31. Über den allgemeinen Hauptidealsatz.

Von Shôkichi IYANAGA.

(Eingegangen am 19. Dezember, 1930.)

Furtwängler und Artin haben folgenden Satz bewiesen⁽¹⁾:

Ist K/k relativ Galoissch mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, und k' der zur Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ gehörige Zwischenkörper, so fallen in k' alle Ideale in k in die Hauptklasse nach K .

Der sogenannte Hauptidealsatz:

Alle Ideale im Grundkörper werden im absoluten, vollständigen Klassenkörper (d. h. Strahlklassenkörper mod. 1) Hauptideale.
folgt hieraus unmittelbar.

Im folgenden werden wir sehen, was daraus zu folgern ist, wenn wir statt des absoluten, den allgemeinen Strahlklassenkörper in Betracht ziehen.

In § 1 wird der Hauptsatz formuliert, und der Beweis desselben auf den eines gewissen "Führersatzes" reduziert, der seinerseits aber erst in § 4 erbracht werden soll. Denn, hierzu war eine eingehende Untersuchung über den Führer spezieller, relativ Abelscher Zahlkörper erforderlich (§§ 2,3), die mir übrigens auch ein selbständiges Interesse beanspruchen zu können schien⁽²⁾.

⁽¹⁾ Ph. Furtwängler: Beweis des Hauptidealsatzes. Abh. Math. Sem. Hamburg 7 (1930).

E. Artin: Idealklassen in Oberkörpern, ebenda.

Vgl. auch H. Hasse: Bericht über Reziprozitätsgesetz. Jahresber. d. D. M. V. VI. Ergänzungsband. (1930), S. 173.

⁽²⁾ Dabei stütze ich mich ausschliesslich auf den Bericht von Hasse:

H. Hasse: Bericht über Klassenkörper. Teil Ia. Jahresber. d. D. M. V. 36. (1927), (zit. mit H.)

Zum Vergleich führe ich auch die Originalarbeit von Herrn Prof. Takagi an:

T. Takagi: Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers. Journ. coll. sc. Tokyo. 41, 9. (1920), (zit. mit T.)

Neulich erschien noch eine Arbeit von Hasse:

H. Hasse: Führer, Diskriminante und Verzweigungsgruppen relativ Abelscher Zahlkörper. Journ. Math. 162. (1939), (zit. mit HF.), worin ein naheliegender Gegenstand behandelt ist. Obwohl ich meine Darstellungen in §§ 2, 3 viel kürzer fassen könnte, wenn ich von allen Ergebnissen jener Arbeit vollen Gebrauch machte, entwickle ich hier doch

§ 1.

Formulierung des Hauptsatzes.

1. Bezeichnungen und Benennungen (die übrigens im ganzen Lauf dieser Note gebraucht werden sollen.)

k : Ein algebraischer Zahlkörper; unser Grundkörper. Alle anderen auftretenden Zahlkörper k' , k'' , ..., k_1 , k_2 , ..., k^* , K , K' , ..., u. dgl. sind algebraische Erweiterungen von k . Wir werden manchmal im folgenden die Wörter "über k " in den Ausdrücken wie "Galoissch, Abelsch über k " der Kürze halber auslassen.

$k' \leq$ bzw. $< k''$ bedeute: k' sei Unterkörper bzw. echter Unterkörper von k'' .

Für Abelsches K (über k) gibt es, den Invarianten $l_1^{\nu_1}, l_2^{\nu_2}, \dots, l_m^{\nu_m}$ seiner Galoisgruppe entsprechend, die relativ zyklischen $K_1, K_2, \dots, K_m$ bzw. von Primzahlpotenzgraden $l_1^{\nu_1}, l_2^{\nu_2}, \dots, l_m^{\nu_m}$, aus denen K zusammengesetzt wird: $K = K_1 K_2 \dots K_m$. Wir sagen, der Relativkörper K/k sei vom *Typus* $(l_1^{\nu_1}, l_2^{\nu_2}, \dots, l_m^{\nu_m})$; und nennen $K_1, K_2, \dots, K_m$ die *Basiskörper* von K/k .

$\mathfrak{f}(K/k)$: Der Führer von K/k ⁽³⁾; er ist bekanntlich gleich dem kleinsten gem. Multiplum von $\mathfrak{f}(K_1/k), \dots, \mathfrak{f}(K_m/k)$; in Zeichen:

$$(1) \quad \mathfrak{f}(K/k) = \prod_{i=1}^m \mathfrak{f}(K_i/k).$$

$\mathfrak{F}(K_i/k)$: Der Geschlechtsmodul im (über k zyklischen) K_i ; der bekanntlich bei Galoissubstitutionen von K_i/k invariant bleibt⁽⁴⁾.

Nun wollen wir den "Geschlechtsmodul $\mathfrak{F}(K/k)$ von K/k ⁽³⁾" durch

$$(2) \quad \mathfrak{F}(K/k) = \prod_{i=1}^m \mathfrak{F}(K_i/k)$$

definieren; er ist offenbar invariant bei allen Galoissubstitutionen von K/k .

meinen eignen Gedankengang; die dort benutzten Hilfsmittel der Theorie der p -adischen Zahlen konnte ich durchaus entbehren. Einige übereinstimmende Punkte merke ich in der Fußnote an.

(3) Auch für irgendeinen relativ Abelschen Körper K'/k' (mit beliebigem k' als Grundkörper) verwende ich dieses Zeichen im entsprechenden Sinne.

(4) H. Satz 23; T. Satz 29. Genaueres am Ende von § 2, S. 322.

$a \leq$ bzw. $< b$ (für zwei Ideale ⁽⁵⁾ a, b) bedeute: a sei Teiler bzw. echter Teiler von b .

2. Hauptsatz (Der allgemeine Hauptidealsatz) ⁽⁶⁾:

Im Strahlklassenkörper K mod. $\mathfrak{f}$ fallen alle Ideale im Grundkörper k in den Strahl mod. $\mathfrak{F}(K/k)$.

Zum Beweise bilden wir nach Artin⁽⁷⁾ über K nochmals den Strahlklassenkörper K^* mod. $\mathfrak{F}(K/k)$. Wegen der vermerkten Invarianz von $\mathfrak{F}(K/k)$ ist K^*/k offenbar Galoissch; seine Gruppe sei $\mathfrak{G}$.

Wie wir später sehen werden, besteht aber ein "Führersatz", der lautet:

Es sei K' Abelsch; $K' > K$; K'/K sei zyklisch vom Primzahlgrad. Aus $\mathfrak{f}(K'/k) > \mathfrak{f}(K/k)$ folgt dann $\mathfrak{f}(K'/K) > \mathfrak{F}(K/k)$. Oder: Wenn $\mathfrak{f}(K'/K)$ ein Teiler von $\mathfrak{F}(K/k)$ ist, so bleibt der Führer $\mathfrak{f}(K'/k)$ derselbe wie $\mathfrak{f}(K/k)$.

Daraus folgt, dass kein Zwischenkörper von K^*/K (ausser K) Abelsch sein kann. Denn, wenn es einen solchen Zwischenkörper gäbe, so würde auch ein Körper wie K' oben existieren—ein echter Oberkörper von K , der selbst über k Abelsch wäre, und dessen Führer derselbe bliebe wie bei K/k ; was der Maximaleigenschaft des Strahlklassenkörpers K widerspräche.

