9. Über eine Klasse der Mittelwerte.

Von Mitio NAGUMO.

(Eingegangen am 1. November, 1929)

Es ist leicht zu sehen, dass die durch die Gleichung

$$(1) \quad \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)}{n} \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

definierten Mittelwerte μ von $x_1, \dots, x_n$ ($a \leq x_i \leq b$), wo $\varphi(x)$ eine in $\langle a, b \rangle$ eigentlich monotone⁽¹⁾ stetige Funktion ist, den folgenden Bedingungen genügen:

- (i) $\mu(x_1, \dots, x_n)$ ist eine symmetrische Funktion von $(x_1, \dots, x_n)$.
- (ii) $\mu(x_1, \dots, x_n) = \mu(\mu(x_1, \dots, x_r)*[r], x_{r+1}, \dots, x_n)$ ⁽²⁾.
- (iii) $\mu(x_1, \dots, x_n)$ ist eine stetige Funktion von $(x_1, \dots, x_n)$, und

$$a \leq \mu(x_1, \dots, x_n) \leq b \quad \text{für} \quad a \leq x_i \leq b.$$
- (iv) Aus $x_1 < x_2$ folgt $x_1 < \mu(x_1, x_2) < x_2$.
- (v) $\mu(a, a, \dots, a) = a$.

Nun wollen wir beweisen, dass die den obigen fünf Bedingungen genügende Funktion $\mu(x_1, \dots, x_n)$ die Form (1) haben muss.

In § 6 will ich noch der hinzugefügten Bedingung (vi) $\mu(x_1+l, \dots, x_n+l) = \mu(x_1, \dots, x_n) + l$ genügende Mittelwerte betrachten.

1.

Hilfssatz 1. Es gilt $\mu(x_1*[p], x_2*[p], \dots, x_r*[p]) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_r)$.

Beweis: $\mu(x_1*[p], \dots, x_r*[p]) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_r, x_1, \dots, x_r, \dots, x_1, \dots, x_r)$
(nach (i))

$$= \mu(\mu(x_1, \dots, x_r)*[r], \mu(x_1, \dots, x_r)*[r], \dots, \mu(x_1, \dots, x_r)*[r])$$

(nach (i) u. (ii))

⁽¹⁾ D.h., $\varphi(x)$ ist eine monotone Funktion, welche für irgend zwei verschiedene Werte von x auch verschiedene Werte besitzt.

⁽²⁾ $a*[r]$ bedeutet die Folge der r gleichen Werte $\underbrace{a, a, \dots, a}_r$.

$$= \mu(x_1, \dots, x_r). \quad (\text{nach (v)}).$$

Hilfssatz 2. *Es gilt* $\mu(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{2r}, \dots, x_{(p-1)r+1}, \dots, x_{pr})$
 $= \mu(\mu(x_1, \dots, x_r), \mu(x_{r+1}, \dots, x_{2r}), \dots, \mu(x_{(p-1)r+1}, \dots, x_{pr})).$

Beweis: $\mu(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{2r}, \dots, x_{(p-1)r+1}, \dots, x_{pr})$
 $= \mu(\mu(x_1, \dots, x_r)*[r], \mu(x_{r+1}, \dots, x_{2r})*[r], \dots, \mu(x_{(p-1)r+1}, \dots, x_{pr})*[r])$
(nach (i) u. (ii))
 $= \mu(\mu(x_1, \dots, x_r), \mu(x_{r+1}, \dots, x_{2r}), \dots, \mu(x_{(p-1)r+1}, \dots, x_{pr}))$
(nach Hilfssatz 1).

Hilfssatz 3. *Aus den Relationen*

$$\begin{aligned} \mu(x_1, x_{-1}) &= \mu(x_2, x_{-2}) = x_0, \\ \mu(x_1, x_2) &= x_3 \quad \text{und} \quad \mu(x_{-1}, x_{-2}) = x_{-3} \\ \mu(x_3, x_{-3}) &= x_0. \end{aligned}$$

folgt

Beweis: $\mu(x_3, x_{-3}) = \mu(\mu(x_1, x_2), \mu(x_{-1}, x_{-2}))$
 $= \mu(x_1, x_2, x_{-1}, x_{-2}) \quad (\text{nach Hilfssatz 2})$
 $= \mu(\mu(x_1, x_{-1}), \mu(x_2, x_{-2})) \quad (\text{nach (i) u. Hilfssatz 2})$
 $= \mu(x_0, x_0) = x_0 \quad (\text{nach (v)}).$

