10. Über das Verhalten der Folge der Integralsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von Mitio NAGUMO.

(Eingegangen am 28. Juli, 1928.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung des Verhaltens der Folge der Integralsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen in normaler Form

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i \left(t, x, \overset{n}{\varphi}(t) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)^{(1)},$$

wobei die Folge der Integrale von Funktionensystemen $\left\{ \overset{n}{\varphi}(t) \right\}_{(1,\lambda)}$ konvergiert, während die Folge der Funktionensysteme selbst nicht notwendig konvergiert. Dabei ist die Stetigkeit der Funktionen nicht vorausgesetzt. Hier verstehen wir unter Integralsystemen dieser Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen $\overset{n}{x}_i(t_0) = \overset{n}{\xi}_i$ die Funktionensysteme $\left\{ \overset{n}{x}(t) \right\}_{(1,k)}$, die den Gleichungssystemen

$$\overset{n}{x}_i(t) = \overset{n}{\xi}_i + \int_{t_0}^t f_i \left(t, \overset{n}{x}(t), \overset{n}{\varphi}(t) \right) dt \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

genügen, wobei die Integrale im Sinne von C. de la Vallée-Poussin verstanden werden. Für die Existenz solcher Funktionensysteme ist es hinreichend, dass die Funktionen $f_i \left(t, \overset{n}{x}, \overset{n}{\varphi} \right)_{(1,k)}$ als Funktionen von t für jedes feste $\left(\overset{n}{x}, \overset{n}{\varphi} \right)_{(1,k)}$ messbar und als Funktionen von $\left(\overset{n}{x}, \overset{n}{\varphi} \right)_{(1,k)}$ für jedes feste t fast überall in $\langle a, b \rangle$ stetig sind, und dass die Ungleichungen

$$\left| f_i \left(t, \overset{n}{x}, \overset{n}{\varphi}(t) \right) \right| \leq \Phi_n(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

für alle $\left(\overset{n}{x} \right)_{(1,k)}$ gelten, wobei $\Phi_n(t)$ in $\langle a, b \rangle$ summierbar sind⁽²⁾.

(¹) Die Bezeichnung α bedeutet die Buchstabenfolge $a_1, a_2, \dots, a_\nu$. Z. B. $\overset{n}{\varphi}(t)_{(1,\nu)}$ bedeutet die Folge $\overset{n}{\varphi}_1(t), \overset{n}{\varphi}_2(t), \dots, \overset{n}{\varphi}_\nu(t)$.

(²) Man vergleiche dazu; Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, 665-672.

Der Kürze halber bezeichnen wir im folgenden mit $\bar{B}_i$ den Bereich $a \leq t \leq b, |x_i - \xi_i| \leq l, -\infty < \varphi_\mu < \infty$ und mit B_i den Bereich $a \leq t \leq b, |x_i - \xi_i| \leq l$.

§ 1.

Hilfssatz 1. Es seien Differentialgleichungssysteme

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i\left(t, x_{(1,k)}\right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und

$$(2) \quad \frac{dy_i}{dt} = F_i\left(t, y_{(1,k)}\right) + G_i\left(t, y_{(1,k)}\right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

vorgelegt. In B_i gelten die Ungleichungen

$$(3) \quad \left| F_i\left(t, x_{(1,k)}^*\right) - F_i\left(t, x_{(1,k)}\right) \right| \leq \Psi(t) \sum_{j=1}^k |x_j^* - x_j| \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

wobei $\Psi(t)$ eine in $\langle a, b \rangle$ summierbare Funktion ist. Es seien $\{x_{(1,k)}(t)\}$ und $\{y_{(1,k)}(t)\}$ die in B_i liegenden Integralsysteme von (1) bzw. (2) mit denselben Anfangsbedingungen $x_i(t_0) = y_i(t_0) = \xi'_i (a \leq t_0 < b, |\xi'_i - \xi_i| < l)$, wobei auch die Bedingung

$$(4) \quad \left| G_i\left(t, y_{(1,k)}(t)\right) \right| \leq A(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

erfüllt ist. Wir haben dann die Abschätzungsformel

$$\sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k \int_{t_0}^t A(\tau) e^{k \int_{\tau}^t \Psi(u) du} d\tau$$

für $t \geq t_0$.

Beweis: Aus (1) und (2) erhält man für $t \geq t_0$

$$\left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq \int_{t_0}^t \left| G_i\left(t, y_{(1,k)}\right) \right| dt + \int_{t_0}^t \left| F_i\left(t, y_{(1,k)}\right) - F_i\left(t, x_{(1,k)}\right) \right| dt$$

$$(i=1, 2, 3, \dots, k),$$

also nach (4) und (3), indem man die beiden Seiten obiger Ungleichungen nach i von 1 bis k summiert,

$$(5) \quad \sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k \left\{ \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \sum_{i=1}^k \left| y_i(\tau) - x_i(\tau) \right| d\tau \right\}.$$

Definiert man die Funktionenfolge $B_n(t)$ durch

$$(6) \quad \begin{cases} B_0(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau, \\ B_n(t) = \int_{t_0}^t \Psi(\tau) B_{n-1}(\tau) d\tau \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

so erhält man aus (5)

$$(7) \quad \sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k \left\{ \sum_{\nu=0}^n k^\nu B_\nu(t) + k^n B_{n+1}(t) M \right\},$$

wobei M solche positive Zahl bedeutet, dass

$$\sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq M \quad \text{für } t_0 \leq t \leq b.$$

Aus (6) erhält man aber

$$(8) \quad B_n(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) \frac{\left(\int_{\tau}^t \Psi(u) du \right)^n}{n!} d\tau.$$

Denn, dies ist für $n=0$ selbstverständlich. Setzt man nun voraus, (8) für $n=\nu-1$ richtig sei, so hat man für $n=\nu$

$$\begin{aligned} B_\nu(t) &= \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \left\{ \int_{t_0}^{\tau} A(u) \frac{\left(\int_u^{\tau} \Psi(v) dv \right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} du \right\} d\tau \\ &= \int_{t_0}^t A(u) du \int_u^t \frac{\left(\int_u^{\tau} \Psi(v) dv \right)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \Psi(\tau) d\tau \\ &\quad \text{(nach Dirichletscher Formel)} \\ &= \int_{t_0}^t A(u) du \frac{\left(\int_u^t \Psi(v) dv \right)^\nu}{\nu!} = \int_{t_0}^t A(\tau) \frac{\left(\int_{\tau}^t \Psi(u) du \right)^\nu}{\nu!} d\tau, \end{aligned}$$

womit (8) bewiesen ist. Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k^n B_{n+1}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} k^n \int_{t_0}^t A(\tau) \frac{\left(\int_{\tau}^t \Psi(u) du \right)^{n+1}}{(n+1)!} d\tau = 0$$

ist, so ergibt sich aus (7) und (8) für $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k \int_{t_0}^t A(\tau) e^{\int_{\tau}^t \Psi(u) du} d\tau.$$

Hilfssatz 2. Es seien $\{x(t)\}_{(1,k)}$ und $\{y(t)\}_{(1,k)}$ die in B_t liegenden Integralsysteme von (1) bzw. (2) mit den Anfangsbedingungen

$$x_i(t_0) = \xi_i', \quad y_i(t_0) = \xi_i'',$$

$$|\xi_i' - \xi_i''| \leq \delta \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

wobei die Bedingung (4) durch

$$(9) \quad \left| \int_{t_0}^t G_i(t, y(t)) dt \right| \leq \eta \quad \text{für } t_0 \leq t \leq b$$

ersetzt ist. Dann erhält man für $t_0 \leq t \leq b$

$$\sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k(\delta + \eta) e^{\int_{t_0}^t \Psi(\tau) d\tau}.$$

Beweis: Anstatt (5) erhält man jetzt

$$(10) \quad \sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k \left\{ \delta + \eta + \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \sum_{i=1}^k \left| y_i(\tau) - x_i(\tau) \right| d\tau \right\}.$$

Definiert man nun die Funktionenfolge $\Psi_n(t)$ durch

$$\Psi_0(t) = 1$$

und

$$\Psi_n(t) = \int_{t_0}^t \Psi(\tau) \Psi_{n-1}(\tau) d\tau \quad (n \geq 1),$$

so folgt aus (10)

$$(11) \quad \sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k(\delta + \eta) \sum_{\nu=0}^n k^\nu \Psi_\nu(t) + k^{n+1} \Psi_{n+1}(t) M,$$

wobei M dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 1 hat. Wie man leicht sieht, ist

$$\Psi_\nu(t) = \frac{1}{\nu!} \left(\int_{t_0}^t \Psi(\tau) d\tau \right)^\nu;$$

so ist nach (11) für $t \geq t_0$

$$\sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k(\delta + \eta) e^{k \int_{t_0}^t \Psi(\tau) d\tau}.$$

§ 2.