Also entspricht dem Körper K als Zwischenkörper von K^*/k die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$. Und nach unserer Konstruktion von K^* ist die Einteilung der Ideale in K nach K^* eben die nach dem Strahl mod. $\mathfrak{F}(K/k)$.

Dank des am Eingang genannten Satzes von Furtwängler und Artin haben wir also nur noch den Führersatz nachzuweisen⁽⁸⁾. Dazu

⁽⁵⁾ Genauer: Primstellenpotenzprodukte; auch die unendlichen Primstellen dürfen darin enthalten sein. Das Wort "Ideal" wird im folgenden stets in diesem Sinne gebraucht.

⁽⁶⁾ Diesen Satz, worin nicht eigentlich von dem "Hauptideal" die Rede ist, will ich nach dem freundlichen Rat von Hrn. Prof. Takagi provisorisch so nennen. Der sog. Hauptidealsatz ist ein Spezialfall des Satzes für $\mathfrak{f}=1$.

⁽⁷⁾ Vgl. Artin a. a. O.

⁽⁸⁾ Oder besser gesagt: ich habe alles, was noch zu beweisen bleibt, im Führersatz zusammengefasst. Bis dahin ist die Methode die von Artin. Er hat damit den Hauptidealsatz vollständig beweisen können, da der Führersatz für $\mathfrak{f}=1$ trivialerweise besteht.

bedürfen wir aber vorweg einiger Ausführungen über speziellere relativ Abelsche Körper.

§ 2.

Über den relativ zyklischen Körper vom Primzahlpotenzgrade.

1. Bezeichnungen (die forthin beibehalten werden):

K : ein Abelscher Körper (relativ über k , wie immer); unser Oberkörper. Künftighin betrachten wir nur die Zwischenkörper $k', \dots, K', \dots$ von K/k , sodass z. B. von $\mathfrak{f}(K'/k')$ ohne irgendwelche Zusatzangabe gesprochen werden darf⁽⁹⁾.

$\mathfrak{p}$: eine Primstelle in k ; ihr Primteiler bzw. in $k', K', K, \dots$ (wenn es davon mehrere gibt, irgendeiner derselben) werde entsprechend bzw. mit $\mathfrak{p}', \mathfrak{P}', \mathfrak{P}, \dots$ bezeichnet.

$\text{Ord}_{\mathfrak{p}} a$: die Ordnungszahl in $\mathfrak{p}$ von a , für a in k ⁽¹⁰⁾.

Eine überwiegende Rolle spielt im folgenden die "*Verzweigungszahl* $V(\mathfrak{p}, K/k)$ von $\mathfrak{p}$ für K/k ", die wir so definieren wollen:

$$V(\mathfrak{p}, K/k) = \text{Ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}(K/k) - 1 \text{ } ^{(11)}.$$

Also: $\mathfrak{f}(K/k) = \Pi \mathfrak{p}^{1+V(\mathfrak{p}, K/k)}$,

und bekanntlich: a) für endliches $\mathfrak{p}$,

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{p}, K/k) &= -1 < 0, & \text{wenn } \mathfrak{p} \text{ nicht in der Diskriminante von } K/k \\ & & \text{aufgeht;} \\ &= 0, & \text{wenn } \mathfrak{p} \text{ zwar in der Diskriminante, aber nicht} \\ & & \text{in dem Grade von } K/k \text{ aufgeht;} \\ &> 0, & \text{wenn } \mathfrak{p} \text{ sowohl in der Diskriminante als auch} \\ & & \text{im Grade von } K/k \text{ aufgeht.} \end{aligned}$$

und b) für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\infty}$,

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{p}_{\infty}, K/k) &= 0, & \text{wenn } \mathfrak{p}_{\infty} \text{ in } K \text{ in Primstellen 2-ten Relativ-} \\ & & \text{grades zerfällt;} \\ &= -1 < 0 & \text{in allen andern Fällen.} \end{aligned}$$

Im Falle, wo K/k relativ zyklisch vom Primzahlgrad ist, ist dies in der Literatur üblich mit v bezeichnete Zahl, die bekanntlich gleich

⁽⁹⁾ Dass $K' \geq k'$ ist, ist schon mit der Schreibung K'/k' gemeint.

⁽¹⁰⁾ $\text{Ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{A}$ u.s.w. sollen entsprechende Bedeutungen für $\mathfrak{P}, \mathfrak{A}$ im K u.s.w. haben.

⁽¹¹⁾ $V(\mathfrak{p}', K'/k')$ soll entsprechende Bedeutung für irgendwelche Zwischenkörper K', k' haben.

$\text{Ord}\mathfrak{P}\left(\frac{\sigma\Pi}{\Pi}-1\right)$ ist, worin Π eine Zahl in K sodass $\text{Ord}\mathfrak{P}(\Pi)=1$, und σ die erzeugende Galoissubstitution von K/k bedeutet ⁽¹²⁾.

2. Bezeichnungen, nur für diesen Paragraphen:

K sei hier zyklisch von Primzahlpotenzgrad l^h .

K_v : der Zwischenkörper vom Grade l^v ;

$K_t=K_{t(\mathfrak{p})}$: der Trägheitskörper von $\mathfrak{p}$;

$g=g(\mathfrak{p})=h-t(\mathfrak{p})$.

Für $\mathfrak{p}$ mit $g(\mathfrak{p}) > 0$ setzen wir

$v_1=V(\mathfrak{P}_t, K_{t+1}/K_t)$, $v_2=V(\mathfrak{P}_{t+1}, K_{t+2}/K_{t+1})$,, $v_g=V(\mathfrak{P}_{h-1}, K/K_{h-1})$ ⁽¹³⁾.

3. Satz 1. a) Für endliches $\mathfrak{p}$,

$V(\mathfrak{p}, K/k)=-1 < 0$, wenn $g(\mathfrak{p})=0$;

$=v_1$, wenn $g(\mathfrak{p})=1$;

$=v_1 + \sum_{\mu=2}^g \frac{v_\mu - v_{\mu-1}}{l^{\mu-1}}$, wenn $g(\mathfrak{p}) > 1$ ⁽¹⁴⁾.

Im letzteren Falle $g > 1$ gelten die Kongruenzen: ⁽¹⁴⁾

$v_\mu \equiv v_{\mu-1} \pmod{l^{\mu-1}}$. ($\mu=2, 3, \dots, g$.)

b) Für $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_\infty$,

$V(\mathfrak{p}_\infty, K/k)=-1$ oder 0 , je nachdem $g(\mathfrak{p}_\infty) \neq 1$ oder $=1$.

Die ersten beiden Behauptungen, sowie die letztere, sind längst bekannt. Für die dritte, von Hrn. Sugawara herstammende Formel hat der Verfasser auch einen Beweis veröffentlicht ⁽¹⁵⁾. Es sei mir gestattet, noch an dieser Stelle den Beweis unter spezieller Annahme $h=g(\mathfrak{p})=2$ auszuführen, (der sich sofort auf den allgemeinsten Fall übertragen lässt,) und zu zeigen, dass der Satz im wesentlichen auf

⁽¹²⁾ Vgl. H. Satz 3. In Anknüpfung an diesen bekannten Begriff, und zur Vereinfachung gewisser im folgenden vorkommenden Formeln habe ich diese sonst etwas unnatürgemäß erscheinende Bezeichnung der Verzweigungszahlen eingeführt.

