14. *Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn Radó.*

Von Shin-ichi TAKAHASHI.

(Eingegangen am 5. März, 1930.)

In Math. Annalen, Band 102, Heft 3 (1929), S. 428–429, hat Herr Radó einen sehr elementaren Beweis des von Study vermuteten Satzes angegeben. Der Satz, in seiner einfachsten Form, lautet wie folgt:

Die Funktion $w=f(z)$ bilde das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ konform auf ein konvexes Gebiet G der w -Ebene ab. Dann werden auch die konzentrischen Kreisflächen $|z| < r < 1$ auf konvexe Gebiete abgebildet.

Hier möchte ich den folgenden Satz mitteilen, deren Beweissgang sich ausschliesslich an das Verfahren Herrn Radós anschliesst.

Satz Die Funktion $w=f(z)$ ($f(0)=0$) bilde das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ schlicht auf ein in bezug auf den Nullpunkt der w -Ebene sternförmiges Gebiet S ab. Dann werden auch die konzentrischen Kreisflächen $|z| < r < 1$ auf die in bezug auf den Nullpunkt der w -Ebene sternförmigen Gebiete abgebildet.

Beweis Wir bezeichnen die Kreisscheibe $|z| < r < 1$ mit K_r , ihr Bildgebiet mit S_r , und wir wählen irgend einen Punkt w_0 von S_r . Es ist zu zeigen, dass jeder auf der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt der w -Ebene und w_0 gelegene Punkt w_0' ebenfalls in S_r enthalten ist; falls wir die inverse Funktion von $f(z)$ mit $F(w)$ bezeichnen, so ist diese Behauptung der Ungleichung

$$|F(w_0')| < r$$

gleichwertig, die ja eben die Tatsache ausdrückt, dass der Urbildpunkt von w_0' in K_r liegt. Der Punkt w_0 kann, weil er auf der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt der w -Ebene und w_0 liegt, in der Form

$$w_0' = \rho w_0, \quad \rho \text{ reell und } 0 < \rho < 1$$

dargestellt werden. Es sei z_0 der Urbildpunkt von w_0 . Dann ist z_0 ein Punkt in K_r .

Wir bilden nun die für $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$\varphi(z) = \rho f(z).$$

In der w -Ebene dargestellt, ist der Punkt $\varphi(z)$, wegen $0 < \rho < 1$, ein Punkt auf der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt der w -Ebene und $f(z)$, also ebenfalls ein Punkt in S , da S in bezug auf den Nullpunkt der

w -Ebene sternförmig ist. Wir dürfen also $\varphi(z)$ in die inverse Funktion

$$\Psi(z) = F(\varphi(z)),$$

die wegen der Voraussetzung $f(0)=0$ und der Schlichtheit von $f(z)$ für $|z| < 1$, für $z=0$ verschwindet und für $|z| < 1$ dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist, weil F nur solche Werte nimmt, die absolut < 1 sind. Es erfüllt also $\Psi(z)$ die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und wir haben daher

$$|\Psi(z)| \leq |z| \text{ für } |z| < 1.$$

Setzen wir hier $z=z_0$, so ergibt sich unmittelbar

$$|F(w_0')| \leq |z_0| < r,$$

w. z. b. w.

N. B. Wir bezeichnen mit S die Klasse der im Einheitskreise $|z| < 1$ regulären und schlichten Funktionen mit der Voraussetzung

$$f(0)=0, f'(0)=1.$$

Es ist dann die Existenz einer festen Kreisscheibe um den Koordinatenanfangspunkt bekannt, welche durch jede Funktion der Klasse S auf ein in bezug auf den Nullpunkt sternförmiges Gebiet abgebildet wird. Die Bestimmung der sogenannten Sternschranke R_s ist bis heute nicht gelungen. Neulich hat Herr A. Marx die Abschätzung

$$0,64 \leq R_s \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70 \dots\dots$$

gefunden⁽¹⁾.

Der oben angekündigte Satz bedeutet also nicht Neues, wenn r eine positive Zahl kleiner als R_s ist, da wir beim Beweise offenbar

$$f'(0)=1$$

voraussetzen dürfen.

⁽¹⁾ Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, **5** (1929), 96-100.