Hilfssatz 4. *Aus den Relationen*

$$\begin{aligned} \mu(x_1, x_{-1}) &= \mu(x_3, x_{-3}) = x_0, \\ \mu(x_1, x_2) &= x_3 \quad \text{und} \quad \mu(x_{-1}, x_{-2}) = x_{-3} \\ \mu(x_2, x_{-2}) &= x_0. \end{aligned}$$

folgt

Beweis: $x_3 = \mu(x_3, x_{-3}) = \mu(\mu(x_1, x_2), \mu(x_{-1}, x_{-2}))$
 $= \mu(x_1, x_2, x_{-1}, x_{-2})$
 $= \mu(\mu(x_1, x_{-1}), \mu(x_2, x_{-2})) = \mu(x_0, \mu(x_2, x_{-2})).$

Wäre $x_0 \neq \mu(x_2, x_{-2})$, so würde $x_0 \geq \mu(x_2, x_{-2})$; also nach (iv)

$$x_0 \geq \mu(x_0, \mu(x_2, x_{-2}))$$

Dies steht aber im Widerspruch mit $x_0 = \mu(x_0, \mu(x_2, x_{-2}))$, w.z.b.w.

2.

$\psi(t)$ sei irgend eine eigentlich monotone stetige Funktion von t , dann genügen auch die transformierten Funktionen

$$M(t_1, \dots, t_n) = \psi^{-1}(\mu(\psi(t_1), \dots, \psi(t_n))) \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

als Mittelwerte von $t_1, \dots, t_n$, den Postulaten (i), (ii), (iii), (iv) und (v), wie man leicht bestätigen kann. Nun wollen wir die Funktion ψ so

definieren, dass $M(t_1, \dots, t_n)$ die einfachste Form besitzt.

Wir setzen $a = \psi(0)$, $b = \psi(1)$ und $\mu(a, b) = \psi\left(\frac{1}{2}\right)$; also

$$\psi(0) < \psi\left(\frac{1}{2}\right) < \psi(1).$$

Ferner setzen wir $\mu\left(\psi(0), \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{4}\right)$ und $\mu\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right), \psi(1)\right) = \psi\left(\frac{3}{4}\right)$; also

$$\psi(0) < \psi\left(\frac{1}{4}\right) < \psi\left(\frac{1}{2}\right) < \psi\left(\frac{3}{4}\right) < \psi(1).$$

Im allgemeinen setzen wir

$$\mu\left(\psi\left(\frac{i}{2^k}\right), \psi\left(\frac{i+1}{2^k}\right)\right) = \psi\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) \quad (k=1, 2, 3, \dots, 0 \leq i \leq 2^k - 1).$$

Ξ sei die Menge aller Brüche ξ von der Form $\frac{i}{2^k}$ ($k=1, 2, 3, \dots$, $0 \leq i \leq 2^k$).

Aus der Relation $\xi_1 < \xi_2$ (ξ_1 und ξ_2 aus Ξ) folgt stets

$$\psi(\xi_1) < \psi(\xi_2).$$

Wir beweisen folgende Tatsache: *Der Wertevorrat von $\psi(\xi)$ für alle ξ von Ξ bildet eine in $\langle a, b \rangle$ überall dichte Menge.*