⁽¹³⁾ Wenn es auch mehrere $\mathfrak{P}_t$ u.s.w. geben kann, ist es bekannt, dass die Werte von $V(\mathfrak{P}_t, K_{t+1}/K_t)$ u.s.w. nicht davon abhängen, sodass diese Zahlen mit $\mathfrak{p}$ fest bestimmt sind. Vgl. H. S. 106 unten.

⁽¹⁴⁾ Vgl. HF. S. 171, Formel (v).

⁽¹⁵⁾ M. Sugawara: Über den Führer eines relativ Abelschen Zahlkörpers. Proc. Imp. Acad. Japan. 2, 35. (1926). S. Iyanaga: Über den Führer eines relativ zyklischen Zahlkörpers. Ebenda 5, 3. (1929).

einer Verschärfung des Geschlechtsatzes beruht ⁽¹⁶⁾.

4. Es sei also $h=2$, $g(p)=2$, $t(p)=0$; s : die erzeugende Galoissubstitution von K_1/k .

Unser Ausgangspunkt ist der folgende "verschärfte Geschlechtsatz bzgl. p ", dessen Richtigkeit aus dem Beweise von Satz 21 H. ⁽¹⁷⁾ ohne weiteres einleuchtet:

i) Die Relationen:

$$\theta \equiv A^{1-s} \quad \text{mod. } \mathfrak{P}_1^{v_1+B}$$

(θ, A : die Zahlen in K_1)

$$\text{und} \quad N_{K_1/k}(\theta) \equiv 1 \quad \text{mod. } p^{v_1+b}$$

bedingen sich gegenseitig, wenn das kleinste Multiplum von $\mathfrak{P}_1^B$ in k gleich p^b ist; d. h. wenn $1+(b-1)l \leq B \leq bl$ ist.

Wir setzen $v_1+b=n$, $v_1+B=N(n)$.

$N(n)$ ist also eine l -wertige Funktion von n , mit dem Wertvorra (für ein bestimmtes n):

$$N_*(n) = 1 + (b-1)l + v_1, \quad 2 + (b-1)l + v_1, \dots, \quad N^*(n) = bl + v_1. \\ (n = b + v_1).$$

Daraus folgt, wie Satz 22 H ⁽¹⁸⁾:

ii) Es sei $\mathfrak{m} = \Pi p^a \Pi p_\infty \Pi q^m$ ein Ideal in k , wobei $t(p) = t(p_\infty) = 0$, $n \geq 1 + v_1$; $t(q) > 0$, $m \geq 0$ sein soll. Wenn wir dafür $\mathfrak{M}(\mathfrak{m}) = \Pi \mathfrak{P}_1^{N(n)} \Pi q^m$ setzen, so gilt: Unter den Strahlklassen mod. $\mathfrak{M}(\mathfrak{m})$ in K_1 fallen bei der Relativnormbildung von K_1/k alle und nur die in den Strahl mod. $\mathfrak{m}$ in k , die als symbolische $(1-s)$ -te Potenz der Klasse dargestellt werden können. ($\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{m})$ ist kein bestimmtes Ideal, liegt aber im "Intervall": $\mathfrak{M}_* = \Pi \mathfrak{P}_1^{N_*(n)} \Pi q^m \leq \mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}^* = \Pi \mathfrak{P}_1^{N^*(n)} \Pi q^m$.)

Und ferner, wie Satz 23 H ⁽¹⁹⁾:

iii) Um die Idealgruppe bzgl. K in k zu erklären, genügt es, als Modul ein Ideal $\mathfrak{m}$ zu nehmen, von der Art, dass

$$\mathfrak{M} \mathfrak{m} \geq \mathfrak{f}(K/K_1).$$

Umgekehrt aber sieht man leicht ein ⁽²⁰⁾:

⁽¹⁶⁾ Dieser wahre Beweisgrund trat in der ehemaligen Darstellung des Verfassers nicht deutlich hervor.

⁽¹⁷⁾ Oder T. S. 59 Hilfssatz 3. Vgl. auch HF. S. 177 I., II. und Anmerkung 2.

⁽¹⁸⁾ Oder T. Satz 22.

⁽¹⁹⁾ Oder T. Satz 29.

⁽²⁰⁾ Vgl. Iyanaga a.a.O. Hilfssatz.

iii') Für jeden Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ der genannten Idealgruppe gilt notwendig $\mathfrak{M}(\mathfrak{m}) \geq \mathfrak{f}(K/K_1)$, also insbesondere

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{f}(K/k)) \geq \mathfrak{f}(K/K_1).$$

Da iii), iii') für jedes $\mathfrak{M}$ im Intervall $\mathfrak{M}_* \leq \mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}^*$ gilt, setze ich in iii) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$, und in iii') $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_*$ um die beiderseitigen Abschätzung für $V(\mathfrak{p}, K/k)$ zu gewinnen.

Weil $\mathfrak{f}(K/k)$ der kleinste zu betrachtende Erklärungsmodul ist, folgt aus iii) mit Rücksicht auf $V(\mathfrak{P}_1, K/K_1) = v_2$ eine Abschätzung von $n_* = V(\mathfrak{p}, K/k) = b_* + v_1$ nach oben:

$$N^*(n_* - 1) < 1 + v_2, \quad (b_* - 1)l + v_1 \leq v_2, \quad b_* \leq 1 + \frac{v_2 - v_1}{l},$$

$$n_* \leq 1 + v_1 + \frac{v_2 - v_1}{l}.$$

Andrerseits folgt aus iii')

$$N_*(n_*) \geq 1 + v_2, \quad 1 + l(b_* - 1) + v_1 \geq 1 + v_2, \quad b_* \geq 1 + \frac{v_2 - v_1}{l},$$

$$n_* \geq 1 + v_1 + \frac{v_2 - v_1}{l}.$$

Also in der Tat, $n_* = 1 + v_1 + \frac{v_2 - v_1}{l}$;

und da n_* ganz ist, $v_2 \equiv v_1 \pmod{l}$.

5. Für $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{f}(K/k)$ gibt es, wie es für $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{f}(K_1/k)$ die Ideale $\mathfrak{M}(\mathfrak{m})$ in K_1 gab, mehrere Ideale $\mathfrak{M}'(\mathfrak{m})$ in K , für die dem ii) (für K_1/k) entsprechender Satz für K/k besteht. Wir wollen aber im folgenden nur die kleinsten unter solchen Idealen $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_*(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}'_*(\mathfrak{m})$ betrachten, und nur sie die *Geschlechtsmoduln* für $\mathfrak{m}$ in K_1 , K nennen. Sie sind mit $\mathfrak{m}$ ganz bestimmte Ideale.