Satz 1. Bei den Differentialgleichungssystemen

$$(12) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i \left(t, x_{(1,k)} \right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_\mu(t) \cdot g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

seien die Funktionen $g_{i,\mu}$ in B_i stetig und genügen die Funktionen f_i und $g_{i,\mu}$ in B_i den Ungleichungen

$$(13) \quad |f_i| \leq \Psi(t),$$

$$(14) \quad \left| f_i \left(t, x_{(1,k)}^* \right) - f_i \left(t, x_{(1,k)} \right) \right| \leq \Psi(t) \sum_{j=1}^k \left| x_j^* - x_j \right|$$

und

$$(15) \quad \left| g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)}^* \right) - g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)} \right) \right| \leq K \sum_{j=1}^k \left| x_j^* - x_j \right|$$

$$(i=1, 2, \dots, k) \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda),$$

wobei $\Psi(t)$ eine in $\langle a, b \rangle$ summierbare Funktion und K eine Konstante ist.

Die Folge der in $\langle a, b \rangle$ summierbaren Funktionensysteme $\left\{ \varphi_{(1,\lambda)}(t) \right\}$ sei den folgenden Bedingungen unterworfen:

$$(16) \quad \int_a^b \left| \varphi_\mu(t) \right| dt \leq H \quad (H: \text{eine beliebige feste Konstante})$$

und

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \varphi_\mu(t) dt = \int_{t_0}^t \varphi_\mu(t) dt \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda),$$

wobei die Konvergenz gleichmässig ist, so bestehen für die Folge der in B_i liegenden Integralsysteme $\left\{ x_{(1,k)}^n(t) \right\}$ von (12) mit den Anfangsbedingungen

$$(18) \quad x_i(t) = \xi_i^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^n = \xi'_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

im Sinne der gleichmässigen Konvergenz die Gleichungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n(t) = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

für $t \geq t_0$, wobei $\{x(t)\}_{(1,k)}$ das Integralsystem der Differentialgleichungen

$$(19) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_{(1,k)}\right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \cdot g_{i,\mu}\left(t, x_{(1,k)}\right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i(t_0) = \xi'_i$ bedeutet.

Beweis: Zunächst beweisen wir, dass für jedes μ

$$(20) \quad \int_a^b |\varphi_{\mu}(t)| dt \leq H.$$

Jeder positiven Zahl ε können wir eine andere δ zuordnen, sodass für jede messbare Menge M_{δ} in $\langle a, b \rangle$, deren Mass kleiner als δ ist,

$$(a) \quad \int_{M_{\delta}} |\varphi_{\mu}(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

M_+ sei diejenige Menge in $\langle a, b \rangle$, worauf φ_{μ} positiv ist, und M_- sei diejenige, worauf φ_{μ} negativ ist. Wir wählen eine abzählbare Menge der von einander getrennten Intervalle $\{(a_{\nu}, b_{\nu})\}$, deren Vereinigungsmenge die M_+ überdeckt und die Ungleichung

$$(21) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (b_{\nu} - a_{\nu}) < m(M_+) + \frac{\delta}{2} \quad (3)$$

befriedigt, und eine Menge der von einander getrennten Intervalle $\{(a'_{\nu}, b'_{\nu})\}$ in $\langle a, b \rangle$, deren Vereinigungsmenge die M_- überdeckt und die Ungleichung

$$(22) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (b'_{\nu} - a'_{\nu}) < m(M_-) + \frac{\delta}{2}$$

befriedigt. Die Menge der für die beiden Intervallenmengen $\{(a_{\nu}, b_{\nu})\}$ und $\{(a'_{\nu}, b'_{\nu})\}$ gemeinsamen Punkte hat das Mass kleiner als δ . Aus (a), (21) und (22) erhält man

$$\int_{M_+} \varphi_{\mu}(t) dt < \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a_{\nu}}^{b_{\nu}} \varphi_{\mu}(t) dt + \frac{\varepsilon}{4}$$

(3) Mit $m(M)$ bezeichnen wir das Mass der messbaren Menge M .

und

$$-\int_{M_-} \varphi_\mu(t) dt < -\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{a'_\nu}^{b'_\nu} \varphi_\mu(t) dt + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Es gibt also für genügend grosses N

$$(23) \quad \int_{M_+} \varphi_\mu(t) dt < \sum_{\nu=1}^N \int_{a_\nu}^{b_\nu} \varphi_\mu(t) dt + \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$(24) \quad -\int_{M_-} \varphi_\mu(t) dt < -\sum_{\nu=1}^N \int_{a'_\nu}^{b'_\nu} \varphi_\mu(t) dt + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Es sei $\{(a_\nu'', b_\nu'')\}$ ($\nu=1, 2, \dots, N'$) die Menge der von einander getrennten Intervalle, die dadurch entsteht, dass aus jedem Intervalle von $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ und $\{(a'_\nu, b'_\nu)\}$ ($\nu=1, 2, \dots, N$) für je zwei Intervalle gemeinsame Teile ausgestrichen ist. Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^N \int_{a_\nu}^{b_\nu} \varphi_\mu(t) dt - \sum_{\nu=1}^N \int_{a'_\nu}^{b'_\nu} \varphi_\mu(t) dt < \sum_{\nu=1}^{N'} \pm \int_{a_\nu''}^{b_\nu''} \varphi_\mu(t) dt + \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei wir jedem in rechter Seite stehenden Summanden das positive oder negative Zeichen geben, je nachdem (a_ν'', b_ν'') zu einem (a_ν, b_ν) oder zu einem (a'_ν, b'_ν) gehört. Dies mit (23) und (24) ergibt

$$(25) \quad \int_a^b |\varphi_\mu(t)| dt < \sum_{\nu=1}^{N'} \pm \int_{a_\nu''}^{b_\nu''} \varphi_\mu(t) dt + \varepsilon.$$

Aus (16) und (17) erhält man aber

$$\sum_{\nu=1}^{N'} \pm \int_{a_\nu''}^{b_\nu''} \varphi_\mu(t) dt \leq H,$$

also nach (25)

$$\int_a^b |\varphi_\mu(t)| dt < H + \varepsilon.$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, so folgt daraus die Ungleichung (20).

Es sei ε' eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl, so kann man nach t und x in B_i stetig differentiierbare Funktionen $g_{i,\mu}^{*(1,N)}$ derart finden, dass in B_i die Ungleichungen

$$(26) \quad \left| g_{i,\mu}^*(t, x_{(1,k)}) - g_{i,\mu}(t, x_{(1,k)}) \right| < \varepsilon' \\ (i=1, 2, \dots, k) \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

gelten. Nun betrachten wir die Integralsysteme $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ y(t) \\ (1,k) \end{smallmatrix} \right\}$ der Differentialgleichungen

$$(27) \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_{(1,k)}) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \cdot g_{i,\mu}^*(t, y_{(1,k)}) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

oder

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_{(1,k)}) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \left\{ g_{i,\mu}^*(t, y_{(1,k)}) - g_{i,\mu}(t, y_{(1,k)}) \right\} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_i(t_0) = \xi_i'$, wobei $F_i(t, x_{(1,k)})$ die rechten Seiten von (12) bedeuten. Dann ist nach (12), (14) und (15)

$$\left| F_i(t, x_{(1,k)}^*) - F_i(t, x_{(1,k)}) \right| \leq \left\{ \Psi(t) + K \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| \varphi_{\mu}(t) \right| \right\} \sum_{j=1}^k |x_j^* - x_j|,$$

und nach (16) und (26)

$$\int_a^b \left| \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \{ g_{i,\mu}^* - g_{i,\mu} \} \right| dt \leq \lambda \varepsilon' H.$$

Wir bekommen also nach (16) wegen Hilfssatz 2

$$(28) \quad \sum_{i=1}^k |y_i(t) - x_i(t)| \leq k (\delta_n + \lambda \varepsilon' H) e^{k(\lambda KH + H')},$$

wobei $\delta_n = \max_{i=1,2,\dots,k} |\xi_i - \xi_i'|$ und $\int_a^b \Psi(t) dt = H'$ gesetzt sind.

Ebenso hat man für das Integralsystem $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ y(t) \\ (1,k) \end{smallmatrix} \right\}$ der Differentialgleichungen

$$(29) \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_{(1,k)}) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \cdot g_{i,\mu}^*(t, y_{(1,k)}) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_i(t_0) = \xi_i'$ die Ungleichungen

$$(30) \quad \sum_{i=1}^k |y_i(t) - x_i(t)| \leq k \lambda \varepsilon' H e^{k(\lambda KH + H')}.$$

Man setze

$$F_i^*(t, y) = f_i(t, y) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \cdot g_{i,\mu}^*(t, y),$$

so hat man für (27) und (29)

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i^*(t, y) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left\{ \varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\mu}(t) \right\} g_{i,\mu}^*(t, y) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

bzw.