Beweis: Wäre dies nicht der Fall, so gibt es ein Teilintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ von $\langle a, b \rangle$, worin kein $\psi(\xi)$ existiert. Das Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ befindet sich entweder in $\langle \psi(0), \psi\left(\frac{1}{2}\right) \rangle$ oder in $\langle \psi\left(\frac{1}{2}\right), \psi(1) \rangle$. $\langle \alpha, \beta \rangle$ sei in $\langle \psi\left(\frac{i_1}{2}\right), \psi\left(\frac{i_1+1}{2}\right) \rangle$ (i_1 =entweder 0 oder 1) enthalten; dann befindet sich $\langle \alpha, \beta \rangle$ entweder in $\langle \psi\left(\frac{i_1}{2}\right), \psi\left(\frac{2i_1+1}{4}\right) \rangle$ oder in $\langle \psi\left(\frac{2i_1+1}{4}\right), \psi\left(\frac{i_1+1}{2}\right) \rangle$. $\langle \alpha, \beta \rangle$ sei in $\langle \left(\frac{i_2}{4}\right), \psi\left(\frac{i_2+1}{4}\right) \rangle$ enthalten. Ähnlich fortfahrend bekommen wir eine Folge der in einander eingeschachtelten Intervalle $\langle \psi\left(\frac{i_v}{2^v}\right), \psi\left(\frac{i_v+1}{2^v}\right) \rangle$, die $\langle \alpha, \beta \rangle$ enthalten. Da $\psi\left(\frac{i_v}{2^v}\right) \leq \psi\left(\frac{i_{v+1}}{2^{v+1}}\right) \leq \alpha$ und $\psi\left(\frac{i_v+1}{2^v}\right) \geq \psi\left(\frac{i_{v+1}+1}{2^{v+1}}\right) \geq \beta$ sind, so sind die beiden Folgen $\left\{\psi\left(\frac{i_v}{2^v}\right)\right\}$ und $\left\{\psi\left(\frac{i_v+1}{2^v}\right)\right\}$ konvergent. α' und β' seien ihre

Grenzwerte. Dann ist $\alpha' \leq \alpha < \beta \leq \beta'$. $\langle \alpha', \beta' \rangle$ ist in jedem $\langle \psi(\frac{i_\nu}{2^\nu}), \psi(\frac{i_\nu+1}{2^\nu}) \rangle$ enthalten. Der Mittelwert $\mu(\psi(\frac{i_\nu}{2^\nu}), \psi(\frac{i_\nu+1}{2^\nu}))$ der beiden Endwerte von $\langle \psi(\frac{i_\nu}{2^\nu}), \psi(\frac{i_\nu+1}{2^\nu}) \rangle$ ist aber ein Endwert des nachfolgenden Intervalls $\langle \psi(\frac{i_{\nu+1}}{2^{\nu+1}}), \psi(\frac{i_{\nu+1}+1}{2^{\nu+1}}) \rangle$; folglich liegt $\mu(\psi(\frac{i_\nu}{2^\nu}), \psi(\frac{i_\nu+1}{2^\nu}))$ nicht im innern von $\langle \alpha', \beta' \rangle$. Da $\mu(\alpha', \beta') = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu(\psi(\frac{i_\nu}{2^\nu}), \psi(\frac{i_\nu+1}{2^\nu}))$, so liegt auch $\mu(\alpha', \beta')$ nicht im innern von $\langle \alpha', \beta' \rangle$, was aber mit (iv) im Widerspruch steht. Also muss der Wertevorrat von $\psi(\xi)$, für alle ξ von Ξ , eine in $\langle a, b \rangle$ überall dichte Menge bilden.

Da $\psi(\xi)$ auf Ξ (überall dicht in $\langle 0, 1 \rangle$) monoton wächst und dessen Wertevorrat in $\langle a, b \rangle$ überall dicht ist, so können wir $\psi(\xi)$ zu einer stetigen eigentlich monotonen Funktion auf ganzem Intervalle $\langle 0, 1 \rangle$ ergänzen. Die inverse Funktion ψ^{-1} von ψ ist auch stetig. Die Funktion $x = \psi(t)$ bildet das $\langle 0, 1 \rangle$ umkehrbar eindeutig und stetig auf das $\langle a, b \rangle$ ab.

3.

Jetzt betrachten wir die Funktion $M(t_1, \dots, t_n) = \psi^{-1}(\mu(\psi(t_1), \dots, \psi(t_n)))$. Für $n=2$ bekommen wir:

$$M(t_1, t_2) = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Beweis: Dazu haben wir zu beweisen, dass

$$(A) \quad \mu(\psi(t_1), \psi(t_2)) = \psi\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

ist. Zunächst nehmen wir an, dass t_1 und t_2 der Ξ angehören. Wir können t_1 und t_2 in der Form $t_1 = \frac{i-p}{2^k}$, $t_2 = \frac{i+p}{2^k}$ (k, i, p : positive ganze Zahlen) schreiben.