$$\text{Für} \quad \mathfrak{m} = \Pi \mathfrak{p}^{1+v_1+\frac{v_2-v_1}{l}+b_1} \Pi \mathfrak{p}_\infty \Pi \mathfrak{p}'^{1+v_1'+b_2} \Pi \mathfrak{p}'_\infty \Pi \mathfrak{q}^m$$

wobei $t(\mathfrak{p}) = t(\mathfrak{p}_\infty) = 0$, $t(\mathfrak{p}') = t(\mathfrak{p}'_\infty) = 1$, $t(\mathfrak{q}) = 2$ sein soll,

$$\text{haben wir} \quad \mathfrak{M}_1(\mathfrak{m}) = \Pi \mathfrak{P}_1^{1+v_2+b_1l} \Pi \mathfrak{p}'^{1+v_1'+b_2} \Pi \mathfrak{p}'_\infty \Pi \mathfrak{q}^m,$$

$$\mathfrak{M}_2(\mathfrak{m}) = \Pi \mathfrak{P}^{1+v_2+b_1l^2} \Pi \mathfrak{P}'^{1+v_1'+b_2l} \Pi \mathfrak{q}^m.$$

Also insb. für $\mathfrak{m} = \mathfrak{f}(K/k)$, $b_1 = b_2 = m = 0$, $\Pi \mathfrak{p}_\infty = 1$,

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M}_1(\mathfrak{f}(K/k)) = \Pi \mathfrak{P}_1^{1+v_2} \Pi \mathfrak{p}'^{1+v_1'} \Pi \mathfrak{p}'_\infty = \mathfrak{f}(K/K_1)$$

$$\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{M}_2(\mathfrak{f}(K/k)) = \Pi \mathfrak{P}^{1+v_2} \Pi \mathfrak{P}'^{1+v_1'}.$$

Dies verallgemeinernd erhalten wir den Satz:

Satz 2. Für die Geschlechtsmoduln $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_{n-1}, \mathfrak{F}$ für $\mathfrak{f}(K/k)$ bzw. in $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K$ gelten die Formeln⁽²¹⁾:

$$\mathfrak{F}_i = \mathfrak{f}(K/K_i),$$

$$\text{Ord}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{F} = 1 + v_{\mathfrak{p}}, \quad \text{Ord}_{\mathfrak{p}_{\infty}} \mathfrak{F} = 0.$$

“Der Geschlechtsmodul $\mathfrak{F}(K_i/k)$ in K_i ,” von dem wir in § 1 gesprochen haben, ist ein Ideal wie obiges $\mathfrak{F}$ in K ; genauer sollte ich dort so erklären: $\mathfrak{F}(K_i/k)$ heiße der Geschlechtsmodul (im in § 2, 5 auszulegenden Sinne) in K_i für den Führer $\mathfrak{f}(K_i/k)$.

§ 3.

Über den Relativkörper vom Typus $(l_1^{\nu_1}, l_2^{\nu_2})$

1. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle: $\nu_1 = \nu_2 = 1$.

Es sei K/k vom Typus (l_1, l_2) ; K_1, K_2 seien die Basiskörper; σ_1 bzw. σ_2 die erzeugende Galoissubstitution von K_1/k bzw. K_2/k .

Satz 3. Es sei

$$v = V(\mathfrak{p}, K_1/k), \quad u = V(\mathfrak{p}, K_2/k),$$

$$\bar{v} = V(\mathfrak{P}_2, K/K_2), \quad \bar{u} = V(\mathfrak{P}_1, K/K_1).$$

Es ist dann aus der Kenntnis von v, u , über $\bar{v}$ (und $\bar{u}$) folgendes zu schliessen:

a) Für endliches $\mathfrak{p}$,

I. Wenn $u < 0$, so ist $\bar{v} = v$.

II. Wenn $v < \text{bzw.} = 0$, so ist $\bar{v} < \text{bzw.} = 0$.

III. Wenn $u \geq 0, v > 0$, so ist

i) $\bar{v} = v$, wenn $v < u$,

ii) $0 < \bar{v} = \bar{u} \leq v = u$, wenn $v = u$,

iii) $\bar{v} = v + (l_2 - 1)\delta = u + l_2\delta$, wenn $v = u + \delta > u$.

b) Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\infty}$ ist $\bar{v}$ dann und nur dann $= 0$, wenn $v > u$, d.h. wenn $v = 0$ und $u < 0$; sonst ist $\bar{v} < 0$.

Beweis: a) Nach der bekannten Differenzenformel⁽²²⁾ besteht eine Relation:

$$(1) \quad \begin{aligned} & (\bar{u} + 1)(l_2 - 1) + (v + 1)l_2^*(l_1 - 1) \\ & = (\bar{v} + 1)(l_1 - 1) + (u + 1)l_1^*(l_2 - 1) \end{aligned}$$

⁽²¹⁾ Die erste, im folgenden nie benutzte Formel notiere ich hier, da ich sie an sich für etwas Interessantes halte. Die zweite wird in § 4 vielfach gebraucht werden.

⁽²²⁾ Vgl. H. S. 294 Formel (12).

wo $\begin{cases} l_1^* \\ l_2^* \end{cases} = 1$ oder $\begin{cases} l_1 \\ l_2 \end{cases}$, je nachdem $\begin{cases} \bar{v} \\ \bar{u} \end{cases} < 0$ oder ≥ 0 .

I. $u = -1 < 0$. Dann fällt der Trägheitskörper von $\mathfrak{p}$ für K_2/k mit K_2 zusammen, also der von $\mathfrak{P}_1$ für K/K_1 mit K . Folglich $\bar{u} < 0$; nach (1) ist alsdann $\bar{v} = v$.

II. $v < 0$ bzw. $= 0$. Nach einer ähnlichen Betrachtung der Trägheits- bzw. Verzweigungskörper folgt die Behauptung.

III. $u \geq 0, v > 0$. Also auch $\bar{u} \geq 0, \bar{v} > 0$; sodass die Formel (1) die Gestalt bekommt:

$$(1') \quad (\bar{v} - l_2 v)(l_1 - 1) = (\bar{u} - l_1 u)(l_2 - 1).$$

Wir unterscheiden noch zwei Fälle: $\alpha)$ $l_1 \neq l_2$ und $\beta)$ $l_1 = l_2 = l$.

$\alpha)$ $l_1 \neq l_2$. Dann ist nach Annahme $\mathfrak{p} | l_1, \mathfrak{p} \nmid l_2$; also notwendig $u = \bar{u} = 0$. Wir haben nur den Fall iii) vor uns, und aus (1') folgt sodann $\bar{v} = l_2 v = u + l_2 \delta$.

$\beta)$ $l_1 = l_2 = l$. Hier ist notwendigerweise auch $u > 0$; und die Formel (1') wird noch einfacher:

$$(1'') \quad \bar{v} - l v = \bar{u} - l u.$$

Eine weitere Relation zwischen v und $\bar{v}$ erhalten wir aus den Gleichungen:

$$v = \text{Ord}_{\mathfrak{P}_1} \left(\frac{\sigma_1 \Pi^{(1)}}{\Pi^{(1)}} - 1 \right), \quad \bar{v} = \text{Ord}_{\mathfrak{P}} \left(\frac{\sigma_1 \Pi}{\Pi} - 1 \right),$$

worin $\Pi^{(1)}, \Pi$ die Zahlen bzw. in K_1, K mit der Ordnungszahl 1 in $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}$ sind.

i) $v < u$. Nach (1'') ist dann $\bar{v} < \bar{u}$.

Wir setzen $\frac{\sigma_1 \Pi}{\Pi} - 1 = \Pi_{\bar{v}}$, ($\Pi_{\bar{v}}$ von der Ordnungszahl $\bar{v}$ in $\mathfrak{P}$) und bilden die Relativnorm von K/K_1 der Zahl $\frac{\sigma_1 \Pi}{\Pi} = 1 + \Pi_{\bar{v}}$.