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i^*(t, y) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Jetzt haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left\{ \varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\mu}(t) \right\} \cdot g_{i,\mu}^*(t, y(t)) dt \right| \\ & \leq \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| g_{i,\mu}^*(t, y) \int_{t_0}^t \left\{ \varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\mu}(t) \right\} dt \right| + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| \int_{t_0}^t \frac{\partial g_{i,\mu}^*}{\partial t}(\tau, y(\tau)) d\tau \right. \\ & \times \left. \int_{t_0}^{\tau} \left\{ \varphi_{\mu}(u) - \varphi_{\mu}(u) \right\} du \right| + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_0}^t \frac{\partial g_{i,\mu}^*}{\partial x_j}(\tau, y(\tau)) \frac{dy_j(\tau)}{d\tau} d\tau \right. \\ & \times \left. \int_{t_0}^{\tau} \left\{ \varphi_{\mu}(u) - \varphi_{\mu}(u) \right\} du \right| \leq \lambda \varepsilon_n M_{\varepsilon'} \{1 + (b-a) + k(H' + \lambda M_{\varepsilon'} H)\}, \end{aligned}$$

wobei $M_{\varepsilon'}$ und ε_n solche positive Zahlen bedeuten, dass in B_i

$$|g_{i,\mu}^*| \leq M_{\varepsilon'}, \quad \left| \frac{\partial g_{i,\mu}^*}{\partial t} \right| \leq M_{\varepsilon'}, \quad \left| \frac{\partial g_{i,\mu}^*}{\partial x_j} \right| \leq M_{\varepsilon'}$$

$$(i, j=1, 2, \dots, k) \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

und

$$\left| \int_{t_0}^t \left\{ \varphi_{\mu}(t) - \varphi_{\mu}(t) \right\} dt \right| \leq \varepsilon_n.$$

Dabei gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Nach Hilfssatz 2 haben wir dann

$$(31) \quad \sum_{i=1}^k |y_i(t) - y_i(t)| \leq k \lambda \varepsilon_n G_{\varepsilon'} e^{k(\lambda L H + H')},$$

wobei $G_{\varepsilon'} = M_{\varepsilon'} \{1 + (b-a) + k(H' + \lambda M_{\varepsilon'} H)\}$, $L = \text{Max}(K, M_{\varepsilon'})$ gesetzt ist.

Aus (28), (31) und (30) erhält man also

$$(32) \quad \sum_{i=1}^k |x_i(t) - x_i(t)| \leq k \{ \delta_n + 2 \lambda \varepsilon' H + \lambda \varepsilon_n G_{\varepsilon'} \} e^{k(\lambda L H + H')}.$$

Nun sei ε eine beliebig vorgeschriebene positive Zahl und ε' eine so klein gewählte Zahl, dass

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4k\lambda H e^{k(\lambda L H + H')}}.$$

So können wir N_ε so gross nehmen, dass für alle $n > N_\varepsilon$

$$\delta_n < \frac{\varepsilon}{4k e^{k(\lambda L H + H')}}.$$

und

$$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{4k\lambda G_{\varepsilon'} e^{k(\lambda L H + H')}}.$$

Daraus erhält man nach (32)

$$\sum_{i=1}^k \left| x_i(t) - x_i(t) \right| \leq \varepsilon$$

für $n > N_\varepsilon$. W. z. b. w.

Bemerkung. Besitzen die Funktionen $g_{i,\mu}$ anstatt der Stetigkeit in B_i die folgenden Eigenschaften:

$g_{i,\mu}$ sind in $\langle a, b \rangle$ messbar als Funktionen von t für jedes feste $\begin{pmatrix} x \\ (1,k) \end{pmatrix}$ und stetig als Funktionen von $\begin{pmatrix} x \\ (1,k) \end{pmatrix}$ für jedes feste t fast überall in $\langle a, b \rangle$; $g_{i,\mu}$ genügen auch in B_i den Ungleichungen

$$(33) \quad \left| g_{i,\mu} \left(t, \begin{pmatrix} x \\ (1,k) \end{pmatrix} \right) \right| \leq \Phi(t) \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda),$$

wobei $\Phi(t)$ eine in $\langle a, b \rangle$ summierbare Funktion ist; und das Differentialgleichungssystem (19) lässt nur einziges Integralsystem $\left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ (1,k) \end{pmatrix} \right\}$ zu: so können wir aus den Bedingungen (13), (14), (17), (18) und

$$(16') \quad \left| \varphi_\mu(t) \right| \leq h \quad (h: \text{eine beliebige feste Konstante})$$

dasselbe Resultat wie in Satz 1 erhalten.

Beweis: Aus (13), (33) und (16') erhält man die Ungleichungen

$$(34) \quad \left| f_i \left(t, \begin{pmatrix} x \\ (1,k) \end{pmatrix} \right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_\mu(t) \cdot g_{i,\mu} \left(t, \begin{pmatrix} x \\ (1,k) \end{pmatrix} \right) \right| \leq S(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

in B für alle n , wobei $S(t)$ eine in $\langle a, b \rangle$ summierbare Funktion ist. Aus (16'), (33) und (17) bekommen wir nach dem in meiner früheren

Arbeit „Über die Konvergenz der Integrale usw.“ bewiesenen Satz 3⁽⁴⁾ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left\{ f_i \left(t, x_{(1,k)} \right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}^n(t) \cdot g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)} \right) \right\} dt \\ = \int_{t_0}^t \left\{ f_i \left(t, x_{(1,k)} \right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_{\mu}(t) \cdot g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)} \right) \right\} dt \end{aligned}$$

für jedes feste $\left(x_{(1,k)} \right)$. Dann haben wir nach dem in meiner oben zitierten Arbeit bewiesenen Satz 7⁽⁵⁾ das Bestehen der Gleichungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^n(t) = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

für $t \geq t_0$, wobei die Konvergenz in $\langle t_0, b \rangle$ gleichmässig ist.

§ 3.

Satz 2. Es seien die Funktionen $F_i \left(t, x, \varphi_{(1,k)(1,\lambda)} \right)$ und ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{\mu}}$ und $\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_{\mu} \partial \varphi_{\nu}}$ ($i=1, 2, \dots, k$) ($\mu, \nu=1, 2, \dots, \lambda$) in $\bar{B}_{\infty}$ stetig. F_i genügen auch für $|\varphi_{\mu}| \leq h$ der Lipschitzbedingung

$$(35) \quad \left| F_i \left(t, x_{(1,k)}^*, \varphi_{(1,\lambda)} \right) - F_i \left(t, x_{(1,k)}, \varphi_{(1,\lambda)} \right) \right| \leq K_h \sum_{j=1}^k |x_j^* - x_j| \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

wobei K_h eine nur von h abhängige Konstante bedeutet. Die Funktionensysteme $\left\{ x_{(1,k)}^n(t) \right\}$ und $\left\{ x_{(1,k)}(t) \right\}$ seien die in einem Teilbereiche von B_{∞} liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen

$$(36) \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i \left(t, x_{(1,k)}, \varphi_{(1,\lambda)}^n(t) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

bzw.

$$(37) \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i \left(t, x_{(1,k)}, \varphi_{(1,\lambda)}(t) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i^n(t_0) = \xi_i^n$, $x_i(t_0) = \xi_i'$, wobei $\varphi_{\mu}^n(t)$ und $\varphi_{\mu}(t)$ in $\langle a, b \rangle$ summierbare Funktionen sind. Dann erhält man:

(⁴) Nagumo: Über die Konvergenz der Integrale der Funktionenfolgen und ihre Anwendung auf das gewöhnliche Differentialgleichungssystem. Dies Journal 5 (1928), 111.

(⁵) Nagumo: a. a. O., 119.

Dafür, dass nur aus den Relationen

$$\left| \overset{n}{\varphi}_\mu(t) \right| \leq h, \quad |\varphi_\mu(t)| \leq h, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{\xi}_i = \xi_i' \\ (\mu=1, 2, \dots, \lambda) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \overset{n}{\varphi}_\mu(t) dt = \int_{t_0}^t \varphi_\mu(t) dt \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

im Sinne der gleichmässigen Konvergenz, stets die Gleichungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{x}_i(t) = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad \text{für } t \geq t_0$$

folgen, wobei h eine beliebige feste positive Zahl und $(t_0, \overset{n}{\xi}_i)$ einen beliebigen inneren Punkt von B_∞ bedeutet, ist es notwendig und hinreichend, dass F_i in bezug auf $\left(\overset{n}{\varphi} \right)_{(1,\lambda)}$ linear sind.

Beweis: Dass diese Bedingung hinreichend ist, folgt unmittelbar aus Satz 1. Um die Notwendigkeit der Bedingung zu beweisen, setzen wir

$$(39) \quad \mathcal{E}_i \left(t, x; \overset{n}{\varphi}; \overset{n}{\varphi}^* \right)_{(1,k)(1,\lambda)} = F_i \left(t, x, \overset{n}{\varphi}^* \right)_{(1,k)(1,\lambda)} - F_i \left(t, x, \overset{n}{\varphi} \right)_{(1,k)(1,\lambda)} \\ - \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left(\varphi_\mu^* - \varphi_\mu \right) \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu} \left(t, x, \overset{n}{\varphi} \right)_{(1,k)(1,\lambda)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und betrachten zunächst die Integralsysteme $\overset{n}{y}_i(t)$ der Differentialgleichungen

$$(40) \quad \frac{dy_i}{dt} = F_i \left(t, y, \overset{n}{\varphi}(t) \right)_{(1,k)(1,\lambda)} - \mathcal{E}_i \left(t, y; \overset{n}{\varphi}(t); \overset{n}{\varphi}(t) \right)_{(1,k)(1,\lambda)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

oder

$$(40') \quad \frac{dy_i}{dt} = F_i \left(t, y, \overset{n}{\varphi}(t) \right)_{(1,k)(1,\lambda)} + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left\{ \overset{n}{\varphi}_\mu(t) - \varphi_\mu(t) \right\} \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu} \left(t, y, \overset{n}{\varphi}(t) \right)_{(1,k)(1,\lambda)} \\ (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $\overset{n}{y}_i(t_0) = \overset{n}{\xi}_i$. Man erhält aus (40') und (38), wegen Satz 1 (indem man $\overset{n}{\varphi}(t)$ als stetig voraussetzt),