Der Fall $p=1$: Die Behauptung ist für $k=1$ klar. Wir nehmen also an, dass (A) für $k < m$ bereits bewiesen ist. Nun sei $k=m$. Ist $i=2i'+1$, so ist $t_1 = \frac{i'}{2^{m-1}}$ und $t_2 = \frac{i'+1}{2^{m-1}}$; (A) ist also durch die Konstruktion von $\psi(t)$ erfüllt. Ist $i=2i'$, so ist $t_1 = \frac{2i'-1}{2^m} = \frac{1}{2} \left(\frac{i'-1}{2^{m-1}} + \frac{i'}{2^{m-1}} \right)$

und $t_2 = \frac{2i'+1}{2^m} = \frac{1}{2} \left(\frac{i'}{2^{m-1}} + \frac{i'+1}{2^{m-1}} \right)$; also $\psi(t_1) = \mu \left(\psi \left(\frac{i'-1}{2^{m-1}} \right), \psi \left(\frac{i'}{2^{m-1}} \right) \right)$,
 $\psi(t_2) = \mu \left(\psi \left(\frac{i'}{2^{m-1}} \right), \psi \left(\frac{i'+1}{2^{m-1}} \right) \right)$. Wegen unserer Annahme gilt
 $\mu \left(\psi \left(\frac{i'-1}{2^{m-1}} \right), \psi \left(\frac{i'+1}{2^{m-1}} \right) \right) = \psi \left(\frac{i'}{2^{m-1}} \right)$. Nach Hilfssatz 3 erhält man also
 $\mu \left(\psi \left(\frac{i-1}{2^m} \right), \psi \left(\frac{i+1}{2^m} \right) \right) = \psi \left(\frac{i}{2^m} \right)$.

Der Fall $p > 1$: Wir nehmen an, dass (A) für $p < r$ ($r > 1$) bereits bewiesen ist. Wegen des vorgehenden Beweises

$$\mu \left(\psi \left(\frac{i-r}{2^k} \right), \psi \left(\frac{i-(r-2)}{2^k} \right) \right) = \psi \left(\frac{i-(r-1)}{2^k} \right) \quad \text{und}$$

$$\mu \left(\psi \left(\frac{i+(r-2)}{2^k} \right), \psi \left(\frac{i+r}{2^k} \right) \right) = \psi \left(\frac{i+(r-1)}{2^k} \right).$$

Ferner wegen unserer Annahme $\mu \left(\psi \left(\frac{i-(r-2)}{2^k} \right), \psi \left(\frac{i+(r-2)}{2^k} \right) \right) = \psi \left(\frac{i}{2^k} \right)$,
 und $\mu \left(\psi \left(\frac{i-(r-1)}{2^k} \right), \psi \left(\frac{i+(r-1)}{2^k} \right) \right) = \psi \left(\frac{i}{2^k} \right)$. Dann erhalten wir
 wegen Hilfssatzes 4 $\mu \left(\psi \left(\frac{i-r}{2^k} \right), \psi \left(\frac{i+r}{2^k} \right) \right) = \psi \left(\frac{i}{2^k} \right)$.

Nun seien t_1 und t_2 beliebige Zahlen in $\langle 0, 1 \rangle$. Da t_1 und t_2 durch die Zahlen $\left\{ \frac{i_n - p_n}{2^{k_n}} \right\}$ bzw. $\left\{ \frac{i_n - p_n}{2^{k_n}} \right\}$ beliebig genau approximiert werden können, so bestätigt man wegen der Stetigkeit von ψ und μ die Gleichung (A).

4.

Wir wollen das Bestehen der folgenden Gleichung beweisen:

$$M(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n}.$$

Für $n=2$ ist diese schon bewiesen. Wir setzen voraus, dass dieselbe für $n < N$ bereits bewiesen ist. Für $n=N$ beweisen wir folgendermassen:

$$\begin{aligned} M(t_1, \dots, t_N) &= M(t_1 * [N-1], t_2 * [N-1], \dots, t_N * [N-1]) \\ &= M(t_2, t_3, \dots, t_N, t_1, t_3, t_4, \dots, t_N, \dots, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}) \\ &= M(M(t_2, t_3, \dots, t_N), M(t_1, t_3, \dots, t_N), \dots, M(t_1, t_2, \dots, t_{N-1})) \\ &= M(t_1', t_2', \dots, t_N') \end{aligned}$$