Einerseits ist:

$$N \frac{\sigma_1 \Pi}{\Pi} = \frac{\sigma_1 N \Pi}{N \Pi} = \frac{\sigma_1 \Pi^{(1)}}{\Pi^{(1)}} = 1 + \Pi_{\bar{v}}^{(1)}, \quad (\Pi_{\bar{v}}^{(1)} \text{ in } K_1, \text{Ord}_{\mathfrak{P}_1}(\Pi_{\bar{v}}^{(1)}) = v),$$

und andererseits ist nach der Formel (15 α) H. § 10, ⁽²³⁾ unter Beachtung von $\bar{v} < \bar{u}$,

$$\begin{aligned} N(1 + \Pi_{\bar{v}}) &\equiv 1 + N(\Pi_{\bar{v}}) \pmod{\mathfrak{P}_1^{1+\bar{v}}} \\ &= 1 + \Pi_{\bar{v}}^{(1)} \quad (\Pi_{\bar{v}}^{(1)} \text{ in } K_1, \text{Ord}_{\mathfrak{P}_1}(\Pi_{\bar{v}}^{(1)}) = \bar{v}), \end{aligned}$$

(23) Oder T. S. 32 Formel (2).

sodass $v = \bar{v}$, wie behauptet.

Aus (1'') folgt ferner:

$$\bar{u} = v + l(u - v) = u + (l - 1)(u - v)$$

Wenn man hier die Rolle von u und v vertauscht, beweist das unsere Behauptung unter iii).

ii) $v = u$. Also nach (1'') $\bar{u} = \bar{v}$.

Die Behauptung ergibt sich nach ähnlichen Schlüssen wie oben mit Hilfe der Formel (15 β) H. a.a.O. (24).

b) $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$. Hierfür ergeben sich leicht die Behauptungen nach einfachen Betrachtungen der konjugierten Körper.

2. Aus dem Satz 3 a) I, b) folgt insb., dass wenn auch mehrere $\mathfrak{P}_2$ sich finden können, der Wert von $\bar{v} = V(\mathfrak{P}_2, K/K_2)$ nicht davon abhängt; was wir nach Anmerkung (13) S. 319 und der Formel (1) § 1 gleich so verallgemeinern können:

Satz 4. *Beim beliebigen relativ Abelschen K/k , und für irgendwelche seiner Zwischenkörper k', K' , hängt der Wert von $V(\mathfrak{p}', K'/k')$ nicht von $\mathfrak{p}'$, nur von $\mathfrak{p}$ ab, gäbe es auch in k' mehrere Primteiler $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$.*

Demnach dürfen wir statt $V(\mathfrak{p}', K'/k')$ einfacher $V(\mathfrak{p}, K'/k')$ schreiben, oder aber, da wir uns im folgenden $\mathfrak{p}$ immer als festgelegt denken wollen, auch noch kürzer $V(K'/k')$.

3. Wir behandeln jetzt den allgemeineren Fall: ν_1 sei beliebig; ν_2 aber = 1.

Um den Sachverhalt durchsichtiger zu machen, und um dabei auf viele Erläuterungswörter verzichten zu können, benutzen wir Figuren. Z. B. bringt die nachstehende Fig. 2 den Relativkörper vom zu betrach-

Fig. 2.

(24) Oder T. S. 32 Formel (3).

tenden Typus (l_1^v, l_2) dar. Die darin eingeschriebenen Buchstaben u, v bedeuten die Verzweigungszahlen; nämlich:

$$\begin{aligned} v &= V(K_1/k), & u &= V(K_2/k), & v_* &= V(K_1/K_1^*), \\ \bar{v} &= V(K/K_2), & \bar{v}^* &= V(K/K^*). \end{aligned}$$

Man wolle hier wie im folgenden die "Lage" der Zwischenkörper u. s. w. ohne Erläuterung verstehen.

Satz 5. Über die in der Fig. 2 eingezeichneten Verzweigungszahlen gilt folgendes:

- a) Für endliches $\mathfrak{p}$,
 - I. Wenn $u < 0$, so ist $\bar{v} = v$.
 - II. Wenn $v < \text{bzw.} = 0$, so ist $\bar{v} < \text{bzw.} = 0$.
 - III. Wenn $u \geq 0, v > 0$, so ist
 - i) $\bar{v} = v < u$, wenn $v < u$,
 - ii) $0 < \bar{v} \leq v = u$, wenn $v = u$,
 - iii) $\bar{v} = u + l_2 \delta = v + (l_2 - 1) \delta, \bar{v}_* > v_*$ und $\bar{v} > u$, wenn $v = u + \delta > u$.
- b) Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ ist $\bar{v}$ dann und nur dann $= 0$, wenn $v > u$, d.h. wenn $v = v^* = 0, u < 0$; sonst ist $\bar{v} < 0$.

Beweis: Wir übergehen die Trivialfälle: a) I, II, III für $l_1 \neq l_2$, sowie b), die sich entweder genau wie bei Satz 3, oder mit eventueller Hilfe jenes Satzes und des Satzes 1 ganz leicht erledigen lassen.

Auch für den allein zu behandelnden Fall a) III $l_1 = l_2 = l$, beweist sich der Satz fast mechanisch durch wiederholte Anwendungen der Sätze 1 und 3, wie wir an zwei typischen Beispielen dartun wollen. Den Beweis durch vollständige Induktion formal auszuführen, wäre eine zwar nicht wesentlich schwierige, jedoch zu umständlich zu schreibende Arbeit.

Erstes Beispiel: Es sei $v_1 = 6, v = u + \delta > u$. Man übersehe die übrige vorauszusetzende Sachlage aus der Fig. 3 auf der nächsten Seite.

k_0 sei der Trägheitskörper von $\mathfrak{p}$ für K_1/K , also $v_0 < 0, v_1 > 0$. Wir setzen ferner:

$$\begin{aligned} V_i &= V(k_i/k), & \bar{V}_i &= V(\bar{k}_i/\bar{k}) & i &= 0, 1, 2, \dots, 5, \\ \alpha_0 &= v_1, & \alpha_i &= V_{i+1} - V_i, & & \\ \bar{\alpha}_0 &= \bar{v}_1, & \bar{\alpha}_i &= \bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i & \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha_0 &= v_1, \\ \bar{\alpha}_0 &= \bar{v}_1, \end{aligned}} \right\} & i &= 1, 2, 3, 4, \\ \delta_i &= V_{i+1} - u, & & & i &= 0, 1, 2, 3, 4; \end{aligned}$$

sodass insbesondere:

$$V_5 = v, \quad \bar{V}_5 = \bar{v}, \quad \delta_4 = \delta$$

Fig. 3.

$$V_i = \sum_{\mu=0}^{i-1} \alpha_\mu, \quad \bar{V}_i = \sum_{\mu=0}^{i-1} \bar{\alpha}_\mu \quad (^{25}), \quad i=1, 2, \dots, 5,$$

$$\delta_i = \sum_{\mu=0}^i \alpha_\mu - u \quad i=0, 1, \dots, 4,$$

und nach Satz 1,

$$v_i = \sum_{\mu=0}^{i-1} \alpha_\mu l^\mu, \quad \bar{v}_i = \sum_{\mu=0}^{i-1} \bar{\alpha}_\mu l^\mu \quad i=1, \dots, 4.$$

Nun bilden die Zahlen $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_4$, wegen $\delta_i = \delta_{i-1} + \alpha_i$, eine monoton zunehmende Zahlenfolge; es gibt also die erste Zahl der Folge, die selbst nicht negativ ist, und von welcher an alle nachfolgenden positiv sein werden. Wir nehmen in diesem Beispiele an, es sei dies δ_2 , und zwar $\delta_2 > 0$.