$$(41) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{y}_i(t) = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Aus (35), (36) und (40) bekommen wir nach Hilfssatz 1

$$(42) \quad \sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k \int_{t_0}^t \bar{\mathcal{E}}_n(\tau) e^{kK_n(t-\tau)} d\tau \quad (t \geq t_0),$$

wobei $\bar{\mathcal{E}}_n(\tau) = \max_{i=1,2,\dots,k} \left| \mathcal{E}_i \left(\tau, \begin{smallmatrix} n \\ (1,k) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix} \right) \right|$ ist. Andererseits haben

$$\begin{aligned} \text{wir} \quad x_i(t) - y_i(t) &= \int_{t_0}^t \mathcal{E}_i \left(t, \begin{smallmatrix} n \\ (1,k) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix} \right) dt \\ &+ \int_{t_0}^t \left\{ F_i \left(t, \begin{smallmatrix} n \\ (1,k) \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix} \right) - F_i \left(t, \begin{smallmatrix} n \\ (1,k) \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix} \right) \right\} dt \quad (i=1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

also nach (42) und (35)

$$x_i(t) - y_i(t) \geq \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{i,n}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t K_n \left\{ k \int_{t_0}^{\tau} \bar{\mathcal{E}}_n(u) e^{kK_n(\tau-u)} du \right\} d\tau,$$

oder

$$(43) \quad x_i(t) - y_i(t) \geq \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{i,n}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \bar{\mathcal{E}}_n(\tau) \{ e^{kK_n(t-\tau)} - 1 \} d\tau \quad \text{für } t \geq t_0,$$

wobei $\mathcal{E}_{i,n}(\tau) = \mathcal{E}_i \left(\tau, \begin{smallmatrix} n \\ (1,k) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix}; \begin{smallmatrix} n \\ (1,\lambda) \end{smallmatrix} \right)$ ist. Ebenso erhält man

$$x_i(t) - y_i(t) \leq \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{i,n}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \bar{\mathcal{E}}_n(\tau) \{ e^{kK_n(t-\tau)} - 1 \} d\tau \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Nun beweisen wir, dass in B_∞ $\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_\mu^2} = 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) ($\mu=1, 2, \dots, \lambda$) sein muss. Wäre dies nicht der Fall, so können wir eine Umgebung U eines inneren Punktes von B_∞ , $|t-t_0| \leq \delta_1$, $|x_i - \xi_i'| \leq \delta_1 G$, $|\varphi_\mu - \varphi_\mu^*| \leq \delta$ (wo G solche Zahl bedeutet, dass in U $|F_i| \leq G$ sind) derart finden, dass in U für mindestens ein i und ein μ , etwa für $i=p$ und $\mu=m$, $\frac{\partial^2 F_p}{\partial \varphi_m^2} \neq 0$ würde. Dabei können wir voraussetzen, dass in U

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial \varphi_m^2} > 0$$

ist⁽⁶⁾, also es eine positive Zahl α gibt, dass in U die Ungleichung

(⁶) Für den Fall $\frac{\partial^2 F_p}{\partial \varphi_m^2} < 0$ ist der Beweis ähnlicherweise durchführbar.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_p}{\partial \varphi_m^2} \geq \alpha$$

besteht. Man kann noch eine positive Zahl β finden, sodass in U für alle i die Ungleichungen

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_m^2} \right| \leq \beta \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

gelten. Nun setzen wir $\varphi_m(t) = \varphi_m^*$, $\varphi_m^n(t) = \varphi_m^* + \delta \sin nt$, $\varphi_\mu(t) = \varphi_\mu^n(t) = \varphi_\mu^*$ falls $\mu \neq m$, so hat man

$$\mathcal{E}_{i,n}(\tau) = \frac{\delta^2}{2} (\sin nt)^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_m^2} \left(t, \underset{(1,k)}{y(t)}, \underset{(1,m-1)}{\varphi^*}, \underset{(m+1,\lambda)}{\tilde{\varphi}_{m,n}(t)}, \varphi^* \right) \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

wobei $\tilde{\varphi}_{m,n}(t)$ die Ungleichungen $\left| \tilde{\varphi}_{m,n}(t) - \varphi_m^* \right| \leq \delta$ befriedigt. Wir haben dann

$$\mathcal{E}_{p,n}(\tau) \geq \alpha \delta^2 \sin^2 n\tau,$$

$$\bar{\mathcal{E}}_n(\tau) \leq \beta \delta^2 \sin^2 n\tau,$$

folglich aus (43)

$$(44) \quad \underset{t_0}{x_p^n(t)} - \underset{t_0}{y_p(t)} \geq \int_{t_0}^t \delta^2 \sin^2 n\tau \{ \alpha - \beta (e^{K_n(t-\tau)} - 1) \} d\tau$$

für $t \geq t_0$. Wählt man nun δ_1 so klein, dass

$$\frac{1}{2} \alpha \geq \beta (e^{K_n \delta_1} - 1),$$

$$\text{also} \quad \alpha - \beta (e^{K_n(t-\tau)} - 1) \geq \frac{1}{2} \alpha \quad \text{für } t_0 \leq \tau \leq t \leq t_0 + \delta_1,$$

so haben wir aus (44) für $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \underset{t_0}{x_p^n(t)} - \underset{t_0}{y_p(t)} \right\} \geq \frac{\alpha}{4} \delta^2 (t - t_0) \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1.$$

Dies mit (41) ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underset{t_0}{x_p^n(t)} \geq \underset{t_0}{x_p(t)} + \frac{\alpha}{4} \delta^2 (t - t_0) \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_1.$$

Die Folge $\underset{t_0}{x_p^n(t)}$ kann also nicht gegen $\underset{t_0}{x_p(t)}$ konvergieren; damit sind die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_\mu^2} = 0$$

in $\bar{B}_\infty$ für alle i und μ bestätigt.

Wir haben jetzt die Gültigkeit der Gleichungen

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_\mu \partial \varphi_\nu} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (\mu \neq \nu) \quad (\mu, \nu=1, 2, \dots, \lambda)$$

zu beweisen. Wäre dies nicht der Fall, z. B. etwa $\frac{\partial^2 F_p}{\partial \varphi_{m_1} \partial \varphi_{m_2}} \neq 0$

in einer Umgebung in $\bar{B}_\infty$, $|t-t_0| \leq \delta_1$, $|x_i - \xi'_i| \leq G\delta_1$, $|\varphi_\mu - \varphi_\mu^*| \leq \delta$, so braucht man nur zu setzen

$$\begin{aligned} \overset{n}{\varphi}_\mu(t) &= \varphi_\mu(t) = \varphi_\mu^* \text{ falls } \mu \neq m_1, m_2; \quad \varphi_{m_1}^* = \varphi_{m_1}(t), \quad \varphi_{m_2}^* = \varphi_{m_2}(t), \\ \overset{n}{\varphi}_{m_1}(t) &= \varphi_{m_1}^* + \delta \sin nt, \quad \overset{n}{\varphi}_{m_2}(t) = \varphi_{m_2}^* + \delta \sin nt, \end{aligned}$$

was aber, ganz analog wie oben, zum Widerspruch mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{x}_i(t) = x_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

führt. W. z. b. w.

§ 4.

Satz 3. Es seien die Funktionen $F_i(t, x, \varphi)_{(1,k)(1,\lambda)}$ und ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu} (i=1, 2, \dots, k) (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$ in $\bar{B}_i$ stetig. F_i genügen auch in $\bar{B}_i$ der Bedingung

$$(45) \quad \left| F_i(t, x^*, \varphi)_{(1,k)(1,\lambda)} - F_i(t, x, \varphi)_{(1,k)(1,\lambda)} \right| \leq K(\varphi)_{(1,\lambda)} \sum_{j=1}^k |x_j^* - x_j| \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

wobei K eine stetige Funktion von $(\varphi)_{(1,\lambda)}$ ist. Es seien $\left\{ \overset{n}{x}(t)_{(1,k)} \right\}$ und $\left\{ x(t)_{(1,k)} \right\}$ die in B_i liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen

$$(46) \quad \frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x, \overset{n}{\varphi}(t))_{(1,k)(1,\lambda)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

bzw.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x, \varphi(t))_{(1,k)(1,\lambda)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $\overset{n}{x}_i(t_0) = \xi_i$, $x_i(t_0) = \xi'_i$, wobei $\overset{n}{\varphi}(t)_{(1,\lambda)}$ in $\langle a, b \rangle$

messbare und $\varphi(t)$ in $\langle a, b \rangle$ stetige Funktionen sind. Es bestehen auch

$$(47) \quad \int_a^b |\varphi_\mu(t)|^n dt \leq H \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

für alle n , wobei H eine beliebige feste Konstante ist, und

$$(48) \quad \left| \mathcal{E}_i \left(t, x; \varphi(t); \varphi^* \right) \right| \leq \alpha \mathcal{E}_1 \left(t, x; \varphi(t); \varphi^* \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

für alle φ^* und x in $\bar{B}_i$, wo $\mathcal{E}_i$ dieselbe Bedeutung wie in Satz 2 hat und α eine positive Konstante ist.

