30. *Beweise einiger Sätze in der Kettenbruchstheorie durch die Humbertsche geometrische Darstellung,*

VON

Seigo MORIMOTO, in Tôkyô.

(Eingegangen am 12. November, 1930.)

Zwei Methoden von den geometrischen Darstellungen des Kettenbruchs werden von *Humbert*⁽¹⁾ und *Klein*⁽²⁾ angegeben. Die *Humbertsche* Methode stützt sich auf die Modulfigur und durch diese Methode hat *Ford*⁽³⁾ den Satz von *Hurwitz*⁽⁴⁾ und *Borel*⁽⁵⁾ bewiesen. Die *Kleinsche* Darstellung benützt die Gitterpunkte und die Näherungspolygonzüge, und durch diese Methode habe ich die Sätze von den diophantischen Approximationen bewiesen.⁽⁶⁾ In dieser Arbeit will ich diese Sätze nochmals durch die *Humbertsche* Darstellung beweisen.

1. Humbertsche Darstellung. Wir denken uns in dem oberen Halpteile der z -Ebene, (wo $z=x+iy, y\geq 0$), die Modulfigur. Sei $B(a, b, c)$ das Kreisbogendreieck dieser Modulfigur mit den Ecken a, b, c , (wenn eine von den Ecken ∞ ist, so hat B zwei geradlinige Seiten,) und sei $B(0, 1, \infty)$ ihr Fundamentalbereich. Man denke sich weiter für alle reellen rationalen Zahlen p/q ($(p, q)=1$) die Kreise $S(p/q, \lambda)$ die an den Punkten p/q die X -Achse berühren und, deren Radien gleich $1/\lambda q^2$ sind. Dabei nehmen wir als $S(\infty, \lambda)$ die Geraden $y=\lambda/2$ an. Diese S -Kreise ändern sich nicht im Ganzen durch die Modulsstitutionen, die Modulfigur auf sich selbst transformieren. Wenn die Gerade

$$L(\alpha) : x=\alpha \quad (\alpha \text{ bedeutet eine irrationale Zahl})$$

(¹) Humbert, Sur les fractions continues ordinaires et les forms quadratiques indéfinies. Liouville Journal, (7). 2 (1916).

(²) Klein, Ausgewähltes Kapitel der Zahlentheorie.

(³) Ford, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1916.

(⁴) Hurwitz, Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Mathematische Annalen, 39 (1891).

(⁵) Borel, Contribution à l'analyse arithmétique du continue. Liouville Journal, (5) 9 (1903).

(⁶) Fukasawa, Über die Kleinsche geometrische Darstellung des Kettenbruchs. Dieses Journal 2 (1926) S. 101-114. Das Problem der besten Approximation der irrationalen Zahlen. Dieses Journal 3 (1926), S. 87-89.

in den Bereich $B(a, b, c)$ eintritt, so sind die Zahlen a, b, c die Haupt- oder Nebennäherungsbrüche, und wenn $L(\alpha)$ die Seite $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$ schneidet, so ist a ein Hauptnäherungsbruch von α . Wenn $L(\alpha)$ den Kreis $S(a, \lambda)$ schneidet, so genügt die Zahl $a = p/q$ der Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda q^2} \quad (\text{A})$$

Durch diese Tatsache können wir mehrere Sätze aus der Kettenbruchstheorie beweisen.

2. Beweis eines Humbertschen Satzes. Wir setzen

$$\begin{aligned} \alpha &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2} \dots}, \\ \alpha_n &= a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}} \dots}, \\ \frac{p_n}{q_n} &= a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Wenn wir durch die Modulusubstitution

$$z = \frac{p_{n-1}z' + p_{n-2}}{q_{n-1}z' + q_{n-2}}$$

α in α_n transformieren, so geht p_{n-1}/q_{n-1} in ∞ , p_{n-2}/q_{n-2} in 0 und p_n/q_n in a_n über,

$$\text{weil} \quad \alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}, \quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$$

sind, und der Punkt ∞ geht in

$$-\alpha_n' = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = -\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_1}$$

über. Die Gerade $L(\alpha)$ ändert dabei in dem Halbkreis $L'(\alpha)$, dessen Durchmesser die Strecke $(-\alpha_n', \alpha_n)$ ist.