Nach Satz 3 berechnen wir dann die Zahlen $u_i, \bar{v}_i, V_i$, und $\bar{V}_i$ folgendermassen:

0. $\bar{k}_0/k$ $v_0 < 0$ (Trivialfall!)

Also $\bar{v}_0 = v_0 = \bar{V}_0 = V_0 = -1, \quad u_1 = u.$

1. $\bar{k}_1/k$ Nach Annahme ist $\delta_0 < 0$, d.h. $V_1 < u$;
 $v_1 = \alpha_0 = u + \delta_0 = u_1 + \delta_0 < u_1.$

Nach Satz 3 a) III i) ergibt sich sodann

$\bar{v}_1 = v_1, \quad \bar{\alpha}_0 = \alpha_0, \quad \bar{V}_1 = V_1$ (Behauptung für $\bar{k}_1/k$, Fall i)).

Nach Satz 3 a) III iii) erhalten wir ferner

$u_2 = v_1 + l(u_1 - v_1) = v_1 - \delta_0 l.$

2. $\bar{k}_2/k$ Nach Annahme ist $\delta_1 < 0$, $V_2 < u$;

$v_2 = v_1 + \alpha_1 l = u_2 + l(\alpha_1 + \delta_0) = u_2 + \delta_1 l < u_2.$

Also wieder nach 3. i) und iii) ⁽²⁶⁾

⁽²⁵⁾ Nach Satz 1 ist offenbar $v_1 = V_1, \quad \bar{v}_1 = \bar{V}_1.$

⁽²⁶⁾ Abkürzung für Satz 3 a) III i) und iii).

$$\bar{v}_2 = v_2, \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1, \quad \bar{V}_2 = V_2 \quad (\text{Beh. für } \bar{k}_2/k, \text{ Fall i)})$$

$$u_3 = v_2 - \delta_1 l^2.$$

3. $\bar{k}_3/k$ Hier wird nach Annahme $\delta_2 > 0, V_3 > u$;

$$v_3 = v_2 + \alpha_2 l^2 = u_3 + \delta_2 l^2 > u_3.$$

Also nach 3. iii)

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_3 &= u_3 + \delta_2 l^3 = v_3 + \delta_2 l^2(l-1) > u, \text{ und } > v_3, \\ \bar{V}_3 &= u + \delta_2 l = V_3 + \delta_2(l-1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Beh. für } \bar{k}_3/k, \text{ Fall iii)})$$

denn es ist:

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\bar{v}_3 - \bar{v}_2}{l^2} = \alpha_2 + \delta_2(l-1),$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{V}_3 &= \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - \delta_2 + \delta_2 l = u + \delta_2 l, \\ \bar{V}_3 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned} \right.$$

Nach 3. i) ist ferner

$$u_4 = u_3 = v_3 - \delta_2 l^2.$$

4. $\bar{k}_4/k$ Es ist

$$v_4 = v_3 + \alpha_3 l^3 = u_4 + \delta_2 l^2 + \alpha_3 l^3 > u_4.$$

Also nach 3. iii)

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_4 &= u_4 + \delta_2 l^3 + \alpha_3 l^4 = v_4 + (\delta_2 l^2 + \alpha_3 l^3)(l-1) > u, \text{ und } > v_4, \\ \bar{V}_4 &= u + \delta_3 l = V_4 + \delta_3(l-1), \end{aligned} \right\} \quad (\text{Beh. für } \bar{k}_4/k, \text{ Fall iii)})$$

denn

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{\bar{v}_4 - \bar{v}_3}{l^3} = \alpha_3 l,$$

$$\bar{V}_4 = \bar{V}_3 + \alpha_3 l = u + (\alpha_3 + \delta_2)l = u + \delta_3 l.$$

Ferner kommt nach 3. i)

$$u_5 = u_4 = u_3 = v_3 - \delta_2 l^2.$$

5. $\bar{k}_5/k$ Es ist

$$v_5 = v_4 + \alpha_4 l^4 = u_5 + \delta_2 l^2 + \alpha_3 l^3 + \alpha_4 l^4 > u_5.$$

Also wieder nach 3. iii)

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_5 &= u_5 + \delta_2 l^3 + \alpha_3 l^4 + \alpha_4 l^5 > u \text{ und } > v_5, \\ \bar{V}_5 &= u + \delta_4 l = V_5 + \delta_4(l-1), \end{aligned} \right\} \quad (\text{Beh. für } \bar{k}_5/k, \text{ Fall iii)})$$

denn

$$\bar{\alpha}_4 = \alpha_4 l.$$

Zweites Beispiel: Es sei $\nu_1=3, v=u+\delta > u$. Weitere Voraussetzungen werden durch die Fig. 4 (auf der folgenden Seite) dargelegt.

Es stimme der Trägheitskörper von p für K_1/k mit k überein, sodass schon $v_1 > 0$. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen V, α, δ , u.s.w. wie vorher, nur dass hier $\delta_0 < 0, \delta_1=0, \delta_2 > 0$ sein soll.

1. $\bar{k}_1/k$ Nach Annahme ist
 $\delta_0 < 0$, d.h. $v_1 < u_1$,
 also $\bar{v}_1 = v_1$, $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$, $\bar{V}_1 = V_1$,
 und $u_2 = v_1 - \delta_0 l$.
 2. $\bar{k}_2/k$ Hier ist $\delta_1 = 0$, $V_2 = u_1$,
 $v_2 = v_1 + \alpha_1 l = u_2 + \delta_1 l = u_2$.

Fig. 4.

Nach 3. ii) ist dann

$$\bar{v}_2 = u_3 \leq v_2 (= u_2), \quad \bar{V}_2 \leq V_2 \quad (\text{Beh. f\"ur } \bar{k}_2/k, \text{ Fall ii)})$$

denn
$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{l} \leq \frac{v_2 - v_1}{l} = \alpha_1.$$

Es sei gesetzt also

$$\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 = \varepsilon \geq 0,$$

sodass $\bar{v}_2 = u_3 = u_2 - \varepsilon l = v_2 - \varepsilon l$.