Dann aus den Relationen

$$(49) \quad \int_{t_0}^t K \left(\varphi(t) \right) dt \leq L \quad \text{für alle } n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^n = \xi_i' \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und

$$(50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \varphi_\mu^n(t) dt = \int_{t_0}^t \varphi_\mu(t) dt \quad \text{für } t \geq t_0 \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

im Sinne der gleichmässigen Konvergenz, folgen die Ungleichungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^n(t) \geq x_1(t) \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_1,$$

falls die Konstante L genügend klein genommen wird.

Beweis: Aus (45) (wobei φ stetige Funktionen von t sind), (47)

und (50) nach Satz 1 erhält man für die Integralsysteme $\left\{ \varphi_\mu^n(t) \right\}$ der Differentialgleichungen

$$(51) \quad \frac{dy_i}{dt} = F_i \left(t, y, \varphi(t) \right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left\{ \varphi_\mu^n(t) - \varphi_\mu(t) \right\} \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_\mu} \left(t, y, \varphi(t) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_i(t_0) = \xi_i^n$ die Gleichungen

$$(52) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_i^n(t) = x_i(t) \quad \text{für } t \geq t_0 \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Die Differentialgleichungssysteme (51) sind aber nichts anders als die folgenden:

$$(51') \quad \frac{dy_i}{dt} = F_i\left(t, y, \overset{n}{\varphi}(t)\right) - \mathcal{E}_i\left(t, y; \overset{n}{\varphi}(t); \overset{n}{\varphi}(t)\right) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Aus (46), (51'), (45), (49) und (48) nach Hilfssatz 1 bekommen wir

$$(53) \quad \sum_{i=1}^k \left| \overset{n}{y}(t) - \overset{n}{x}_i(t) \right| \leq k\alpha e^{kL} \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{1,n}(\tau) d\tau \quad \text{für } t_0 \leq t \leq t_1,$$

wobei $\mathcal{E}_{1,n}(\tau) = \mathcal{E}_1\left(\tau, \overset{n}{y}(\tau); \overset{n}{\varphi}(\tau); \overset{n}{\varphi}(\tau)\right)$ ist. Wir haben weiter aus (46) und (51')

$$\overset{n}{x}_1(t) - \overset{n}{y}_1(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{1,n}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \left\{ F_1\left(\tau, \overset{n}{x}(\tau), \overset{n}{\varphi}(\tau)\right) - F_1\left(\tau, \overset{n}{y}(\tau), \overset{n}{\varphi}(\tau)\right) \right\} d\tau,$$

also nach (45), (53) und (49) für $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \overset{n}{x}_1(t) - \overset{n}{y}_1(t) &\geq \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{1,n}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t K\left(\overset{n}{\varphi}(\tau)\right) \sum_{i=1}^k \left| \overset{n}{x}_i(\tau) - \overset{n}{y}_i(\tau) \right| d\tau \\ &\geq \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{1,n}(\tau) d\tau - k\alpha e^{kL} \int_{t_0}^t K\left(\overset{n}{\varphi}(\tau)\right) d\tau \int_{t_0}^{\tau} \mathcal{E}_{1,n}(u) du \\ &\geq \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{1,n}(\tau) \left\{ 1 - k\alpha e^{kL} \int_{\tau}^t K\left(\overset{n}{\varphi}(u)\right) du \right\} d\tau \\ &\geq \left(1 - k\alpha L e^{kL} \right) \int_{t_0}^t \mathcal{E}_{1,n}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Nehmen wir L so klein, dass

$$1 - k\alpha L e^{kL} \geq 0,$$

dann haben wir für alle n

$$\overset{n}{x}_1(t) \geq \overset{n}{y}_1(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Dies mit (52) ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{x}_1(t) \geq x_1(t)$$

für $t_0 \leq t \leq t_1$, w. z. b. w.

Bemerkung. In Satz 3 kann man die Stetigkeit der Funktionen $\overset{n}{\varphi}(t)$ durch ihre blosse Messbarkeit in $\langle a, b \rangle$ ersetzen, wenn man nur anstatt der Bedingung (47) die folgenden gebraucht:

$|\varphi_\mu^n(t)| \leq h$ für alle n , $|\varphi_\mu(t)| \leq h$ (h : eine beliebige feste positive Zahl)

Obige Voraussetzungen betreffen nur den Gleichungen (52). Die neuen Bedingungen aber ändern die Gleichungen (52) nicht. Dazu vergleiche man die Bemerkung zu Satz 3.

§ 5.

Satz 4. Es sei eine Folge der Differentialgleichungssysteme

$$(54) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x, \varphi^n(t)\right) + \varphi^n(t) \cdot g_i\left(t, x, \varphi^n(t)\right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

vorgelegt, wobei $f_i\left(t, x, \varphi^n(t)\right)$ in $\bar{B}_i$ beschränkt sind, und g_i in B_i der Lipschitzbedingung

$$(55) \quad \left| g_i\left(t, x^*_{(1,k)}\right) - g_i\left(t, x_{(1,k)}\right) \right| \leq K \sum_{j=1}^k |x_j^* - x_j| \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

genügende stetige Funktionen sind. $\varphi^n(t)$ seien im Intervalle $t_0 - \delta_n < t < t_0 + \delta_n$ ($a < t_0 < b$) summierbare Funktionen, die der Bedingung

$$(56) \quad \int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} |\varphi^n(t)| dt \leq H$$

unterworfen sind.

Bezeichnet man mit $\left\{ \varphi^n(t) \right\}_{(1,k)}$ die für $t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n$ in B_i liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen (54) mit den Anfangsbedingungen $x_i(t_0 - \delta_n) = \xi_i^n$, so haben wir aus den Relationen

$$(57) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^n = \xi'_i \quad (i=1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

und

$$(58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} \varphi^n(t) dt = \Phi,$$

stets die Gleichungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i(t_0 + \delta_n) = X_i(\Phi) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

wobei das Funktionensystem $\{X(t)_{(1,k)}\}$ das Integralsystem der Differentialgleichungen

$$(59) \quad \frac{dX_i}{dt} = g_i \left(t_0, X_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $X_i(0) = \xi_i'$ bedeutet.

Beweis: Man betrachte die Integralsysteme $\{y(t)_{(1,k)}^n\}$ der Differentialgleichungen

$$(60) \quad \frac{dy_i}{dt} = {}^n\varphi(t) \cdot g_i \left(t_0, y_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_i(t_0 - \delta_n) = x_i(t_0 - \delta_n)$. Die Gleichungen (54) sind aber nichts anders als die folgenden

$$(54') \quad \frac{dx_i}{dt} = {}^n\varphi(t) \cdot g_i \left(t_0, x_{(1,k)} \right) + f_i \left(t, x_{(1,k)}, {}^n\varphi \right) + {}^n\varphi(t) \left\{ g_i \left(t, x_{(1,k)} \right) - g_i \left(t_0, x_{(1,k)} \right) \right\} \\ (i=1, 2, \dots, k).$$

Bezeichnet man mit M und ε_n solche positive Zahlen, dass

$$|f_i| \leq M \quad (i=1, 2, \dots, k) \text{ in } \bar{B}_i,$$

$$\left| g_i \left(t, y_{(1,k)} \right) - g_i \left(t_0, y_{(1,k)} \right) \right| \leq \varepsilon_n \\ (i=1, 2, \dots, k) \text{ in } \bar{B}_i \text{ für } t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n,$$

wobei ε_n für $n \rightarrow \infty$ nach Null strebt, so hat man aus (60), (54'), (55) und (56) nach Hilfssatz 2

$$(61) \quad \sum_{i=1}^k \left| y_i(t) - x_i(t) \right| \leq k(2\delta_n M + \varepsilon_n H) e^{kKH}$$

für $t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n$.

Nun teilen wir die Intervalle $< t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n >$ in $2p$ gleiche Teilintervalle $I_{p,\mu}^n, \left(t_0 + \frac{\mu-1}{p} \delta_n, t_0 + \frac{\mu}{p} \delta_n \right)$, ein, deren Längen gleich $\frac{\delta_n}{p}$ sind, und definieren wir die in jedem $I_{p,\mu}^n$ konstanten Funktionen $\psi_p^n(t)$ durch

$$\psi_p^n(t) = \frac{p}{\delta_n} \int_{t_0 + \frac{\mu-1}{p} \delta_n}^{t_0 + \frac{\mu}{p} \delta_n} {}^n\varphi(t) dt \quad \text{in } I_{p,\mu}^n \quad (\mu = -p+1, -p+2, \dots, 0, 1, \dots, p).$$

Dann haben wir

$$(62) \quad \int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} |\psi_p(t)| dt \leq \int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} |\varphi(t)| dt \leq H$$

und

$$(63) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{t_0-\delta_n}^t \psi_p(t) dt = \int_{t_0-\delta_n}^t \varphi(t) dt \quad \text{für jedes feste } n \quad (t_0-\delta_n \leq t \leq t_0+\delta_n).$$

Betrachten wir die Integralsysteme $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ (i,k) \end{smallmatrix} y_p(t) \right\}$ der Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dt} = \psi_p(t) \cdot g_i \left(t_0, \begin{smallmatrix} n \\ (i,k) \end{smallmatrix} y \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_{i,p}(t_0-\delta_n) = y_i(t_0-\delta_n)$, so haben wir aus (60), (62) und (63) nach Satz 1

$$(64) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \begin{smallmatrix} n \\ y_{i,p}(t) \end{smallmatrix} = y_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

für $t_0-\delta_n \leq t \leq t_0+\delta_n$. Leicht bekommen wir auch

$$(65) \quad \begin{smallmatrix} n \\ y_{i,p}(t_0+\delta_n) \end{smallmatrix} = X_i \left(\int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} \varphi(t) dt \right),$$

wobei $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ (i,k) \end{smallmatrix} X(t) \right\}$ die Integralsysteme der Differentialgleichungen (59) mit den Anfangsbedingungen $X_i(0) = y_i(t_0-\delta_n) = \xi_i$ bedeuten.