Wir denken uns die Kreise $S(0, \lambda)$, $S(a_n, \lambda)$ und $S(\infty, \lambda)$. Wenn

$$L'(\alpha) : \left(x - \frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} \right)^2$$

diese drei Kreise nicht schneidet, so muss

$$\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} < \frac{\lambda}{2}, \quad \left(a_n - \frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 < \left(\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} - \frac{1}{\lambda} \right)^2$$

$$\left(\frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 < \left(\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} - \frac{1}{\lambda}\right)^2$$

sein. Das Maximum von

$$\left(\frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2}\right) + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2,$$

und $\left(\alpha_n - \frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$

wird Minimum, wenn sie einander gleich sind, d. h. wenn $\alpha_n = \alpha_n - \alpha_n'$ wird, weil beim Zunehmen von $\alpha_n - \alpha_n'$ das

Fig. 1.

erste von ihnen zunimmt und das letzte abnimmt. Folglich haben wir

$$\left(\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 > \left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2},$$

$$\lambda > \frac{4(\alpha_n + \alpha_n')}{(\alpha_n + \alpha_n')^2 - \alpha_n^2}.$$

Also

$$\lambda > \text{Max} \left\{ \frac{4(\alpha_n + \alpha_n')}{(\alpha_n + \alpha_n')^2 - \alpha_n^2}, \alpha_n + \alpha_n' \right\}.$$

Wenn $\alpha_n + \alpha_n'$ zunimmt, so nimmt $\frac{4(\alpha_n + \alpha_n')}{(\alpha_n + \alpha_n')^2 - \alpha_n^2}$ ab. Folglich wird

$$\text{Max} \left\{ \frac{4(\alpha_n + \alpha_n')}{(\alpha_n + \alpha_n')^2 - \alpha_n^2}, \alpha_n + \alpha_n' \right\}$$

minimum, wenn

$$\frac{4(\alpha_n + \alpha_n')}{(\alpha_n + \alpha_n')^2 - \alpha_n^2} = \alpha_n + \alpha_n',$$

also

$$(\alpha_n + \alpha_n')^2 = \alpha_n^2 + 4$$

ist. Folglich haben wir

$$\lambda > \sqrt{\alpha_n^2 + 4}.$$

Wenn dagegen $\lambda < \sqrt{\alpha_n^2 + 4}$ ist, so schneidet $L'(\alpha)$ wenigstens einen der

drei Kreise, und also schneidet $L(\alpha)$ wenigstens einen der Kreise $S\left(\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \lambda\right)$, $S\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \lambda\right)$, $S\left(\frac{p_n}{q_n}, \lambda\right)$, d. h. wenigstens ein der Brüche $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ der Ungleichung (A) genügt.

Wenn wir $a_n \geq 1$ setzen, so haben wir den (Fordschen) Beweis von dem Hurwitzschen Satz und wenn wir $a \geq 2$ setzen, so haben wir $\lambda_n > \sqrt{8}$. Dies ist der neue Beweis von einem Humbertschen Satz⁽⁷⁾.

3. Erweiterung. Zunächst wollen wir einen Satz von mir⁽⁸⁾ beweisen, der eine Erweiterung der Sätze von Hurwitz und Humbert ist. Setzt man

$$\frac{p_{n+2m}}{q_{n+2m}} = \frac{p_{n-1} \frac{p}{q} + p_{n-2}}{q_{n-1} \frac{p}{q} + q_{n-2}}$$

so liegt p/q auf dem Durchmesser des Halbkreises $L'(\alpha)$. Wenn $S(0, \lambda)$, $S(p/q)$, $S(\infty, \lambda)$ diesen Halbkreis nicht schneidet, so muss

$$\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} < \frac{\lambda}{2} \quad (\text{i})$$

$$\left(\frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} < \left(\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} - \frac{1}{\lambda}\right)^2, \quad (\text{ii})$$

$$\left(\frac{\alpha_n - \alpha_n'}{2} - \frac{p}{q}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} < \left(\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{2} - \frac{1}{\lambda}\right)^2. \quad (\text{iii})$$