3. $\bar{k}_3/k$ Es ist $v = V_3 > u_1$,

$$v_3 = v_2 + \alpha_2 l^2 = u_3 + \varepsilon l + \alpha_2 l^2 > u_3,$$

also $\bar{v}_3 = u_3 + (v_3 - u_3)l = u_3 + \varepsilon l^2 + \alpha_2 l^3$
 $= v_3 + (\varepsilon l + \alpha_2 l^2)(l-1) > u$ und $> v_3$,
 $\bar{V}_3 = V_3 + \delta_2(l-1),$ } (Beh. f\"ur $\bar{k}_3/k$,
 Fall iii))

denn
$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\bar{v}_3 - \bar{v}_2}{l^2} = \varepsilon + \alpha_2 l = \varepsilon + \delta_2 l,$$

und folglich

$$\begin{aligned} \bar{V}_3 &= \sum_{\mu=0}^2 \bar{\alpha}_\mu = \alpha_0 + (\alpha_1 - \varepsilon) + (\varepsilon + \delta_2 l) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + (l-1)\delta_2. \end{aligned}$$

4. Es seien nunmehr v_1 und v_2 beide beliebig angenommen.

Satz 6 ⁽²⁷⁾. Über die in der Fig. 5 eingezeichneten Verzweigungszahlen gilt folgendes:

- a) Für endliches p ,
 I. Wenn $u < 0$, so ist $\bar{v} = v$.
 II. Wenn $v < \text{bzw.} = 0$, so ist $\bar{v} < \text{bzw.} = 0$.
 III. Wenn $u \geq 0$, $v > 0$, so ist
 i) $0 < \bar{v} < u_*$, wenn $v < u$,

⁽²⁷⁾ Vgl. HF. Satz 2. Die Sätze 3,5 sind fast Spezialfälle dieses Satzes. (Nur für den Fall III i) ist dort noch Genaueres angegeben.) Nur zur Bequemlichkeit der Beweis-anordnung habe ich diese Sätze einzeln aufgestellt.

Fig. 5.

- ii) $0 < \bar{v} \leq u_*$, wenn $v = u$,
 iii) $\bar{v} = u_* + l_2^2 \delta > v$, $\bar{v}_* > v_*$ und $> u_*$, wenn $v = u + \delta > u$.
 b) Für $p = p_\infty$.
 $\bar{v} = \bar{v}_* = 0$ dann und nur dann, wenn $v > u$; d.h. wenn
 $v = v_* = 0$, $u = u_* < 0$; sonst ist
 $\bar{v} = \bar{v}_* < 0$.

Der Beweis soll wieder nur für den Fall a) III $l_1 = l_2 = l$ an einem Beispiel (Fig. 6) geführt werden.

In dem Beispiel sei $\nu_2 = 2$, ν_1 beliebig.

i) $v < u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}$.

Fig. 6.

Es sei aber $v > u_1$.

Wir setzen

$$v = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} - \delta_2$$

$$= u_1 + \delta_1, \quad \delta_1, \delta_2 > 0,$$

also $u_2 - u_1 = l(\delta_1 + \delta_2)$.

Nach Satz 5 folgt sodann

$$v' = u_1 + \delta_1 l = u_2 - \delta_2 l < u_2,$$

$$0 < \bar{v} = v' < u_2 = u_*.$$

ii) $v = u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}$, also $v > u_1$.

Nach Satz 5 ist dann

$$v' = u_1 + l \frac{u_2 - u_1}{l} = u_2,$$

$$0 < \bar{v} \leq u_*.$$

$$\text{iii)} \quad v = u + \delta = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} + \delta > u.$$

Dann ist wieder nach Satz 5

$$\begin{aligned} v' &= u_2 + \delta l > v, \quad \bar{v} = u_2 + \delta l^2 > v' > v, \\ \bar{v}_* &> v'_* > v_*. \end{aligned}$$

Es ist

$$\bar{v}_* > u_*,$$

da ja nach Satz 1, $\bar{v}_* \geq \bar{v}$.

§ 4.

Beweis des Führersatzes.

1. Um den Führersatz bequemer behandeln zu können, führen wir noch eine Bezeichnungsweise ein.

Es seien $K_1, K_2, \dots, K_m$ die Basiskörper von K/k ; K_0 möge den Grundkörper k selbst bedeuten.

Die Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \dots, m$ bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben, und setzen:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda} &= K_\alpha K_\beta \dots K_\lambda; \\ v(\alpha/\beta\gamma\dots\lambda) &= V(K_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}/K_{\beta\gamma\dots\lambda}), \\ v(\alpha\beta/\gamma\dots\lambda) &= V(K_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}/K_{\gamma\dots\lambda}), \quad \text{u.s.w.}; \\ v_*(\alpha/\beta\gamma\dots\lambda) &= \text{Ord}_{\mathfrak{p}_{\alpha\beta\dots\lambda}} \mathfrak{F}(K_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}/K_{\beta\gamma\dots\lambda}) - 1 \quad (^{28}) \\ v_*(\alpha\beta/\gamma\dots\lambda) &= \text{Ord}_{\mathfrak{p}_{\alpha\beta\dots\lambda}} \mathfrak{F}(K_{\alpha\beta\gamma\dots\lambda}/K_{\gamma\dots\lambda}) - 1, \quad (^{28}) \text{ u.s.w.}; \end{aligned}$$

sodass nach § 1, 1 Formel (1), (2)

$$(1) \quad v(\alpha\beta\dots\gamma/\delta\dots\lambda) = \text{Max} (v(\alpha/\delta\dots\lambda), v(\beta/\delta\dots\lambda), \dots, v(\gamma/\delta\dots\lambda)),$$

$$(2) \quad v_*(\alpha\beta\dots\gamma/\delta\dots\lambda) = \text{Max}(v_*(\alpha/\delta\dots\lambda), v_*(\beta/\delta\dots\lambda), \dots, v_*(\gamma/\delta\dots\lambda)).$$

Ferner repräsentiere A ein Aggregat irgendwelcher Zahlen unter $0, 1, 2, \dots, m$; sodass z. B.

$$v(\alpha/A) = V(K_{\alpha A}/K_A).$$

2. Hilfssatz:

$$\begin{aligned} \text{Aus} \quad & v(\omega/A) > v(\alpha\beta\dots\lambda A/A) \\ \text{folgt} \quad & v(\omega/\beta\dots\lambda A) > v(\alpha/\beta\dots\lambda A), \\ & v(\omega/\alpha\beta\dots\lambda A) \geq v(\omega/\beta\dots\lambda A), \\ & v_*(\omega/\alpha\beta\dots\lambda A) \geq v_*(\omega/\beta\dots\lambda A), \end{aligned}$$

wo Gleichheit nur für $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\infty$ gilt.

Beweis (durch vollständige Induktion in Bezug auf die Anzahl n der Ziffern $\alpha, \beta, \dots, \lambda$):

(²⁸) Nach Satz 2 ist z. B. in der Fig. 5, $v_* = v_*(1/0)$, $u_* = v_*(2/0)$, $v_*(12/0) = \text{Max}(v_*, u_*)$.

1) Für $n=2$ haben wir folgendes zu beweisen:

Aus $v(\omega/A) > v(\alpha\beta/A)$
 folgt $v(\omega/\beta A) > v(\alpha/\beta A)$,
 $v(\omega/\alpha\beta A) \geq v(\omega/\beta A)$
 $v_*(\omega/\alpha\beta A) \geq v_*(\omega/\beta A)$,
 wo Gleichheit nur für $p=p_\infty$ gilt.

Fig. 7.