Aus (64) und (65) erhält man

$$\begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0+\delta_n) \end{smallmatrix} = X_i \left(\int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} \varphi(t) dt \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)^{(7)},$$

und damit aus (57) und (58) folgt

$$(66) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0+\delta_n) \end{smallmatrix} = X_i(\Phi) \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

denn $g_i \left(t_0, \begin{smallmatrix} n \\ (i,k) \end{smallmatrix} X \right)$ genügen der Lipschitzbedingung (55).

Aus (61) folgt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0+\delta_n) \end{smallmatrix} - x_i(t_0+\delta_n) \right\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Dies mit (66) ergibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{smallmatrix} n \\ x_i(t_0+\delta_n) \end{smallmatrix} = X_i(\Phi) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

(7) Dies können wir aus (60) direkt ableiten, indem man $u = \int_{t_0-\delta_n}^t \begin{smallmatrix} n \\ \varphi(t) \end{smallmatrix} dt$ als neue unabhängige Variable betrachtet.

Satz 5. Es sei eine Folge der Differentialgleichungssysteme

$$(67) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i \left(t, x, \overset{n}{\varphi}_{(1,k)(1,\lambda)}(t) \right) + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \overset{n}{\varphi}_{\mu}(t) g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

vorgelegt, wobei $f_i \left(t, x, \overset{n}{\varphi}_{(1,k)(1,\lambda)}(t) \right)$ in $\overline{B_i}$ beschränkt und $g_{i,\mu}$ samt ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_j}$ ($i, j=1, 2, \dots, k$) ($\mu=1, 2, \dots, \lambda$) in B_j stetig sind. Die Funktionen $\overset{n}{\varphi}_{(1,\lambda)}(t)$ seien im Intervalle $< t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n >$ summierbar. $\left\{ \overset{n}{x}(t) \right\}$ seien die für $t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n$ in B_i liegenden Integralsysteme der Differentialgleichungen (67) mit den Anfangsbedingungen $x_i(t_0 - \delta_n) = \overset{n}{\xi}_i$. Dann haben wir:

Dafür, dass nur aus den Relationen

$$(68) \quad \int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} \left| \overset{n}{\varphi}_{\mu}(t) \right| dt \leq H \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda) \text{ für alle } n,$$

$$(69) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$

$$(70) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{\xi}_i = \xi'_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und

$$(71) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} \overset{n}{\varphi}_{\mu}(t) dt = \Phi_{\mu} \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda),$$

wobei $(t_0, \xi'_{(1,k)})$ einen beliebigen inneren Punkt von B_i bedeutet, stets die Gleichungen

$$(72) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_i(t_0 + \delta_n) = X_i \left(\Phi_{(1,\lambda)}, t_0, \xi'_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

folgen, dabei X_i nur von $\Phi_{(1,\lambda)}, t_0, \xi'_{(1,k)}$ abhängige Funktionen bedeuten, ist es notwendig und hinreichend, dass die Funktionen $g_{i,\mu} \left(t, x_{(1,k)} \right)$ im innern von B_i der Bedingung

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_j} \cdot g_{j,\nu} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}}{\partial x_j} \cdot g_{j,\mu}^{(*)} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (\mu, \nu=1, 2, \dots, \lambda)$$

genügen.

(*) Vgl. die Fussnote (10).

Beweis: Es sei $\left\{ X_{(1,k),\mu} \left(t, \xi'_{(1,k)} \right) \right\}$ das Integralsystem der Differentialgleichungen.

$$(73) \quad \frac{dX_i}{dt} = g_{i,\mu} \left(t_0, X_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $X_{i,\mu} \left(0, \xi'_{(1,k)} \right) = \xi'_i$. Dann haben wir als Integralsysteme von (73) mit den Anfangsbedingungen $X_{i,\mu} \left(t_1, \xi'_{(1,k)} \right) = \xi'_i$ die Funktionensysteme $\left\{ X_{(1,k),\mu} \left(t-t_1, \xi'_{(1,k)} \right) \right\}$. Die Schar der Integralsysteme von (73) mit den Anfangsbedingungen $X_{i,\mu} \left(t_1, \xi'_{(1,k)} \right) = \xi'_i$ führt für $t=t_1+\alpha$ die Punkte $\left(\xi'_{(1,k)} \right)$ in $\xi''_i = X_{i,\mu} \left(\alpha, \xi'_{(1,k)} \right)$ über. Diese Transformation der k -dimensionalen Punkte heiße $T_\alpha^{(\mu)}$. Also schreiben wir.

$$\left(\xi''_{(1,k)} \right) = T_\alpha^{(\mu)} \left(\xi'_{(1,k)} \right).$$

Die Transformationen $T_\alpha^{(\mu)}$ sind umkehrbar eindeutig und in bezug auf $\left(\alpha, \xi'_{(1,k)} \right)$ stetig. Zunächst wollen wir beweisen:

Dafür, dass nur aus (68), (69), (70) und (71) stets (72) folgen, ist es notwendig und hinreichend, dass die Reihenfolge der je zwei aufeinander folgenden Transformationen $T_\eta^{(\mu)}$ und $T_\zeta^{(\nu)}$ vertauschbar ist;

$$(74) \quad T_\eta^{(\mu)} T_\zeta^{(\nu)} = T_\zeta^{(\nu)} T_\eta^{(\mu)} \quad (\mu, \nu=1, 2, \dots, \lambda).$$

wobei η und ζ unter einer gewissen Schranke liegende beliebige Zahlen bedeuten.

Ganz analog wie in Satz 4⁽⁹⁾ bekommen wir für die Integralsysteme $\left\{ y_{(1,k)}^n(t) \right\}$ der Differentialgleichungen

$$(75) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\lambda} \varphi_\mu(t) \cdot g_{i,\mu} \left(t_0, y_{(1,k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_i(t_0-\delta_n) = x_i(t_0-\delta_n) = \xi_i$ folgende Abschätzung

$$\sum_{i=1}^k \left| y_i^n(t) - x_i(t) \right| \leq k(2\delta_n M + \lambda \varepsilon_n H) e^{k\lambda KH}$$

(⁹) Vgl. die Ungleichung (61).

für $t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n$, wobei M, K und ε_n solche positive Zahlen bedeuten, dass in B_i

$$|f_i| \leq M, \quad \left| \frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_j} \right| \leq K \quad (i, j=1, 2, \dots, k)(\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

und

$$\left| g_{j,\mu} \left(t, \underset{(1,k)}{x} \right) - g_{j,\mu} \left(t_0, \underset{(1,k)}{x} \right) \right| \leq \varepsilon_n \quad (i=1, 2, \dots, k)(\mu=1, 2, \dots, \lambda),$$

sobald $|t - t_0| \leq \delta_n$. Wir haben also

$$(76) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ y_i(t_0 + \delta_n) - x_i(t_0 + \delta_n) \right\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Setzt man nun $\overset{n}{\varphi}_p(t) = 0$ falls $p \neq \mu, \nu$,

$$\begin{aligned} \overset{n}{\varphi}_\mu(t) &= \begin{cases} \frac{\eta}{\delta_n} & \text{für } t_0 - \delta_n \leq t < t_0, \\ 0 & \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_n, \end{cases} \\ \overset{n}{\varphi}_\nu(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t_0 - \delta_n \leq t < t_0, \\ \frac{\xi}{\delta_n} & \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_n, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $|\eta|$ und $|\xi|$ unter geeignet gewählter Schranke H liegen, sodass

$\left\{ \overset{n}{y}_{(1,k)}(t) \right\}$ für $t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n$ ganz in B_i liegen, so erhält man

$$\int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} \left| \overset{n}{\varphi}_\kappa(t) \right| dt \leq H \quad (\kappa=1, 2, \dots, \lambda)$$

und

$$\left(\overset{n}{y}_{(1,k)}(t_0 + \delta_n) \right) = T_\eta^{(\mu)} T_\xi^{(\nu)} \left(\overset{n}{\xi}_{(1,k)} \right).$$

Also nach (76) und (70)

$$(77) \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{x}_{(1,k)}(t_0 + \delta_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\eta^{(\mu)} T_\xi^{(\nu)} \left(\overset{n}{\xi}_{(1,k)} \right) = T_\eta^{(\mu)} T_\xi^{(\nu)} \left(\overset{\xi'}{(1,k)} \right).$$

Setzt man dagegen $\overset{n}{\varphi}_p(t) = 0$ falls $p \neq \mu, \nu$,

$$\begin{aligned} \overset{n}{\varphi}_\mu(t) &= \begin{cases} 0 & \text{für } t_0 - \delta_n \leq t < t_0, \\ \frac{\eta}{\delta_n} & \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_n, \end{cases} \\ \overset{n}{\varphi}_\nu(t) &= \begin{cases} \frac{\xi}{\delta_n} & \text{für } t_0 - \delta_n \leq t < t_0, \\ 0 & \text{für } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_n, \end{cases} \end{aligned}$$

so hat man wie oben

$$\int_{t_0-\delta_n}^{t_0+\delta_n} \left| \begin{smallmatrix} n \\ \varphi_\kappa(t) \end{smallmatrix} \right| dt \leq H \quad (\kappa=1, 2, \dots, \lambda)$$

und

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{smallmatrix} n \\ x(t_0 + \delta_n) \end{smallmatrix} \right) = T_{\xi}^{(\nu)} T_{\eta}^{(\mu)} \left(\begin{smallmatrix} \xi' \\ (1, k) \end{smallmatrix} \right).$$

Da $\left(\begin{smallmatrix} \xi' \\ (1, k) \end{smallmatrix} \right)$ einen beliebigen inneren Punkt von B_i bedeutet, so zeigt dies mit (77), dass die Bedingung (74) notwendig ist.

