8. *Eilinen mit geraden Schwerlinien,*

Von Soji NAKAJIMA.

(Eingegangen am 19. Januar, 1928.)

Wir betrachten zu einer Kurve $\mathfrak{r}(s)$, die auf den Affinbogen s als Parameter bezogen ist, alle Sehnen, die von der Kurve ein Segment vom Flächeninhalt δ abschneiden.

Diese Sehnen umhüllen dann eine zweite Kurve $\bar{\mathfrak{r}}$. Wir ordnen jedem Punkt von $\bar{\mathfrak{r}}$, denjenigen Punkt von $\mathfrak{r}$ zu, in dem die Tangente zu derjenigen von $\bar{\mathfrak{r}}$ parallel ist, sodass also

$$(1) \quad (\bar{\mathfrak{r}}', \mathfrak{r}') = 0$$

ist. Da je zwei konsekutive Sehnen die feste Fläche δ von $\mathfrak{r}$ abschneiden sollen, so schneiden sie sich im Mittelpunkt der Sehnen, d. h. die Berührungspunkte der Kurve $\bar{\mathfrak{r}}$ sind die Mittelpunkte der Sehnen.

Die Punkte $\bar{\mathfrak{r}}$ liegen also auf den sogenannten Schwerlinien von $\mathfrak{r}$.

Die Affinnormalen sind nun bekanntlich nach Blaschke die Tangenten an die Schwerlinien im Anfangspunkt der Schwerlinien.

Die Schwerlinien sollen nun *gerade* sein, d. h. die Punkte $\bar{\mathfrak{r}}$ liegen bei (1) stets für jedes keine δ auf den Affinnormalen ($\mathfrak{r}''$); es gilt also eine Gleichung von der Form

$$(2) \quad \bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + p\mathfrak{r}''.$$

Nun ist, wenn k die Affinkrümmung von $\mathfrak{r}$ bedeutet, bekanntlich

$$(3) \quad \mathfrak{r}''' + k\mathfrak{r}' = 0.$$

Wegen (1) und (3) folgt aber bei Differentiation von (2)

$$(4) \quad p = \text{konst.}$$

Dann aber heisst die Kurve $\bar{\mathfrak{r}}$ zu $\mathfrak{r}$ *affinparallel*.

Wenn wir jetzt zeigen können, dass umgekehrt auch $\mathfrak{r}$ zu $\bar{\mathfrak{r}}$ affinparallel ist, so müssen nach einem Satze von W. Süss⁽¹⁾ beide

(¹) Proceed. Imp. Acad. Tokyo, **2**, (1926) Nr. 3.

Kurven $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ Kegelschnitte sein, und wir erhalten den Satz:

Die Kegelschnitte sind die einzigen Kurven mit geraden Schwerlinien.

Zum Beweis unserer Behauptung üben wir auf die Kurve $\mathfrak{r}(s)$ eine flächentreue Affinität aus, sodass der Vektor $\mathfrak{r}''$ der Affinnormale in dem Punkte $s=s_0$ in die Richtung des Einheitsvektors der gewöhnlichen Normalen ξ fällt,

$$(5) \quad \mathfrak{r}_0' \mathfrak{r}_0'' = 0 = (\xi_0, \mathfrak{r}_0'').$$

Wir behaupten dann zunächst, dass in diesem Punkte $s=s_0$ für die gewöhnliche Krümmung $K=1/\rho$ die Gleichung gilt

$$(6) \quad K_0' = K'(s_0) = 0,$$

d. h. dass K dort stationär ist. Denn bekanntlich gilt für den gewöhnlichen Krümmungsradius ρ , wenn man die Affinlänge als Kurvenparameter wählt⁽²⁾, nach B II, S. 32 (152)

$$(7) \quad \mathfrak{r}'^2 = \rho^{\frac{2}{3}}.$$

Aus (5) und (7) folgt aber (6). Nun folgt wegen (6), wenn wir mit σ die gewöhnliche Bogenlänge bezeichnen, die folgende kanonische Darstellung⁽³⁾

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = \sigma - \frac{\sigma^3}{6\rho_0^2} + [4], \\ x_2 = \frac{\sigma^2}{2\rho_0} + [4]; \end{cases}$$

hierbei bezeichnet [4] Glieder von mindestens vierter Ordnung in σ und es ist angenommen, dass der Punkt $s=s_0$ mit dem Punkte $\sigma=0$ zusammenfällt.

Machen wir nun den Ansatz

$$x_2 = A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + A_4 x_1^4 + \dots,$$

und setzen wir hier die Reihen (8) ein, so folgt durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von σ

⁽²⁾ B bedeutet: W. Blaschke: Differentialgeometrie, Berlin 1923.

⁽³⁾ B I, S. 12 (77).

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_2 = \frac{1}{2\rho_0}, \quad A_3 = 0, \\ x_2 = \frac{x_1^2}{2\rho_0} + [4]. \end{array} \right.$$

Andererseits ist nach B II, S. 35 (160):

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = s - \frac{k_0}{3!} s^3 - \frac{k_1}{4!} s^4 + \frac{k_0^2 - k_2}{5!} s^5 + \frac{4k_0k_1 - k_3}{6!} s^6 + \dots, \\ x_2 = \frac{s^2}{2!} - \frac{k_0}{4!} s^4 - \frac{2k_1}{5!} s^5 + \frac{k_0^2 - 3k_2}{6!} s^6 + \dots, \\ k_n = \left(\frac{d^n k}{ds^n} \right)_{s=0} \quad s_0 = 0. \end{array} \right.$$

Also ist

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1'' = -k_0 s - \frac{k_1}{2} s^2 + \dots \\ x_2'' = -\frac{k_0}{2} s^2 + \dots \end{array} \right.$$

und es folgt

$$(11) \quad x_2'' = -\frac{k_0}{2} x_1^2 + \dots$$

Aus (2), (10) und (11) folgt nun

$$(12) \quad \bar{x}_2 = \frac{x_1^2}{2} \left[\frac{1}{\rho_0} - pk_0 \right] + \dots$$

Es ist also

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{x}_2)_s = x_1 x_1' \left[\frac{1}{\rho_0} - pk_0 \right] + \dots \\ (\bar{x}_2)_{ss} = [x_1 x_1'' + x_1^2 \left[\frac{1}{\rho_0} - pk_0 \right]] + \dots \end{array} \right.$$

Berechnet man nun hierin für alle $x_i^{(k)}$ die im Punkte $s=0$ ($\sigma=0$) gültigen Reihenentwicklungen nach Potenzen von x , so erhält man eine Darstellung von

$$(14) \quad \bar{x}_2'' = \frac{d^2 \bar{x}_2}{ds^2} = \beta_0 + \beta_2 x_1^2 + \dots$$

Dann aber fällt $\bar{\mathfrak{r}}'$ tatsächlich für $x_1 = 0$ in die Richtung der x_2 -Achse, d. h. in die Richtung der Affinnormale von $\mathfrak{r}$ selbst,

w. z. b. w.

November, 1927.