Wir setzen zur Abkürzung (Vgl. Fig. 7)

$$\begin{aligned} a &= v(\alpha/A), & b &= v(\beta/A), \\ c &= v(\omega/A), & b_* &= v_*(\beta/A), \\ a' &= v(\alpha/\beta A), & c' &= v(\omega/\beta A), \\ l^* &= \text{Grad von } K_{\beta A}/K_A. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden dann verschiedenen Fälle, und wenden jeweils auf die Relativkörper $K_{\alpha\beta A}/K_A$, $K_{\omega\beta A}/K_A$ den Satz 6 an; das Resultat stellen wir tabellarisch zusammen ⁽²⁹⁾:

a) Für endliches p , I. $a < \text{bzw.} = 0$ also $c \geq \text{bzw.} > 0$.	$a' < \text{bzw.} = 0$ $c' \geq \text{bzw.} > 0$
II. $b < 0$	$a' = a, \quad c' = c$
III. $a > 0, b \geq 0$, also $c > 0$ i) $c > b \geq a$ ii) $c > a > b$	$a' \leq b_*, \quad c' = b_* + l^*(c - b)$ $a' = b_* + l^*(a - b), \quad c' = b_* + l^*(c - b)$
b) Für $p=p_\infty$, kommt nur $c=0, a=b < 0$ vor.	$c' = 0, \quad a' < 0$.

Wir sehen in allen Fällen, dass die erste Behauptung $c' > a'$ sich tatsächlich als richtig erweist. Die weiteren Aussagen ergeben sich hieraus nach Betrachtung von $K_{\alpha\beta\omega A}/K_{\beta A}$ (das obere Parallelogramm in der Fig. 7) wiederum mit Heranziehung des Satzes 6.

2) Zweiter Teil des Induktionsbeweises: Nach (1) können wir unsere Voraussetzung mit zwei anderen Ungleichungen

⁽²⁹⁾ Nach Voraussetzung ist offenbar $c > a, c > b$.

$$v(\omega/A) > v(\alpha\beta\dots\kappa/A)$$

$$v(\omega/A) > v(\beta\dots\kappa\lambda/A)$$

ersetzen. Sodann folgt, wenn man den Satz für $n-1$ als richtig annimmt,

$$v(\omega/\beta\dots\kappa A) > v(\alpha/\beta\dots\kappa A),$$

$$v(\omega/\beta\dots\kappa A) > v(\lambda/\beta\dots\kappa A),$$

d.h.
$$v(\omega/\beta\dots\kappa A) > v(\alpha\lambda/\beta\dots\kappa A);$$

und alsbald, nach 1), die Richtigkeit des Satzes für n .

Dass damit der Beweis des Führersatzes im wesentlichsten Punkte schon ausgemacht ist, werden wir gleich sehen.

3. Es sei k' ein Zwischenkörper von K/k von der Art, dass K/k' zyklisch vom Primzahlgrad ist. Alsdann liegt für eine passende Permutation $\alpha, \beta, \dots, \mu, \omega$ der Zahlen $1, 2, \dots, m$ einer oder der andere der folgenden zwei Fälle vor:

a)
$$K = K_{\alpha\beta\dots\mu\omega},$$

$$k' = K_{\alpha\beta\dots\mu}, \quad k'K_\omega = K;$$

$$K_\omega/k: \text{zyklisch vom Primzahlgrade.}$$

b)
$$K = K_{\alpha\beta\dots\mu\omega},$$

$$k' = K_{\alpha\beta\dots\mu}K'_\omega, \quad K_\omega > K'_\omega (\geq k);$$

$$K_\omega/K'_\omega: \text{zyklisch vom Primzahlgrade.}$$

Nun lässt sich der in § 1 formulierte Führersatz:

Aus
$$\mathfrak{f}(K/k) > \mathfrak{f}(k'/k)$$

 folgt
$$\mathfrak{f}(K/k') > \mathfrak{F}(k'/k) \quad (^{30}).$$

in der eben eingeführten Bezeichnungsweise so übersetzen:

Aus
$$v(\omega\alpha\beta\dots\mu/0) > v(\alpha\beta\dots\mu/0)$$

 folgt a)
$$v(\omega/\alpha\beta\dots\mu) > v_*(\alpha\beta\dots\mu/0),$$

 b)
$$v_*(\omega/\alpha\beta\dots\mu) > v_*(\alpha\beta\dots\mu/0), \text{ und } > v_*(\omega'/0);$$

 wo
$$v_*(\omega'/0) = \text{Ord}_{\mathfrak{p}_\omega} \mathfrak{F}(K'_\omega/k) - 1 \text{ gesetzt ist.}$$

Der Beweis darf jetzt aufs leichteste so geschehen:

Man beachte zunächst, dass wegen (1) unsere Voraussetzung:

$$v(\omega\alpha\beta\dots\mu/0) > v(\alpha\beta\dots\mu/0)$$

mit
$$v(\omega/0) > v(\alpha\beta\dots\mu/0)$$

äquivalent ist, und

(³⁰) Nur die Bezeichnung weicht von der damaligen ab. Für dortige K', K ist hier K, k' geschrieben.

$$v(\omega/0) > v(\beta\gamma \dots \mu/0), \\ v(\omega/0) > v(\gamma \dots \mu/0), \dots, v(\omega/0) > v(\mu/0)$$

mit einbegreift, sodass wir hierauf unsern Hilfssatz vielfach anwenden können. Wir erhalten dadurch eine Reihe von Ungleichungen:

$$v(\omega/\alpha\beta \dots \mu) \geq v(\omega/\beta\gamma \dots \mu) \geq v(\omega/\gamma \dots \mu) \geq \dots \geq v(\omega/\mu). \\ v_*(\omega/\alpha\beta \dots \mu) \geq v_*(\omega/\beta\gamma \dots \mu) \geq v_*(\omega/\gamma \dots \mu) \geq \dots \geq v_*(\omega/\mu).$$

Beweis von a): Es genügt nach (2) nur etwa

$$v(\omega/\alpha\beta \dots \mu) > v_*(\mu/0)$$

zu zeigen. Nach obiger Formel und nach Satz 6 ist aber

$$v(\omega/\alpha\beta \dots \mu) \geq v(\omega/\mu) > v_*(\mu/0),$$

letzteres weil $v(\omega/0) > v(\mu/0)$.

Beweis von b): Die erste Ungleichung beweist sich genau wie bei a). Die zweite aber so:

$$v_*(\omega/\alpha\beta \dots \mu) \geq v_*(\omega/\mu) > v_*(\omega/0) > v_*(\omega'/0).$$

Der Beweis des Führersatzes ist somit abgeschlossen.

Dazu möchte ich noch bemerken, dass infolge unseres Resultates, alle Fragen nach der Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{F}(K/k)$ im Strahlklassenkörper K über k als Probleme bzgl. der zweistufigen metabelschen Gruppe aufgefasst werden können⁽³¹⁾. Jene abstrakte Gruppe scheint mir sonach noch weitergehende zahlentheoretische Bedeutungen zu enthalten, als es bisher anerkannt war.

Mathematisches Institut,
kaiserliche Universität zu Tōkyō.

⁽³¹⁾ Nach den Schlüssen von Artin, wie es in § 1 dargestellt wurde. Wenn man z. B. nur solche metabelschen Gruppen beherrschen könnte, bei denen die Faktorgruppe der ganzen Gruppe nach der Kommutatorgruppe zyklisch ausfällt, so würde schon damit die Struktur der Idealklassengruppe des Kreiskörpers von der Primzahlpotenzordnung, sogar nach dem Strahl modulo Geschlechtsmodul, klar gemacht werden.