Um die Hinlänglichkeit der Bedingung (74) zu beweisen, zerlegen wir das Intervall $< t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n >$ in λm gleiche Teilintervalle (deren Längen gleich $\frac{2\delta_n}{\lambda m}$ sind) und setzen wir

$$\begin{matrix} \begin{smallmatrix} n \\ \psi_{\mu, m}(t) \end{smallmatrix} = \end{matrix} \begin{cases} \frac{\lambda m}{2\delta_n} \chi_n(\mu, p) & \text{in } \left(t_0 - \delta_n + 2 \left[\frac{p-1}{m} + \frac{\mu-1}{\lambda m} \right] \delta_n, \right. \\ & \left. t_0 - \delta_n + 2 \left[\frac{p-1}{m} + \frac{\mu}{\lambda m} \right] \delta_n \right), \\ \text{sonst } 0, \end{cases}$$

wobei

$$\chi_n(\mu, p) = \int_{t_0 - \delta_n + 2 \frac{p-1}{m} \delta_n}^{t_0 - \delta_n + 2 \frac{p}{m} \delta_n} \begin{smallmatrix} n \\ \varphi_\mu(t) \end{smallmatrix} dt$$

ist. Dann haben wir

$$\int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} \left| \begin{smallmatrix} n \\ \psi_{\mu, m}(t) \end{smallmatrix} \right| dt \leq \int_{t_0 - \delta_n}^{t_0 + \delta_n} \left| \begin{smallmatrix} n \\ \varphi_\mu(t) \end{smallmatrix} \right| dt \leq H$$

und

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0 - \delta_n}^t \begin{smallmatrix} n \\ \psi_{\mu, m}(t) \end{smallmatrix} dt = \int_{t_0 - \delta_n}^t \begin{smallmatrix} n \\ \varphi_\mu(t) \end{smallmatrix} dt \quad \text{für } t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n.$$

Man hat also nach Satz 1 für die Integralsysteme $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ z_{i, m}(t) \end{smallmatrix} \right\}$ der Differentialgleichungen

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\lambda} \begin{smallmatrix} n \\ \psi_{\mu, m}(t) \end{smallmatrix} g_{i, \mu} \left(t_0, z_{(1, k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit den Anfangsbedingungen $\begin{smallmatrix} n \\ z_{i, m}(t_0 - \delta_n) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0 - \delta_n) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} n \\ \xi_i \end{smallmatrix}$ die Gleichungen

$$(78) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \begin{smallmatrix} n \\ z_{i, m}(t) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t) \end{smallmatrix} \quad (t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n)$$

für jedes n . Es gilt aber

$$\left(\begin{smallmatrix} n \\ z_{i, m}(t_0 + \delta_n) \end{smallmatrix} \right) = T_{\chi_n(1,1)}^{(1)} T_{\chi_n(2,1)}^{(2)} \dots T_{\chi_n(\lambda,1)}^{(\lambda)} T_{\chi_n(1,2)}^{(1)} T_{\chi_n(2,2)}^{(2)} \dots T_{\chi_n(\lambda,2)}^{(\lambda)} \dots$$

$$\dots\dots T_{\chi_n(1,m)}^{(1)} T_{\chi_n(2,m)}^{(2)} \dots\dots T_{\chi_n(\lambda,m)}^{(\lambda)} \left(\begin{matrix} n \\ \xi \\ (1,k) \end{matrix} \right).$$

Da nach (74) je zwei Transformationen unter einander vertauschbar sind, so ist

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} n \\ z, \\ (1,k) \end{matrix} m(t_0 + \delta_n) \right) &= T_{\chi_n(1,1)}^{(1)} T_{\chi_n(1,2)}^{(1)} \dots\dots T_{\chi_n(1,m)}^{(1)} T_{\chi_n(2,1)}^{(2)} T_{\chi_n(2,2)}^{(2)} \dots\dots T_{\chi_n(2,m)}^{(2)} \dots\dots \\ &\dots\dots T_{\chi_n(\lambda,1)}^{(\lambda)} T_{\chi_n(\lambda,2)}^{(\lambda)} \dots\dots T_{\chi_n(\lambda,m)}^{(\lambda)} \left(\begin{matrix} n \\ \xi \\ (1,k) \end{matrix} \right) \\ &= T_{\chi_n(1)}^{(1)} T_{\chi_n(2)}^{(2)} \dots\dots T_{\chi_n(\lambda)}^{(\lambda)} \left(\begin{matrix} n \\ \xi \\ (1,k) \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

wo $\chi_n(\mu) = \int_{t_0 - \varepsilon_n}^{t_0 + \delta_n} \varphi_\mu(t) dt$. Dies mit (78) ergibt für $m \rightarrow \infty$

$$\left(\begin{matrix} n \\ y \\ (1,k) \end{matrix} (t_0 + \delta_n) \right) = T_{\chi_n(1)}^{(1)} T_{\chi_n(2)}^{(2)} \dots\dots T_{\chi_n(\lambda)}^{(\lambda)} \left(\begin{matrix} n \\ \xi \\ (1,k) \end{matrix} \right)$$

Lässt man nun n nach dem Unendlichen streben, so erhält man aus (70), (71) und (76)

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_0 + \delta_n) \right) = T_{\Phi_1}^{(1)} T_{\Phi_2}^{(2)} \dots\dots T_{\Phi_\lambda}^{(\lambda)} \left(\begin{matrix} \xi' \\ (1,k) \end{matrix} \right),$$

wobei die rechte Seite nur von Φ , t_0 , ξ' abhängt. Die Hinlänglichkeit der Bedingung (74) ist damit bewiesen.

Jetzt haben wir zu beweisen, dass: Dafür, dass die Bedingung (74) stets gilt, ist es notwendig und hinreichend, dass die Funktionen $g_{i,\mu}$ im innern von B_i der Bedingung

$$(79) \quad \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_j} g_{j,\nu} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}}{\partial x_j} g_{j,\mu} \quad (i=1, 2, \dots, k)(\mu, \nu=1, 2, \dots, \lambda)$$

genügen.⁽¹⁰⁾

Es seien $\left\{ u(t, 0) \right\}_{(1,k)}$ und $\left\{ v(t, 0) \right\}_{(1,k)}$ die Integralsysteme der Differentialgleichungen

$$(80) \quad \frac{du_i}{dt} = g_{i,\mu} \left(t_0, u \right)_{(1,k)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

bzw.

$$(81) \quad \frac{dv_i}{dt} = g_{i,\nu} \left(t_0, v \right)_{(1,k)} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

⁽¹⁰⁾ Dies ist nichts anders als das Verschwinden des Klammerausdrucks (U, V) der zwei infinitesimalen Transformationen U und V , deren endliche Transformationen $T^{(\mu)}$ bzw. $T^{(\nu)}$ sind. Vgl. Lie: Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen (1893), 437.

mit den Anfangsbedingungen $u_i(0, 0) = v_i(0, 0) = \xi'_i$. Es sei ferner

$$\left\{ u_{(1,k)}(t, \zeta) \right\} \text{ das Integralsystem von (80) mit den Anfangsbedingungen} \\ (82) \quad u_i(0, \zeta) = v_i(\zeta, 0) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

und $\left\{ v_{(1,k)}(t, \eta) \right\}$ das Integralsystem von (81) mit den Anfangsbedingungen

$$(83) \quad v_i(0, \eta) = u_i(\eta, 0) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Also

$$(84) \quad \frac{\partial u_i(\eta, \zeta)}{\partial \eta} = g_{i,\mu} \left(t_0, u_{(1,k)}(\eta, \zeta) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

$$(85) \quad \frac{\partial v_i(\zeta, \eta)}{\partial \zeta} = g_{i,\nu} \left(t_0, v_{(1,k)}(\zeta, \eta) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Nach Definition haben wir dann

$$\left(u_{(1,k)}(\eta, \zeta) \right) = T_{\zeta}^{(\nu)} T_{\eta}^{(\mu)} \left(\xi'_{(1,k)} \right)$$

und

$$\left(v_{(1,k)}(\zeta, \eta) \right) = T_{\eta}^{(\mu)} T_{\zeta}^{(\nu)} \left(\xi'_{(1,k)} \right).$$

Die Bedingung (74) kann demnach durch

$$(86) \quad u_i(\eta, \zeta) = v_i(\zeta, \eta) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

ersetzt werden.