Aus (ii) und (iii) folgt

$$\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{\lambda} < \frac{1}{4} \left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - (\alpha_n - \alpha_n')^2 \right\} \quad (\text{iv})$$

$$\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{\lambda} < \frac{q^2}{4} \left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - \left(\frac{2p}{q} - \alpha_n + \alpha_n'\right)^2 \right\}. \quad (\text{v})$$

Wenn wir $\alpha_n + \alpha_n'$ als Konstant halten und $\alpha_n - \alpha_n'$ zunehmen lassen,

⁽⁷⁾ Humbert, Remarques sur certaine suites d'approximation, Liouville Journal, (7) 2 (1916).

⁽⁸⁾ Fukasawa, Über die Kleinsche geom. Darstellung usw., (Fussnote 6) Satz IV.

so nimmt die rechte Seite von (v) zu und die rechte Seite von (iv) ab. Daher wird das Minimum von ihnen maximum, wenn sie einander gleich werden, d. h. wenn

$$\frac{1}{4} \left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - (\alpha_n - \alpha_n')^2 \right\} = \frac{q^2}{4} \left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - \left(\frac{2p}{q} - \alpha_n + \alpha_n' \right)^2 \right\},$$

$$(\alpha_n - \alpha_n')^2 (q^2 - 1) - 4pq(\alpha_n - \alpha_n') + 4p^2 - (q^2 - 1)(\alpha_n + \alpha_n')^2 = 0,$$

$$\alpha_n - \alpha_n' = \frac{2pq \pm \sqrt{4p^2 + (q^2 - 1)^2 (\alpha_n + \alpha_n')^2}}{q^2 - 1}$$

ist. Das obere Vorzeichen der letzten Gleichung gibt den Wert von $\alpha_n - \alpha_n'$ grösser als $\alpha_n + \alpha_n'$, was wir nicht annehmen können. Also haben wir

$$\alpha_n - \alpha_n' = \frac{2pq \pm \sqrt{4p^2 + (q^2 - 1)^2 (\alpha_n + \alpha_n')^2}}{q^2 - 1},$$

$$\frac{1}{4} \left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - (\alpha_n - \alpha_n')^2 \right\} = \frac{pq \sqrt{4p^2 + (q^2 - 1)^2 (\alpha_n + \alpha_n')^2} - p^2 (q^2 + 1)}{(q^2 - 1)^2}.$$

Folglich

$$\frac{\alpha_n + \alpha_n'}{\lambda} < \text{Min} \frac{1}{4} \left[\left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - (\alpha_n - \alpha_n')^2 \right\}, \right.$$

$$\left. \frac{q^2}{4} \left\{ (\alpha_n + \alpha_n')^2 - \left(\frac{2p}{q} - \alpha_n + \alpha_n' \right)^2 \right\} \right]$$

$$\leq \frac{pq \sqrt{4p^2 + (q^2 - 1)^2 (\alpha_n + \alpha_n')^2} - p^2 (q^2 + 1)}{(q^2 - 1)^2},$$

$$\lambda > \frac{(\alpha_n + \alpha_n')(q^2 - 1)^2}{pq \sqrt{4p^2 + (q^2 - 1)^2 (\alpha_n + \alpha_n')^2} - p^2 (q^2 + 1)}. \quad (\text{vi})$$