wo $t_1' = \frac{t_2 + t_3 + \dots + t_N}{N-1}$, $t_2' = \frac{t_1 + t_3 + \dots + t_N}{N-1}$, $\dots\dots\dots$, $t_N' = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{N-1}}{N-1}$;

oder $t_l' = \frac{\sum_{i=1}^N t_i - t_l}{N-1}$. Dabei gelten die Gleichungen

$$\left| t_l' - \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N} \right| = \frac{1}{N-1} \left| t_l - \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N} \right|,$$

und

$$\sum_{i=1}^N \frac{t_i'}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N}.$$

Ähnlich fortfahrend bekommen wir

$$M(t_1, \dots, t_N) = M(t_1', \dots, t_N') = M(t_1'', \dots, t_N'') = \dots\dots\dots = M(t_1^{(\nu)}, \dots, t_N^{(\nu)}),$$

wo $t_l^{(\nu)} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i^{(\nu-1)} - t_l^{(\nu-1)}}{N-1}$. Dabei gelten die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^N \frac{t_i^{(\nu)}}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i^{(\nu-1)}}{N} = \dots\dots\dots = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N},$$

und $\left| t_l^{(\nu)} - \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N} \right| = \frac{1}{N-1} \left| t_l^{(\nu-1)} - \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N} \right| = \frac{1}{(N-1)^\nu} \left| t_l - \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N} \right|.$

Also $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_l^{(\nu)} = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N},$

folglich $M(t_1, \dots, t_N) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} M(t_1^{(\nu)}, \dots, t_N^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N},$ w. z. b. w.

φ sei die inverse Funktion von ψ . Setzt man $t_i = \varphi(x_i)$, so ist

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i)}{n} = M(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = \varphi(\mu(x_1, \dots, x_n)),$$

folglich $\mu(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i)}{n} \right).$ (1)

5.

Genügt irgendeine eigentlich monotone stetige Funktion φ_1 (für φ) der Gleichung (1), so ist für beliebige Konstanten c_1 und c_2

$$c_1 \varphi_1(\mu(x_1, \dots, x_n)) + c_2 = \sum_{i=1}^n \frac{c_1 \varphi_1(x_i) + c_2}{n}.$$

Man setze $c_1\varphi_1(x)+c_2=\varphi_2(x)$ ($c_1\neq 0$), so genügt auch die Funktion φ_2 (für φ) der Gleichung (1). Wir wählen die Konstanten c_1, c_2 so, dass

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(a)+c_2=0, \\ c_1\varphi_1(b)+c_2=1, \end{cases}$$

d.h., $\varphi_2(a)=0, \varphi_2(b)=1$. (Da $\varphi_1(a)\neq\varphi_1(b)$, so kann dies System nach c_1 und c_2 eindeutig aufgelöst werden, und $c_1\neq 0$).

ψ_2 sei die inverse Funktion von φ_2 , ψ_2 genügt also wegen (1) für $n=2$, indem man $\varphi=\varphi_2, x_1=\psi_2(t_1), x_2=\psi_2(t_2)$ setzt, den Gleichungen

$$\mu(\psi_2(t_1), \psi_2(t_2))=\psi_2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right),$$

und

$$\psi_2(0)=a, \quad \psi_2(1)=b.$$

Vergleicht man $\psi_2(t)$ mit der in § 2 definierten Funktion $\psi(t)$, so findet man leicht, dass $\psi_2(t)$ mit $\psi(t)$ übereinstimmt. Folglich $\varphi_2(x)=\varphi(x)$, oder $c_1\varphi_1(x)+c_2=\varphi(x)$ ($c_1\neq 0$).

Daraus können wir schliessen, dass irgend zwei der Gleichung (1) genügende eigentlich monotone stetige Funktionen φ_1 und φ_2 durch eine lineare Relation

$$\varphi_2(x)=g\cdot\varphi_1(x)+h \quad (g\neq 0; g, h: \text{ konst.})$$

verbunden sind.

6.