Nun setzen wir voraus, dass (86) gültig sei. Dann erhält man

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \zeta \partial \eta},$$

daher nach (84) und (85)

$$(87) \quad \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\mu} \left(t_0, u_{(1,k)} \right)}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu} \left(t_0, v_{(1,k)} \right)}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \eta}.$$

Aus (86) erhält man auch

$$\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} = \frac{\partial v_j}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \eta} = \frac{\partial u_j}{\partial \eta},$$

also wegen (84) und (85)

$$(88) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial \zeta} = g_{j,\nu} \left(t_0, v_{(1,k)} \right) \\ \frac{\partial v_j}{\partial \eta} = g_{j,\mu} \left(t_0, u_{(1,k)} \right) \end{cases}$$

Da u_i und v_i nach (86) identisch sind und $(t_0, u_i = v_i = x_i)$ ein beliebiger innerer Punkt von B_i sein kann, so erhält man aus (87) und (88)

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\mu}(t_0, x)}{\partial x_j} g_{j,\nu}(t_0, x) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}(t_0, x)}{\partial x_j} g_{j,\mu}(t_0, x).$$

Die Bedingung (79) ist also notwendig.

Die Bedingung (79) ist auch hinreichend. Denn, man setze in (79) für x die Funktionen v (ζ, η), so hat man nach (85)

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\mu}(t_0, v)}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}(t_0, v)}{\partial v_j} g_{j,\mu}(t_0, v),$$

oder

$$\frac{\partial g_{i,\mu}(t_0, v(\zeta, \eta))}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}(t_0, v(\zeta, \eta))}{\partial v_j} g_{j,\mu}(t_0, v(\zeta, \eta)).$$

Aus (85) folgt auch

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial v_i(\zeta, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}(t_0, v(\zeta, \eta))}{\partial v_j} \frac{\partial v_j(\zeta, \eta)}{\partial \eta}.$$

Die beiden Funktionensysteme

$$\left\{ g_{i,\mu}(t_0, v(\zeta, \eta)) \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{\partial v_1(\zeta, \eta)}{\partial \eta}, \dots, \frac{\partial v_k(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \right\}$$

genügen also für jedes η als Funktionen von ζ demselben gewöhnlichen linearen Differentialgleichungssystem

$$\frac{dw_i}{d\zeta} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_{i,\nu}(t_0, v)}{\partial v_j} w_j \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

wobei

$$\frac{\partial g_{i,\nu}(t_0, v)}{\partial v_j}$$

stetige Funktionen von ζ sind. Die beiden Funktionensysteme

$$\left\{ g_{i,\mu} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial \eta}, \dots, \frac{\partial v_k}{\partial \eta} \right\}$$

haben auch dieselbe Anfangsbedingungen. Denn, aus (83) und (84) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_i(0, \eta)}{\partial \eta} &= \frac{\partial u_i(\eta, 0)}{\partial \eta} = g_{i, \mu} \left(t_0, u_{(1, k)}(\eta, 0) \right) \\ &= g_{i, \mu} \left(t_0, v_{(1, k)}(0, \eta) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k).\end{aligned}$$

Die Funktionensysteme

$$\left\{ g_{(1, k), \mu} \left(t_0, v_{(1, k)}(\xi, \eta) \right) \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{\partial v_1(\xi, \eta)}{\partial \eta}, \dots, \frac{\partial v_k(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\}$$

sind also identisch. Nämlich

$$(89) \quad \frac{\partial v_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = g_{i, \mu} \left(t_0, v_{(1, k)}(\xi, \eta) \right) \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Die Gleichungen (84) und (89) zeigen uns, dass die beiden Funktionensysteme $\left\{ u_{(1, k)}(\eta, \xi) \right\}$ und $\left\{ v_{(1, k)}(\xi, \eta) \right\}$ für jedes ξ als Funktionen von η demselben Differentialgleichungssystem

$$\frac{dw_i}{d\eta} = g_{i, \mu} \left(t_0, w_{(1, k)} \right) \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

(wobei die rechten Seiten nach w stetig differenzierbar sind,) mit denselben Anfangsbedingungen $u_i(0, \xi) = v_i(\xi, 0)$ ¹¹⁾ genügen. Die beiden Funktionensysteme $\left\{ u_{(1, k)}(\eta, \xi) \right\}$ und $\left\{ v_{(1, k)}(\xi, \eta) \right\}$ sind damit identisch. W. z. b. w.

Beispiel. Die Geschwindigkeit eines elektrisierten materiellen Punktes in magnetischem Felde (falls sie nicht so gross ist) genügt dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 \{ c_3 \varphi_3(t) x_2 - c_2 \varphi_2(t) x_3 \}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_1 \{ c_1 \varphi_1(t) x_3 - c_3 \varphi_3(t) x_1 \}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \lambda_1 \{ c_2 \varphi_2(t) x_1 - c_1 \varphi_1(t) x_2 \},\end{aligned}$$

wobei λ_1 eine gewisse Konstante, x_1, x_2, x_3 die drei Komponenten der Geschwindigkeit des materiellen Punktes und $c_1 \varphi_1(t)$, $c_2 \varphi_2(t)$, $c_3 \varphi_3(t)$ von Zeit abhängige Komponenten des magnetischen Feldes in bezug auf dasselbe rechtwinklige Koordinatensystem bedeuten. Hierbei sind

¹¹⁾ Vgl. (82).

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= 0, & g_{1,2} &= -\lambda_1 c_2 x_3, & g_{1,3} &= \lambda_1 c_3 x_2, \\ g_{2,1} &= \lambda_1 c_1 x_3, & g_{2,2} &= 0, & g_{2,3} &= -\lambda_1 c_3 x_1, \\ g_{3,1} &= -\lambda_1 c_1 x_2, & g_{3,2} &= \lambda_1 c_2 x_1, & g_{3,3} &= 0. \end{aligned}$$

Man hat also für (79)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 c_3 c_2 x_3 &= 0 \\ \lambda_1^2 c_2 c_3 x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ falls } \mu=2, \nu=3,$$

folglich $c_2 c_3 = 0$. Dann setzen wir etwa $c_3 = 0$.

So erhält man für

$$\mu=1, \nu=2$$

$$\lambda_1^2 c_2 c_1 x_2 = 0,$$

$$\lambda_1^2 c_1 c_2 x_1 = 0,$$

folglich $c_1 c_2 = 0$. Wir haben also, dass mindestens zwei unter c_1, c_2, c_3 verschwinden sollen, d. h.;

Der Effekt des magnetischen Feldes auf die Geschwindigkeit eines elektrisierten materiellen Punktes (falls die Geschwindigkeit nicht so gross ist) in unendlich kleinem Zeitintervall ist nicht nur von dem Zeitintegral des magnetischen Feldes sondern auch von der Art wie das Feld in dem unendlich kleinen Zeitintervall variiert, falls seine mindestens zwei Komponenten ganz von einander unabhängig sind, abhängig. Der Effekt ist aber nur von dem Zeitintegral des Feldes abhängig, falls das Feld inzwischen dieselbe Richtung beibehält.

Bemerkung. Satz 5⁽¹²⁾ wird noch gültig bleiben, wenn man die Beschränktheit von f_i in $\overline{B_i}$ durch folgende Bedingung ersetzt:

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} |f_i| &\leq A \left(\sum_{\mu=1}^{\lambda} |\varphi_{\mu}| \right) \quad (i=1, 2, \dots, k) \text{ in } \overline{B_i}, \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u)}{u} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Denn, es sei ε eine beliebige positive Zahl, so kann man nach (90) eine positive Zahl h derart finden, dass für $\sum_{\mu=1}^{\lambda} |\varphi_{\mu}| \geq h$ stets die Ungleichungen

$$|f_i| \leq \varepsilon \sum_{\mu=1}^{\lambda} |\varphi_{\mu}| \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

gelten. Andererseits gibt es eine Konstante M derart, dass für $|\varphi_{\mu}|$

⁽¹²⁾ und auch Satz 4.

$$\leq h \quad (\mu=1, 2, \dots, \lambda)$$

$$|f_i| \leq M \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Dann erhält man nach Hilfssatz 2 für die Integralsysteme $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ \alpha, k \end{smallmatrix} y(t) \right\}$ der Differentialgleichungen (75) mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0 - \delta_n) \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} n \\ x_i(t_0 - \delta_n) \end{smallmatrix}$$

die Abschätzung für $t_0 - \delta_n \leq t \leq t_0 + \delta_n$

$$\sum_{i=1}^k \left| \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t) - x_i(t) \end{smallmatrix} \right| \leq k(2\delta_n M + \lambda \varepsilon H + \lambda \varepsilon_n H) e^{k\lambda KH}.$$

Lässt man n nach dem Unendlichen streben,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left| \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0 + \delta_n) - x_i(t_0 + \delta_n) \end{smallmatrix} \right| \leq \lambda \varepsilon H e^{k\lambda KH}.$$

Da ε eine beliebige positive Zahl bedeutet, so erhält man daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ y_i(t_0 + \delta_n) - x_i(t_0 + \delta_n) \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k).$$

Die weitere Erörterung kann in demselben Wege wie in Satz 5 durchgeführt werden.

Mathematisches Institut, K. Universität zu Tokyo.