Wenn $\alpha_n + \alpha_n'$ zunimmt, nimmt die rechte Seite von (vi) ab, weil

$$\frac{d}{dx} \frac{pq \sqrt{4p^2 + (q^2 - 1)^2 x^2} - p^2 (q^2 + 1)}{x}$$

$$= \frac{p}{x^2} \left\{ - \frac{4pq}{x \sqrt{\frac{4p^2}{x^2} + (q^2 - 1)^2}} + (q^2 + 1) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &> \frac{p}{x^2} \left(-\frac{4q^2}{q^2+1} + q^2 + 1 \right) \quad \text{für } x > \frac{p}{q} \\
 &= \frac{p}{x^2} \frac{(q^2-1)^2}{q^2+1} \geq 0
 \end{aligned}$$

ist. Daher wird das Maximum von der rechten Seite von (vi) und $\alpha_n + \alpha_n'$ minimum, wenn sie einander gleich werden, d. h. wenn

$$\begin{aligned}
 \frac{(\alpha_n + \alpha_n')(q^2-1)}{pq \sqrt{4p^2 + (q^2-1)^2(\alpha_n + \alpha_n')^2} - p^2(q^2+1)} &= \alpha_n + \alpha_n', \\
 (\alpha_n + \alpha_n')^2 &= \frac{(p^2 + q^2 + 1)^2 - 4q^2}{p^2 q^2}.
 \end{aligned}$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned}
 &\text{Max} \left\{ \frac{(\alpha_n + \alpha_n')(q^2-1)}{pq \sqrt{4p^2 + (q^2-1)^2(\alpha_n + \alpha_n')^2} - p^2(q^2+1)}, \quad \alpha_n + \alpha_n' \right\} \\
 &\geq \sqrt{\frac{(p^2 + q^2 + 1)^2 - 4q^2}{p^2 q^2}} = \sqrt{\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1 \right)^2 - \frac{4}{p^2}}.
 \end{aligned}$$

Daher genügt wenigstens eins ders Brüche $\frac{p_{n+2m}}{q_{n+2m}}, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ der Ungleichung

$$\left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right| < \frac{1}{\lambda q'^2},$$

sobald

$$\lambda \leq \sqrt{\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 1 \right)^2 - \frac{4}{p^2}}.$$

4. Das Problem der besten Approximationen. Wenn ein Bruch p'/q' die Bedingung erfüllt, dass für alle Brüche p/q mit $q < q'$ immer

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right|$$

sind, so nennen wir, dass dieser Bruch p'/q' die beste Annäherung zu α gibt. Die Frage nach den Brüchen, die die beste Annäherung geben, wurde von *H. J. S. Smith* völlig gelöst.⁽⁹⁾ Sein Satz lautet, wie folgt.

⁽⁹⁾ Note on continued fractions. Messenger of Mathematics, new series, **6** (1877), 1-13. Auch vgl. Fukasawa, Das Problem der besten Approximation usw. (Fussnote (6).

(i) Die Brüche, welche die beste Annäherung geben, müssen die Näherungsbrüche sein, und die Hauptnäherungsbrüche geben immer die beste Annäherung.

(ii) Der Nebennäherungsbruch

$$\frac{p_n'}{q_n'} = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n'}, \quad a_n' < a_n$$

gibt dann und nur dann die beste Annäherung, wenn

$$a_n' > \frac{a_n}{2}$$

oder

$$a_n' = \frac{a_n}{2} \text{ und } \frac{1}{\alpha_{n+1}} < \alpha_n'.$$

(i) ist fast evident, und der Bruch p_n/q_n' gibt dann und nur dann die beste Annäherung, wenn dies näher zu α als p_{n-1}/q_{n-1} liegt. Daher steht der Kern des Beweises dieses Satzes darin, dass der Bruch p_n'/q_n' dann und nur dann näher zu α als p_{n-1}/q_{n-1}

liegt, wenn $a_n' > \frac{a_n}{2}$ oder a_n'

$= a_n/2$, $1/\alpha_{n+1} < \alpha_n'$ ist, d. h.

wenn $a_n' > (\alpha_n - \alpha_n')/2$ ist.

Wir beweisen diese Tatsache durch die Humbertsche Darstellung.

Wir wählen λ , so dass der Kreis $S\left(\frac{q_n'}{p_n'}, \lambda\right)$ die Gerade $L(\alpha)$ be-

Fig. 2.

rührt, und wir konstruieren den Kreis $\overline{S}\left(\frac{p_n'}{q_n'}, \lambda\right)$, der mit $S\left(\frac{p_n'}{q_n'}, \lambda\right)$ in bezug auf $L(\alpha)$ symmetrisch ist. p_n'/q_n' liegt näher zu α als p_{n-1}/q_{n-1} , wenn der Berührungspunkt T von $\overline{S}$ an $y=0$ zwischen p_{n-1}/q_{n-1} und α liegt.

