B.} \quad \frac{1}{2}D^{hk}\Psi_{hk} &= 1, \quad \frac{1}{2}G^{hk}\Psi_{hk} = 0, \quad \frac{1}{2}P^{hk}\Psi_{hk} = 0, \quad \Psi = \left(1 - H^2\frac{G}{D}\right)^{-2} G \neq 0, \\ \frac{1}{2}D^{hk}\Psi_{hk} &= 0, \quad \frac{1}{2}G^{hk}\Psi_{hk} = K^G, \quad \frac{1}{2}P^{hk}\Psi_{hk} = \frac{G}{P}E^{ts}G^{hk}D_{hstl}. \end{aligned}$$

und D_{hk} allein darstellbar. Um nun L durch G_{hk} und D_{hk} allein darzustellen, setzen wir (32) in (14) ein:

$$(34) \quad E^{kl} A_{hkl} = E^{kl} \Psi_{hk} L_l + E^{kl} \Psi_{hkl} + E^{kl} \Phi_{hkl} = 0.$$

Wir führen nun die folgende Bezeichnung ein:

$$(35) \quad \Psi = \Psi_{11} \Psi_{22} - \Psi_{12}^2, \quad \Psi^{hk} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi_{hk}},$$

dann gilt:

$$(36) \quad \frac{1}{2} \Psi^{hk} \Psi_{hk} = 1, \quad \Psi^{rs} \Psi_{hs} = \begin{cases} 1, & r = s, \\ 0, & r \neq s. \end{cases}$$

Multipliziert man (34) zuerst mit Ψ^{hp} und dann mit E_{pq} , so folgt:

$$(37) \quad L_q + U_q L + V_q = 0,$$

worin

$$(38) \quad \begin{aligned} U_q &= E^{kl} E_{pq} \Psi^{hp} \Psi_{hkl}, \\ V_q &= E^{kl} E_{pq} \Psi^{hp} \Psi_{hkl} \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Differenziert man (37) nach p kovariant ab und benutzt man (37), so folgt:

$$(39) \quad L_{qp} - U_q (U_p L + V_p) + U_{qp} L + V_{qp} = 0.$$

Transformiert man die Integrabilitätsbedingung

$$(40) \quad E^{qp} L_{qp} = 0$$

von (37) mittels (39), so erhält man:

$$(41) \quad E^{qp} U_{qp} \cdot L + E^{qp} (-U_q V_p + V_{qp}) = 0.$$

A) Ist

$$(42) \quad E^{qp} U_{qp} \neq 0,$$

so lässt sich L durch (41) ohne Integration bestimmen.

Setzt man L aus (41) in (37) ein, so folgt:

$$(43) \quad \begin{vmatrix} E^{rs}(U_{rsq} - U_{rs}U_q) & E^{rs}U_{rs} \\ E^{rs}\{U_{rs}V_q + (U_rV_s)_q - V_{rsq}\} & E^{rs}(U_rV_s - V_{rs}) \end{vmatrix} = 0.$$

B) Ist dagegen

$$(44) \quad E^{qp} U_{qp} = 0,$$

so wird (40)=(41) zu:

$$(45) \quad E^{qp}(U_q V_p - V_{qp}) = 0.$$

In diesem Falle lässt sich L durch die integrierbaren Differentialgleichung (37) bis auf eine Integrationskonstante durch Integration bestimmen. Hiermit haben wir nach dem letzten Satz den folgenden

Fundamentalsatz der Theorie von L-Kugelskongruenzen (präzisere Auffassung). Sind die zwei quadratischen Formen $G_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$ und $D_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$, von denen die erste positiv definit ist, so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichungen (43) gelten, so existieren für (42) stets L-Kugelskongruenzen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf L-Transformationen eindeutig bestimmt.⁽⁸⁾ Es gibt im Falle (44) eine ein-parametrische Schar wesentlich verschiedener L-Kugelskongruenzen, wobei alle L-Kugelskongruenzen dieselben Grundformen haben. Der Umnormierung $u^* = \omega \cdot u$ entspricht dabei $D_{hk}^* = \omega \cdot D_{hk}$.

