8. Über die Gültigkeitsbedingung der Interpolationsformeln, II.

Von
Shin-ichi IZUMI.

(Eingegangen am 3. Dezember, 1928.)

Der Zweck dieser Arbeit ist zu verbessern einige Resultaten in meiner Arbeit: Über die Gültigkeitsbedingung der Interpolationsformeln, dieses Journal, 5, S. 23–38.

1. **Lemma 1.** *Ist die verallgemeinerte Newtonsche Interpolationsreihe:*

$$(A) \quad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_s)}{z_1 z_2 \dots z_s}$$

konvergent für $z=z_0$ ($z_0 \neq z_s$, $s=1, 2, \dots$), wo (z_s) reell und $z_s \rightarrow \infty$ sind, so ist (A) gleichmäßig konvergent in irgendeinem geschlossenen Bereich, welcher ganz in dem folgenden Bereich liegt:

$$(1) \quad |\arg(z-z_0)| < \frac{\pi}{2}.$$

Dies ist ein spezieller Fall von meinem Satz⁽¹⁾.

Lemma 2. *Ist die verallgemeinerte Stirlingsche Interpolationsreihe:*

$$(B) \quad \sum_{s=0}^{\infty} a_s z(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)\dots(z^2-z_s^2)$$

konvergent für $z=z_0$ ($z_0 \neq z_s$, $s=1, 2, \dots$), wo (z_s) reell und $z_s \rightarrow \infty$ sind, so ist (B) gleichmäßig konvergent in irgendeinem endlichen geschlossenen Bereich.

Dies folgt aus Lemma 1. Denn (B) ist gleichmäßig konvergent in dem Bereich (1). Wenn man (B) durch $z=-\zeta$ transformiert, so ist (B) gleichmäßig konvergent in dem Bereich:

$$|\arg(-z-z_0)| < \frac{\pi}{2}.$$

So ist (B) gleichmäßig konvergent in irgendeinem endlichen geschlossenen Bereich, w.z.b.w.

2. **Lemma 3.** *Ist die verallgemeinerte Newtonsche Interpolationsreihe:*

⁽¹⁾ Izumi: dies Journal, 5 (1928).

$$(A') \quad \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_s)}{z_1 z_2 \dots z_s}$$

konvergent für $z=z_0$ ($z_0 \neq z_s$, $s=1, 2, \dots$), wo

$$|\arg z_s| \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad z_s \rightarrow \infty,$$

so ist (A') gleichmässig konvergent in irgendeinem geschlossenen Bereich, welcher ganz in dem folgenden Bereich liegt:

$$|\arg(z-z_0)| < \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Dies war in meiner Arbeit bewiesen⁽²⁾.

Als die unmittelbare Folgerung erhält man

Lemma 4. Ist die verallgemeinerte Stirlingsche Interpolationsreihe:

$$(B') \quad \sum_{s=0}^{\infty} a_s z(z^2-z_1^2)(z^2-z_2^2)\dots(z^2-z_s^2)$$

konvergent für $z=z_0$ ($z_0 \neq z_s$, $s=1, 2, \dots$), wo

$$|\arg z_s| \leq \varphi < \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad z_s \rightarrow \infty,$$

so ist (B') gleichmässig konvergent in irgendeinem endlichen geschlossenen Bereich.

3. Nun wollen wir einige Resultaten in I verallgemeinern. Ich habe bewiesen dass:

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion und $M(\rho)$ das Maximum von $|f(z)|$ im Kreise $|z| \leq \rho$. Es sei die Zahlenfolge (z_s) reell, positiv und unendlich wachsend, ferner sei $\pi(n)$ die Anzahl von z_s kleiner als n . Gibt es dann $\rho(\rho > s)$ von der Art dass

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho \cdot M(\rho)}{\varphi(s) \cdot e^{\psi(\rho, s)}} = 0,$$

wo

$$(2) \quad \varphi(s) = \left(\pi(s) \cdot s^2 - 2 \int_0^s x \pi(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(3) \quad \psi(\rho, s) = 2\rho^2 \cdot \int_0^s \frac{\pi(x)}{x(\rho^2 - x^2)} dx + \pi(s) \cdot \log \frac{\rho^2 - s^2}{s^2},$$

so ist $f(z)$ durch die Reihe (B) in dem Gebiete:

⁽²⁾ Izumi: loc. cit.

$$|\arg z| < \frac{\pi}{4}$$

darstellbar⁽³⁾.

Wendet man jetzt Lemma 2 an, so erhält man den

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Gibt es $\rho(\rho > s)$ von der Art dass*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\rho \cdot M(\rho)}{\varphi(s) \cdot e^{\psi(\rho, s)}} = 0,$$

wo $\varphi(s)$ bzw. $\psi(\rho, s)$ durch (2) bzw. (3) definiert sind, so ist $f(z)$ durch die verallgemeinerte Stirlingsche Reihe (B) darstellbar.

4. Es sei z_s reell oder komplex und liege in dem Gebiete:

$$|\arg z_s| < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Ferner sei $\pi(x)$ die Anzahl des Absolutbetrags von z_s kleiner als x . So kann man behaupten dass⁽⁴⁾:

Gilt es für passend gewähltes $\rho(\rho > s)$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{M(\rho)}{e^{\varphi(\rho, s)}} = 0,$$

wo

$$(4) \quad \varphi(\rho, s) = 2\rho^2 \int_0^s \frac{\pi(x) dx}{x(\rho^2 - x^2)} + \pi(s) \log \frac{\rho^2 - s^2}{s^2},$$

dann ist $f(z)$ durch die Reihe (B') in dem Gebiete:

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi$$

darstellbar.

Wendet man Lemma 4 an, so erhält man den

Satz 2. *Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Ist z_s reell oder komplex und liegt in dem Gebiete*

$$|\arg z_s| < \varphi < \frac{\pi}{4},$$

und gibt es $\rho(\rho > s)$ von der Art dass

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{M(\rho)}{e^{\varphi(\rho, s)}} = 0,$$

wo $\varphi(\rho, s)$ durch (4) definiert ist, dann ist $f(z)$ durch die verallgemeinerte Stirlingsche Reihe (B') darstellbar.

(3) Izumi: I.

(4) Man kann dies so wie Satz 7 (in I) beweisen.