Wenn wir diese Figur wie in den vorigen Paragraphen transformieren, so geht $L(\alpha)$ in $L'(\alpha)$ und p_n'/q_n' in a_n' über. Dabei geht $\overline{S}$ in einen Kreis $\overline{S'}$ über, der an demselben Punkte P wie $S(a_n', \lambda)$ den Halbkreis $L'(\alpha)$ berührt und auch die X -Axe an einem Punkte T' berührt. Wenn T' zwischen α und p_{n-1}/q_{n-1} liegt, so liegt T' zwischen α_n und ∞ . Dies kommt nur dann vor, wenn P näher zu α_n als $-\alpha_n'$ also a_n' näher zu α_n als der Mittelpunkt $(\alpha_n - \alpha_n')/2$ des Kreises $L'(\alpha)$ liegt. Daraus folgt: wenn p_n'/q_n' die beste Annäherung gibt, so muss $a_n' > (\alpha_n - \alpha_n')/2$ sein.

5. Legendresches Kriterium der Näherungsbrüche.⁽⁹⁾ Das Kriterium, ob ein Bruch p/q ein Näherungsbruch von α sei, hat *Legendre* folgendermassen gegeben.

(i) Wenn (a) $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^2}$, (b) $\frac{1}{q^2} > \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2}$ bzw. (c) $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ ist, so ist p/q (a) kein Hauptnäherungsbruch, (b) ein Haupt- oder Nebennäherungsbruch, bzw. (c) ein Hauptnäherungsbruch.

(ii) In dem Falle (b), setzen wir $\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\theta\varepsilon}{q^2}$, wo $0 > \theta > 1$, $\varepsilon = \pm 1$, und finden wir die kleinsten positiven ganzen Zahlen p', q' , so dass $pq' - qp' = \varepsilon$, dann ist p/q ein Hauptnäherungsbruch, wenn und nur wenn

$$1 + \frac{q'}{q} > \frac{1}{\theta}$$

ist.

Wir beweisen diesen Satz auch durch die *Humbertsche* Darstellung. Wir transformieren durch die Modul Substitution

$$z = \frac{pz' + p'}{qz' + q'}$$

(⁹) Legendre, Théorie des nombres.

$\frac{p}{q}$ in ∞ , $\frac{p'}{q'}$ in 0 , ∞ in $-\frac{q'}{q}$, und $L'(\alpha)$. p/q ist Neben- oder Hauptnährungsbruch von α , je nachdem $L(\alpha)$ eine oder zwei von p/q ausgehende Seiten von einem Kreisbogendreiecke mit dem Ecke p/q schneidet. Wenn $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{\lambda q^2}$

ist, so ist der Durchmesser von $L(\alpha)$ gleich λ . Wenn der Durchmesser von $L(\alpha)$ kleiner als eins

ist, so kann $L(\alpha)$ nicht zwei von den Geraden $x = n$ (die von ∞ ausgehende Seiten von den Kreisbogendreiecken mit dem Ecke ∞) schneiden, und wenn er grösser als eins und keiner als zwei ist, schneidet $L(\alpha)$ ein oder zwei von diesen Geraden, und endlich wenn er grösser als zwei ist, so schneidet $L(\alpha)$ zwei von diesen Geraden. Damit ist (i) bewiesen.

Durch die obige Transformation geht α in einen Punkt α' über, wo $\alpha' > 0$ ist. Wenn der Durchmesser, dessen Endpunkte $-\frac{q'}{q}$ und α' sind, grösser als $1 + \frac{q'}{q}$ ist, so ist $\alpha' > 1$ und schneidet $L(\alpha)$ die zwei Geraden $x = 0$ und $x = 1$. Folglich ist p/q ein Hauptnährungsbruch. Damit ist (ii) bewiesen.

Fig. 3.