Jetzt fügen wir den Postulaten (i), (ii), (iii), (iv), und (v) noch das folgende hinzu:

$$(vi) \quad \mu(x_1+l, \dots, x_n+l)=\mu(x_1, \dots, x_n)+l \quad (l \text{ beliebige reelle Zahl}).$$

Dies und (1) ergeben

$$\mu(x_1, \dots, x_n)+l=\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\varphi(x_i+l)}{n}\right)$$

Die durch $\varphi_2(x)=\varphi(x+l)$ definierte Funktion $\varphi_2(x)$ genügt also der Gleichung (1). Folglich erhält man die Funktionalgleichung

$$(2) \quad \varphi(x+l)=g(l)\varphi(x)+h(l), \quad g(l)\neq 0.$$

Dabei können wir annehmen $\varphi(0)=0$. Setzt man in (2) $x=0$, so erhält man wegen $\varphi(0)=0$,

$$\varphi(l)=h(l).$$

Dann haben wir für (2)

$$(2') \quad \varphi(x+l) = g(l)\varphi(x) + \varphi(l) \quad (g(l) \neq 0).$$

Daraus bekommen wir, indem wir $x = \Delta x$ setzen,

$$(3) \quad \frac{\varphi(l + \Delta x) - \varphi(l)}{\Delta x} = g(l) \frac{\varphi(\Delta x) - \varphi(0)}{\Delta x}, \quad (g(l) \neq 0).$$

Da $\varphi(x)$ monoton ist, so ist $\varphi(x)$ fast überall differentiierbar. $\varphi(x)$ sei etwa an $x = l_1$ differentiierbar, so lehrt die Gleichung (3), dass $\varphi(x)$ auch an $x = 0$ und folglich an jeder Stelle von x differentiierbar ist. Nach (2') folgt

$$g(l) = \frac{\varphi(1+l) - \varphi(l)}{\varphi(1) - \varphi(l)}, \quad \varphi(1) \neq 0.$$

$g(l)$ ist dann stetige Funktion von l , folglich ist $\varphi(x)$ stetig differentiierbar, $g(l)$ ist also auch stetig differentiierbar.

Differentiiert man die beiden Seiten von (2') nach l ,

$$\varphi'(x+l) = g'(l)\varphi(x) + \varphi'(l).$$

Setzt man $l = 0$, dann wird

$$\varphi'(x) = g'(0)\varphi(x) + \varphi'(0).$$

$\varphi(x)$ ist ein Integral der Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y + \beta \quad (\alpha, \beta: \text{konst.}).$$

Ist $\alpha \neq 0$, so erhält man $y = ce^{\alpha x} - \frac{\beta}{\alpha}$; daraus folgt

$$(4) \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha x_i}}{n} \right).$$

Ist $\alpha = 0$, so erhält man $y = c + \beta x$; und also

$$(4') \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Mittelwerte (4) und (4') den Postulaten (i), (ii), (iii), (iv), (v) und (vi) genügen. Wir haben also den Satz gewonnen:

Satz. *Genügen die Mittelwerte $\mu(x_1, \dots, x_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) den Postulaten (i), (ii), (iii), (iv), (v) und (vi), so haben die Mittelwerte entweder die Form*

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha x_i}}{n} \right) \quad (\alpha \neq 0),$$

oder die Form

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (\text{arithmetisches Mittel}).$$

Zusatz. Ersetzt man das Postulat (vi) durch

$$(vii) \quad \mu(lx_1, \dots, lx_n) = l\mu(x_1, \dots, x_n) \quad (x_i > 0, \quad l > 0),$$

so erhält man entweder

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

oder

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad (\text{geometrisches Mittel}).$$

Beweis: Man betrachte die durch $x = \varphi(t) = e^t$ transformierten Mittelwerte

$$M(t_1, \dots, t_n) = \varphi^{-1}(\mu(\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_n))) = \log \mu(e^{t_1}, \dots, e^{t_n}).$$

Dann erhält man für (vii)

$$M(t_1 + \lambda, \dots, t_n + \lambda) = M(t_1, \dots, t_n) + \lambda \quad (\lambda = \log l).$$

Also gilt entweder

$$M(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha t_i}}{n} \right) \quad (\alpha \neq 0),$$

oder

$$M(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n}.$$

Daraus bekommen wir leicht

$$\text{entweder} \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

oder

$$\mu(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

Mathematisches Institut, K. Universität zu Tōkyō.