Dieser Satz ist eine L-Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der gewöhnlichen dualistischen L-Flächentheorie.

(⁸) Dabei ist der Fall $D=0$ von L-Krümmungskugelskongruenzen ausgeschlossen.

5. Fundamentalsatz der L-Flächentheorie.⁽⁹⁾ Es seien $\kappa^{(1)}$ und $\kappa^{(2)}$ die beiden orientierten Krümmungskugeln an u . Setzen wir

$$(46) \quad \xi_n = \kappa_n^{(m)} + (-1)^m u_n, \quad n=1, 2, 3, 4; \quad m=1, 2; \quad \bar{\xi}_5=1,$$

so sind $(\xi_n, \bar{\xi}_5)$ die zuerst von Herrn Blaschke (loc. cit.) eingeführten sogenannten *Mittenkugeln*. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine *L-Kugelkongruenz* $\xi(u^1, u^2)$ eine *Mittenkugelkongruenz* sei, besteht darin, dass

$$(47) \quad H = \frac{1}{2} G^{hk} D_{hk} = 0$$

gilt.

In diesem Falle der Bedingung $H=0$ entsprechend werden die verschiedenen Formeln vom Art. 4 einfacher. Besonders wird der Satz vom Art. 4 zu:

Fundamentalsatz der L-Flächentheorie. Sind die zwei quadratischen Formen $\hat{G}_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$ und $\hat{D}_{hk}(u^1, u^2) du^h du^k$, von denen die erste positiv definit ist, so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen (47) und die Differentialgleichungen

$$(48) \quad \begin{vmatrix} \hat{E}^{rs}(\hat{U}_{rsq} - \hat{U}_{rs}\hat{U}_q) & \hat{E}^{rs}\hat{U}_{rs} \\ \hat{E}^{rs}\{\hat{U}_{rs}\hat{V}_q + (\hat{U}_r\hat{V}_s)_q - \hat{V}_{rsq}\} & \hat{E}^{rs}(\hat{U}_s\hat{V}_s - \hat{V}_{rs}) \end{vmatrix} = 0$$

gelten, so existieren für $\hat{E}^{ap}\hat{U}_{ap} \neq 0$ stets *L-Mittenkugelkongruenzen*, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf *L-Transformationen* eindeutig bestimmt. Es gibt im Falle $\hat{E}^{ap}\hat{U}_{ap}=0$ eine einparametrische Schar wesentlich verschiedener *L-Mittenkugelkongruenzen* mit dualistischen isothermen sphärischen Abbild der Krümmungs-*L-Torsen*, wobei alle *L-Mittenkugelkongruenzen* dieselben Grundformen haben.

Der mit * bezeichnete Teil beweist sich aus der Formel

⁽⁹⁾ L-Gegenstück des Fundamentalsatzes (Herrn Thomsens) der konformen Flächentheorie. Loc. cit.

$$(48) \quad \hat{E}^{qp} \hat{U}_{qp} = - \frac{1}{\sqrt{\hat{G}_{11} \hat{G}_{22}}} \frac{\varepsilon^2 \log \frac{\hat{G}_{11}}{\hat{G}_{22}}}{\partial u \partial v} = 0,$$

die bei den Krümmungs-L-Torsenparametern u, v entsteht.

Dabei stellt das Zeichen $\wedge$ diejenigen Grössen, die für die Mittenkugelskongruenzen aus den entsprechenden allgemeineren Grössen entstehen.

Dieser Satz stimmt, wegen der eigenartigen Beziehung $\hat{G}_{hk} = \hat{\mathcal{G}}_{hk}$ der Mittenkugelskongruenzen, mit dem Blaschkesehen (diese Abhandl., Abschnitt IV, Art. 6) im Wesen überein.

Mathematisches Institut, kaiserliche Tōhoku Universität, Sendai.

Den 20. Dezember, 1927.